matériaux pour une documentation

l'enseignement de la géométrie au collège: l'archipel des isométries

Le G.E.M. (Groupe d'Enseignement Mathématique) de l'Université de Louvain La Neuve en Belgique rassemble depuis 1978 une quarantaine de personnes : enseignants du secondaire, universitaires et étudiants en mathématiques. Ses recherches reposent sur la conception suivante : apprendre des mathématiques, c'est *construire un savoir sur des chantiers de problèmes.* Ses travaux ont donné lieu à de nombreuses publications(1) — trop peu connues en France — dans lesquelles le professeur de mathématiques peut trouver de nombreuses démarches et situations-problèmes utilisables en collège ou en lycée.

Les travaux du G.E.M. sur l'enseignement de la géométrie au collège ont été publiés dans un ouvrage intitulé *L'archipel des isométries,* ils ont été expérimentés dans plusieurs classes dont les élèves ont entre 12 et 14 ans (nos sixième, cinquième et quatrième). Cet article se propose de présenter cet ouvrage et les problématiques didactiques du G.E.M.

(1) G.E.M. - Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain La Neuve, Belgique.

I. En route vers l'archipel des isométries

1) Regarder et réfléchir

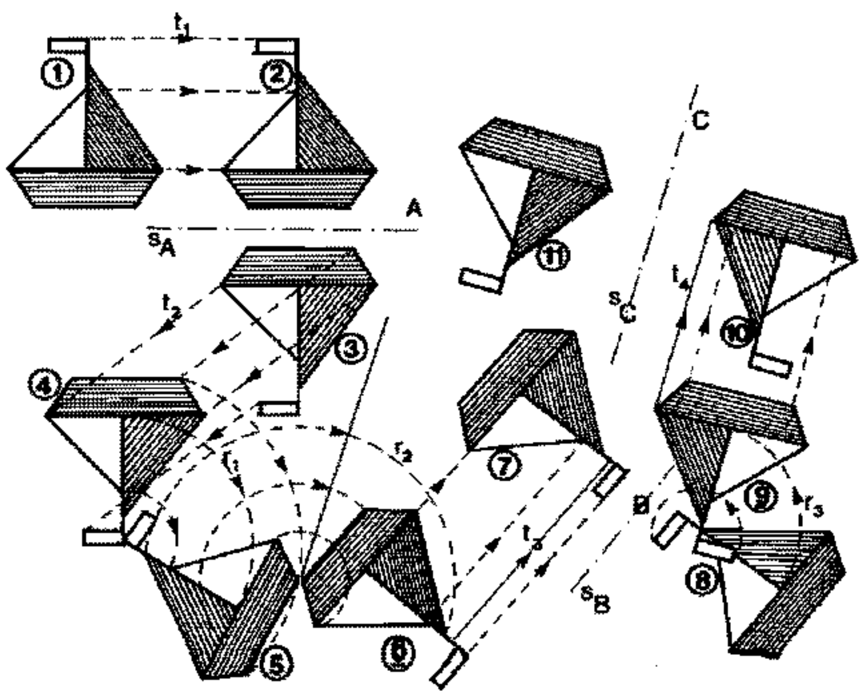
La première fiche proposée aux élèves s'intitule "la valse de l'alphabet". En voici l'énoncé :

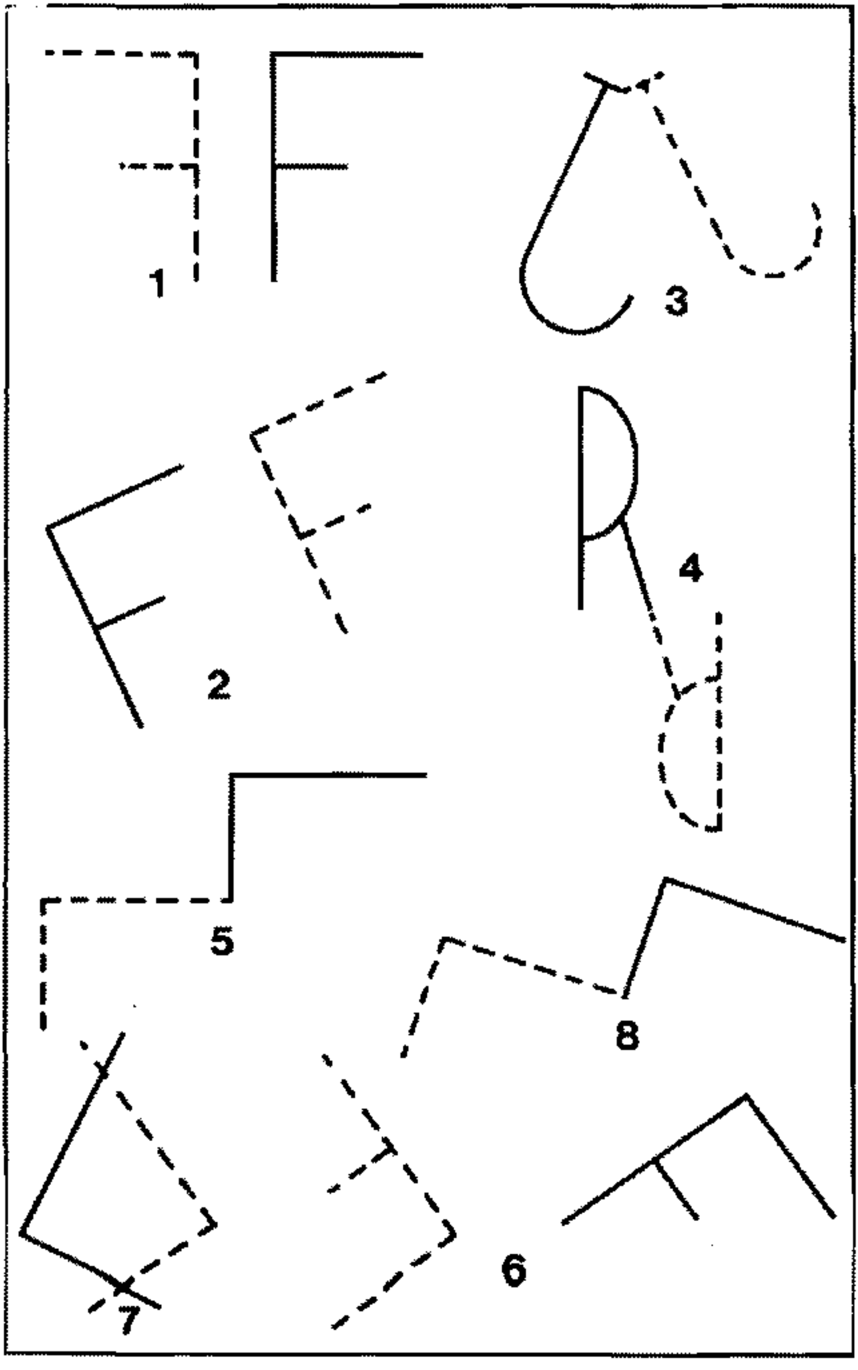
"Tu trouvera dans chacun des dessins ci-après une lettre en trait plein et une lettre en trait pointillé.

1) Pour chacun des dessins dis comment on peut obtenir l'image à partir de la lettre en trait plein. La réponse doit être précise : une personne qui n'aurait pas vu la lettre en pointillé doit pouvoir la dessiner.

2) Dans l'ensemble de ces dessins trouves-tu des cas qui se ressemblent ?"

Plusieurs dessins accompagnent la fiche dont huit que nous présentons, à titre d'exemples, dans la page suivante.




1
2
3
4
5
6
7
8

Les isométries mises en jeu sont "familières" : translations, rotations, symétries. Les transformations plus générales ne sont pas présentes pour éviter une situation "touffue". Il n'y a pas de lettres pourvues de symétrie afin de pouvoir distinguer retournement et déplacement et afin que l'isométrie à découvrir soit unique.

Cette fiche est utilisée par les élèves pendant quatre heures environ de réflexions, de discussions, de manipulations utilisant des objets divers : découpages, calques, miroirs, etc.

Il s'agit de trouver le "mouvement le plus simple" qui permette d'obtenir une lettre à partir de l'autre. Ce principe est implicite mais il peut être contrarié par la forme de la figure (voir figures 6 et 7) ou par la relation de la figure à son environnement immédiat (voir figure 5). En effet, les élèves recherchent des mouvements s'insérant le plus simplement possible dans la structure locale (forme de la figure, environnement, disposition des éléments canoniques de la figure).

La figure 6 conduit les élèves à un "cheminement vers les rotations" qui commence par le regard, par un geste de la main, qui continue avec l'utilisation de découpages, du compas, du papier calque, qui passe par des raisonnements puis revient aux instruments (règle et compas). La nécessité de trouver ici un seul mouvement constitue déjà un premier obstacle épistémologique dont le franchissement passe par des essais, des erreurs, des tâtonnements et conduit à la construction d'un premier îlot déductif et à la définition du concept de médiatrice.

2. Obstacle épistémologique et problème

"L'observation première est toujours un premier obstacle pour la culture scientifique (...) il y a rupture et non pas continuité entre l'observation et l'expérimentation" a écrit le philosophe Bachelard (2). Le savoir quotidien est obstacle à la construction scientifique mais, cependant, une théorie ne peut être construite sans référence à autre chose qu'elle même. La résolution de cette apparente contradiction nécessite l'existence d'un *contexte problématique*. En effet, c'est le problème posé (dégager la même règle de transformations pour toutes les translations, rotations, etc.) qui conduit au dépassement des diverses observations et à la construction d'une structure théorique unique.

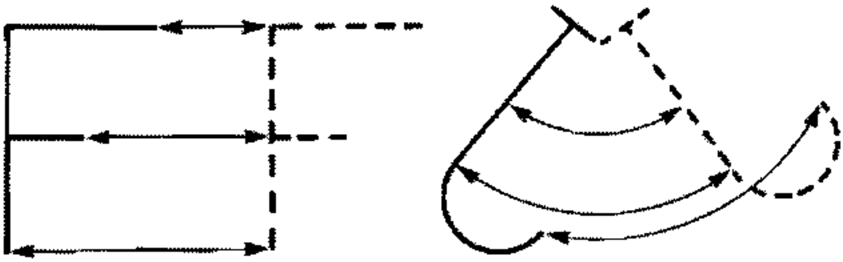
"Le sens du problème donne la marque du véritable esprit scientifique, toute connaissance est réponse à une question" écrit encore Bachelard. Pour qu'il y ait connaissance, pour qu'il y ait franchissement de l'obstacle épistémologique, il faut qu'il y ait problème. C'est le problème posé qui donne sens à la théorie puisque la théorie n'a de sens que par rapport aux questions qu'elle permet de résoudre.

---

(2) *La formation de l'esprit scientifique.*

3. Mesurer

La seconde fiche distribuée aux élèves précise que la règle à trouver doit pouvoir s'appliquer au passage de chaque point de la figure de départ au point qui lui correspond dans l'image. Cette directive pose de nouvelles questions aux élèves : quels sont les points correspondants des deux figures ? Dans une rotation que signifie "tous les points tournent d'un même angle" ? Comment mesurer un angle ?



A partir de là, les élèves élaborent des définitions dont l'enseignant va réaliser la synthèse. Voici quelques exemples des premiers énoncés produits par une classe :

"Dans une translation, les points sont envoyés à une même distance suivant une direction donnée et dans le même sens. Dans une rotation, les points tournent d'un même angle sur des cercles de même centre et dans le même sens. Dans une symétrie orthogonale, les points sont envoyés perpendiculairement à un axe, au-delà de cet axe et à une distance de l'axe égale à leur distance de départ".

Une définition de l'isométrie est donnée : iso = même, métrie = mesure, une isométrie conserve les mesures. Une première classification en déplacements et retournements peut être établie.

Ces définitions conçoivent les isométries comme des transformations qui envoient des points sur des points. Cela ne signifie pas que les élèves considèrent une figure comme un ensemble de points ; cela signifie que l'on peut marquer des points sur une figure. Ces définitions ne font pas référence au motif, donc l'idée d'isométrie n'est pas attachée à la figure. Cependant, le plan entier n'est pas transformé par une isométrie. En particulier, aucune mention particulière n'est accordée aux points fixes des transformations.

Ces définitions ont une forte connotation cinématique, il faudra attendre les premiers raisonnements pour qu'il en soit autrement. Cela tient à la formation du concept d'isométrie qui ne peut se faire qu'à travers la construction de la théorie des isométries. C'est aussi pour cette raison que la transformation identique est ignorée, elle ne devient nécessaire que lorsque l'on veut dire que la composition d'une translation est une translation.

Malgré toutes ces insuffisances, une première étape de la construction conceptuelle a été franchie. Pour aller plus loin, il devient nécessaire d'introduire un nouveau champ de problèmes à partir desquels les élèves seront amenés à *préciser, rectifier, diversifier* leurs connaissances. Cette procédure de construction du savoir est conforme aux conceptions de Bachelard sur la connaissance car *"l'esprit scientifique se constitue comme un ensemble d'erreurs rectifiées"* et il n'y a *"pas de vérité sans erreur rectifiée"*.

4. La valeur instrumentale du savoir mathématique : le concept de médiatrice

Les travaux du G.E.M. s'appuient sur une conception instrumentale du savoir mathématique : les concepts mathématiques sont des outils pour résoudre des problèmes et pour raisonner. C'est ainsi que le concept de médiatrice ne sera pas révélé aux élèves par le pliage d'une feuille de papier mais construit par les élèves pour résoudre un problème de construction.

Le problème posé est le suivant :

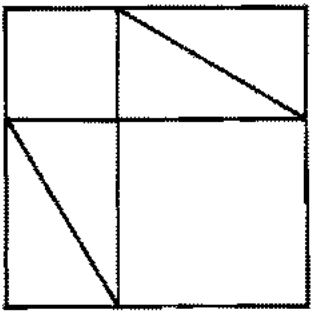
> *"**Problème 1** : on donne deux figures et on sait que la seconde a été obtenue à partir de la première par une rotation. Trouve le centre et l'angle de cette rotation".*

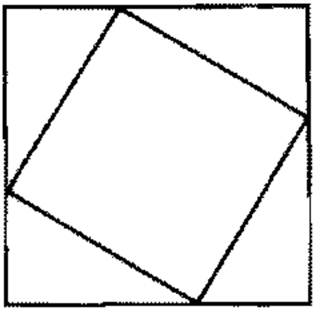
Ce problème conduit lui-même à un autre problème :

> *"**Problème 2** : on donne deux points A et A'. Trouve le centre et l'angle d'une rotation qui envoie A sur A'. Trouve les centres et angles de toutes les rotations qui envoient A sur A'".*

La recherche des élèves aboutit à la réponse suivante : l'ensemble des centres de rotations est une droite perpendiculaire au segment AA' en son milieu. Cette droite est appelée médiatrice de AA'. Ainsi, le concept de médiatrice est construit comme réponse à un problème qui lui donne sens et valeur opératoire (à comparer avec la médiatrice-pliage).

Un premier théorème est énoncé : *"La médiatrice d'un segment de droite est l'ensemble des points équidistants de ses extrémités"*. Il peut être démontré comme conséquence du théorème de Pythagore, lui-même obtenu par découpage de la surface d'un carré :





5. Dessiner et raisonner

La fiche suivante place les élèves sur un nouveau terrain de recherche.

La succession de motifs géométriques.
Dessine un motif de ton choix. Reproduis le deuxième motif ainsi obtenu en utilisant à nouveau une isométrie. Continue ainsi à reproduire le dernier motif obtenu.

Chercher des composées d'isométries.
Numérote trois motifs obtenus successivement :
1) explique par quelle isométrie tu es passé du 1er au 2^{e}, puis du 2^{e} au 3^{e} ;
2) peut-on passer du 1er au 3^{e} par une isométrie ?
3) cherche le plus possible de composées d'isométries et énonce les propriétés que tu découvres.

A partir de ce nouveau contexte problématique, les élèves sont amenés à construire une première théorie des isométries par alternance de tâtonnements inductifs et de raisonnements. Les énoncés "non généralement vrais", proposés par certains, sont contestés par d'autres avec contre-exemples à l'appui. Il s'agit d'obtenir des énoncés vrais pour n'importe quel motif, donc un moyen sûr de pouvoir prévenir tout nouveau contre-exemple. Ce moyen c'est la démonstration, mais qu'est-ce que démontrer ? Le G.E.M. s'appuie, pour répondre à cette question, sur la notion d'îlot déductif.

6. La notion d'îlot déductif

Le principe d'îlot déductif est ainsi défini par le mathématicien Dieudonné : *"L'enseignement des premières années du secondaire devrait être un mélange d'expériences géométriques et de raisonnements partiels sur les résultats de ces expériences" (...) "Mais il convient de débarrasser l'enseignement de la superstition consistant à vouloir à n'importe quel prix tout rattacher à une source axiomatique unique"* (3).

(3) *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.*

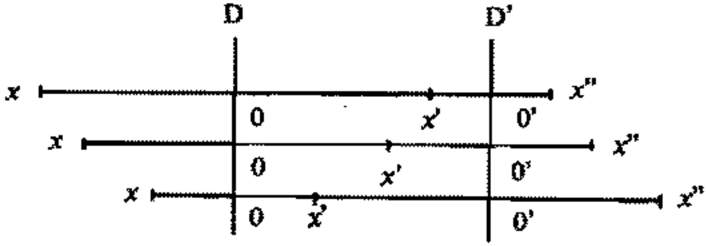
Comment se construit un îlot déductif ? Le G.E.M. en décrit les étapes : on énonce une conjecture de façon plus ou moins claire, la conjecture se précise avec les essais de démonstration, le lot des exemples et contre-exemples s'enrichit, le besoin de rigueur se fait sentir, les concepts se perfectionnent, des outils se créent sur le champ de la démonstration. Dans un même temps, les énoncés, les concepts et les démonstrations se rectifient et se perfectionnent en s'éclairant les uns et les autres au fur et à mesure du travail de construction de l'îlot. En effet, la clarté est un objectif à atteindre et non un préalable. En essayant de démontrer, les élèves s'aperçoivent que les concepts spontanés ne sont pas appropriés au raisonnement recherché.

Quand l'élève ressent-il le besoin de démontrer ? Cela peut être par désir d'argumenter, dans la rencontre d'un fait surprenant ou par désir de généraliser. Cela suppose que l'élève ait fait suffisamment sien le problème posé pour avoir envie d'en relever le défi.

7. Construction d'un îlot déductif : démonstration d'un théorème

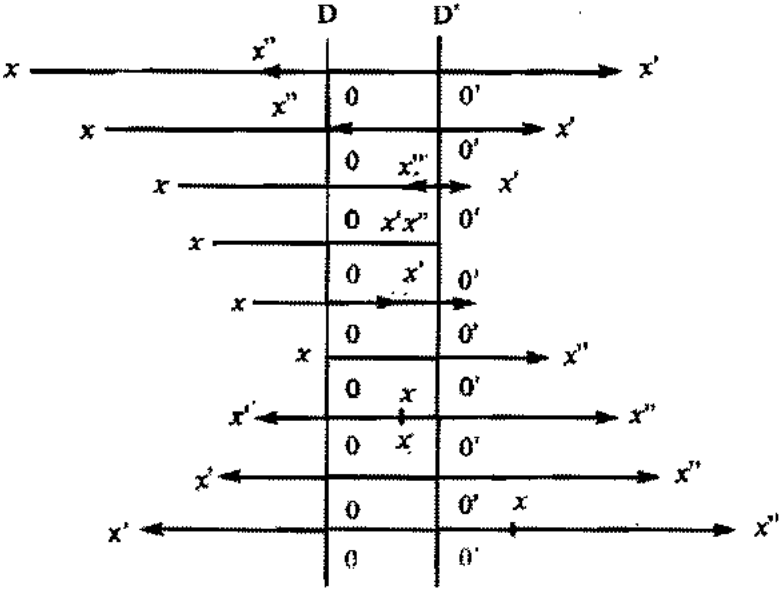
Afin de préciser comment se construit un îlot déductif, considérons la proposition suivante : *"La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation de direction perpendiculaire aux axes"*.

En examinant plusieurs points x situés à gauche de l'axe D, on observe que chacun de ces points soumis à la composée des deux symétries "avance" de la même distance. Pourquoi ? Cette première situation est résolue en démontrant, par les propriétés des distances, que pour chaque point x d'image x'' nous avons $d(x, x'') = 2d(0,0')$.



Une situation plus complexe est ensuite proposée aux élèves sous la forme du problème suivant : *"On compose deux symétries orthogonales d'axes parallèles. En variant la position du point de départ, trouve tous les cas possibles de sauts"*.

Cette situation nécessite de reprendre la démonstration "en munissant les distances d'un signe", ce que les élèves font sans difficulté. La relation de Chasles est introduite, elle aussi, comme outil pour résoudre un problème, et permet d'établir que $\delta(x,x') = 2\delta(0,0')$



Au fur et à mesure de la construction, l'énoncé du théorème se complète tandis que la démonstration se rectifie et que se crée un nouveau concept-outil. L'utilité de la première figure est bien claire : elle est incomplète mais elle présente l'avantage d'être suffisamment simple pour suggérer le résultat à démontrer (énoncé d'une conjecture) et pour se prêter à une démonstration simple.

A partir de nouveaux problèmes, de nouveaux îlots sont construits, puis des ponts sont jetés entre les îlots, des théorèmes établis dans un îlot servent dans d'autres et un ordre est établi dans la génération des théorèmes. Au bout de cette construction, il y a l'archipel des isométries. Au bout de ce travail, il y a la construction d'un savoir mathématique.

II. La construction du savoir mathématique

1. Les mathématiques : un savoir qui se construit

Les travaux du G.E.M. reposent sur une certaine conception du savoir mathématique que partagent les enseignants des IREM qui étudient l'histoire et l'épistémologie des mathématiques (4). Le savoir mathématique n'est pas un savoir énonciatif, un discours ou un langage tombé du ciel, le savoir mathématique est un savoir qui se construit à partir de problèmes. Par conséquent, "*apprendre des mathématiques, à tous les niveaux, c'est construire un savoir sur des chantiers de problèmes* (5)".

Revenons à la construction du concept d'isométrie : au début, il y a des points marqués sur la figure, puis une isométrie est représentée par deux points, puis l'extension de l'isométrie au plan devient utile pour des raisons de démonstration, ensuite les différents types d'isométrie sont étudiés, enfin les isométries sont remplacées par des symboles lorsqu'elles deviennent les éléments d'un groupe. La construction du concept d'isométrie s'est faite étape par étape.

Chaque étape de la construction d'un savoir mathématique correspond à un contexte problématique à chaque fois bien défini. La connaissance acquise à chaque étape est un appui pour la construction d'une nouvelle connaissance, mais aussi un obstacle à cette construction. Les obstacles épistémologiques ne sont pas des accidents de parcours à éliminer des processus d'apprentissage, au contraire, ils participent à la construction du savoir de l'élève. Les obstacles seront franchis grâce à la proposition par l'enseignant d'un nouveau contexte problématique qui oblige à repenser le savoir déjà construit. L'intervention de l'enseignant est ici déterminante car c'est grâce à elle que les élèves construisent des champs de concepts et non des savoirs ponctuels et isolés, et que les enseignants peuvent "traiter le programme".

A chaque étape de la construction du savoir mathématique, les concepts sont rectifiés, les démonstrations sont modifiées, les outils s'améliorent. Peu à peu les théories construites s'accordent à d'autres théories déjà construites et les défis de la construction théorique se font sentir.

2. L'appropriation du savoir mathématique

"*Le vrai problème qu'a à affronter l'enseignement des mathématiques n'est pas le problème de la rigueur mais le problème de la construction*

(4) *Rôle des problèmes dans l'histoire et l'activité mathématique* : actes du colloque inter-IREM de Montpellier, 1985.

(5) G.E.M., Dialogue n° 54 bis.

du sens" écrit René Thom. La question justement soulevée est l'absence de sens et de signification du savoir mathématique chez les élèves et même chez les enseignants. L'enseignement traditionnel des mathématiques donne des réponses à des questions qui ne sont jamais posées, or les concepts et les théories mathématiques ne prennent sens que par rapport aux questions et aux problèmes qu'ils permettent de résoudre. Nous retrouvons ici la nécessité pour l'enseignement d'une conception instrumentale des mathématiques (6), à opposer à un enseignement qui se réduit au discours mathématique — voire au vocabulaire mathématique —. Il est primordial de distinguer, comme le fait le G.E.M., le sens *lexical* d'un concept mathématique de son sens *contextuel*, c'est-à-dire de sa signification à l'intérieur d'une certaine théorie mathématique et dans un certain contexte problématique.

L'enseignement doit partir de problèmes, mais encore faut-il que les problèmes eux-mêmes présentent un sens pour l'élève. Comment l'élève peut-il être mis en situation de recherche vis-à-vis d'un problème ? A quelles conditions peut-il y avoir appropriation du savoir mathématique par l'élève ?

Le G.E.M. répond à ces questions en posant le principe suivant : *"l'enseignement doit partir (mais pas camper !) sur le terrain familier de l'élève et dans sa langue"* (7). Ce principe, comme on le voit dans ***L'Archipel des Isométries***, doit être mis en œuvre dès la formulation des problèmes. Il remet en cause un certain nombre de préjugés sur le rôle de l'évidence, de la rigueur et de l'erreur dans l'activité mathématique.

Pour qu'il y ait appropriation du savoir mathématique par l'élève, il ne faut pas nier l'évidence de l'élève ou la rejeter de l'enseignement. *"L'évidence étant partie du sujet, il s'agit de comprendre comment elle intervient, quels savoirs elle apporte et quels obstacles elle oppose à la constitution de nouveaux savoirs. La réintégration du sujet dans l'acte de connaissance est liée à cette prise en compte de l'évidence, c'est-à-dire du savoir déjà présent pour l'approfondir, le transformer ou le dépasser"* (8). A cette condition, il n'y aura pas concomitance dans l'esprit de l'élève entre un savoir absolu et vrai et un savoir quotidien et faux, il y aura transformation du savoir de l'élève.

De même, la rigueur ne doit pas apparaître comme un absolu extérieur à l'élève, comme un ensemble de règles a priori dont l'élève ne voit pas la signification. La rigueur est relative à l'état des connaissances de l'élève et au contexte problématique dans lequel elle intervient. La rigueur n'a de sens que par rapport aux erreurs qu'elle permet d'éviter ou à un

(6) CHARLOT, *Les contenus non mathématiques de l'enseignement des mathématiques.*

(7) G.E.M. Dialogue n° 54 bis.

(8) BKOUCHE, *Euclide, Klein, Hilbert et les autres.*

certain nombre d'objectifs de clarté nécessaires à la résolution d'un problème ou à la communication des résultats dans la classe.

Si on admet que la construction du savoir mathématique passe par la recherche des élèves et que les obstacles épistémologiques rencontrés dans cette construction sont des parties intégrantes de cette construction, alors il faudra dire avec Bachelard : *"Erreur tu n'es pas un mal (...) erreur positive, erreur normale, erreur utile"*. En effet, il ne peut y avoir recherche s'il n'y a pas doute et erreur car leur présence appelle la recherche du savoir et leur reconnaissance révèle la portée du savoir.

Toutes ces conditions sont nécessaires pour qu'il y ait appropriation du savoir mathématique par l'élève mais sont insuffisantes, car la condition essentielle pour que l'élève s'investisse dans la recherche mathématique — comme dans toute activité intellectuelle — est qu'il s'en sente capable et qu'il soit considéré .

Cela implique à la fois maîtrise des contenus et maîtrise des méthodes pédagogiques, car le maître doit être capable de laisser libre cours aux recherches des élèves tout en sachant faire alterner les moments de recherche et les moments de synthèse.

Ce type d'enseignement remet aussi en cause les fonctions et les fonctionnement du contrôle des connaissances, car si certaines erreurs, nous l'avons vu, ont un sens, d'autres n'en ont pas.

La re-construction de la théorie que les enseignants sont amenés à élaborer nécessite de bonnes connaissances et une prise de conscience des obstacles épistémologiques — par observation des élèves et/ou par une étude historique et épistémologique des mathématiques —. L'appropriation du savoir mathématique par les élèves suppose aussi que les enseignants portent un autre regard sur les élèves : élèves capables de chercher, élèves capables de construire, élèves capables de faire des mathématiques.

Evelyne BARBIN
Université du Maine

Orientations bibliographiques

G.E.M., *L'archipel des isométries. Essai de redécouverte,* Louvain la Neuve, 1982.

G.E.M., *Une géométrie pour tous les jours,* Louvain la Neuve, 1980.

G.E.M., *Lettre au G.F.E.N.,* Dialogue n° 54 bis, 1985.

BACHELARD, *La formation de l'esprit scientifique,* Vrin, Paris, 1967.

CHARLOT, *Les contenus non mathématiques de l'enseignement des mathématiques,* Bulletin de l'IREM de Nantes n° 7, 1978.

BKOUCHE, *Euclide, Klein, Hilbert et les autres,* in *La rigueur et le calcul,* CEDIC, Paris, 1982.

BKOUCHE et SOUFFLET, *Axiomatique, formalisme, théorie,* Bulletin inter-IREM n° 23, 1983.

BKOUCHE, *De l'enseignement de la géométrie,* Colloque C.I.E.M. du Mans, 1982.

DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Hermann, Paris, 1964.

CLAIRAUT, *Eléments de géométrie,* Gauthier-Villars, Paris, 1920.

LAKATOS, *Preuves et réfutations,* Hermann, Paris, 1984.

BOUVIER, *La mystification mathématique,* Hermann, Paris, 1981.

IREM de LYON, *La pratique du problème ouvert,* 1984.

La place du problème dans l'enseignement des mathématiques, actes du colloque inter-IREM des 21-22 mai 1982.

IREM de MONTPELLIER, *Rôle des problèmes dans l'histoire et l'activité mathématique,* actes du colloque inter-IREM des 31 mai/1er juin 1985.