études

arcs de cercle à tangente rationnelle et entiers imaginaires premiers

par J.P. Friedelmeyer
LET Couffignal, Strasbourg

Le numéro spécial du Petit Archimède consacré au nombre π présente à deux reprises (p. 154 et p. 201) des relations utilisées pour le calcul des décimales de π. On trouve ainsi, entre autres :

$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3}$ (Hutton 1776)

$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{5} + \text{Arctan}\frac{1}{8}$ (Strassnitzky 1840)
(aussi attribuée à DASE)

$\frac{\pi}{4} = 4\ \text{Arctan}\frac{1}{5} - \text{Arctan}\frac{1}{239}$ (Machin 1706)

$\frac{\pi}{4} = 6\ \text{Arctan}\frac{1}{8} + 2\ \text{Arctan}\frac{1}{57} + \text{Arctan}\frac{1}{239}$ (Störmer 1896)

$\frac{\pi}{4} = 5\ \text{Arctan}\frac{1}{7} + 2\ \text{Arctan}\frac{3}{79}$ (Euler 1775)

On peut s'interroger sur la façon dont ces relations ont été trouvées, et sur la possibilité d'en trouver d'autres. L'idée de base est évidemment la formule d'addition classique :

(1) $\quad \text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab} + k\pi \quad$ pour $\quad ab \neq 1$

où $k=0$ si $ab<1$

$k=1$ si $ab>1$ avec $a>0$ et $b>0$

$k=-1$ si $ab>1$ avec $a<0$ et $b<0$.

Cette relation est complétée par

$\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{a} = (\text{sign}\, a)\, \dfrac{\pi}{2}$ lorsque $ab=1$.

Nous nous limiterons dans la suite aux expressions de la forme $\text{Arctan}\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels. $0<p<q$

(si $0<q<p$ $\text{Arctan}\, \dfrac{p}{q} = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\dfrac{q}{p}$)

Alors convient la formule (1) avec $k=0$.

A. Un premier cas simple est la détermination de toutes les solutions

$(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s})$ p, q, r, s entiers vérifiant $\quad 0<p<q$

(p, q) premiers entre eux $\quad 0<r<s$

(r, s) premiers entre eux

et
$$\text{Arctan}\, \frac{p}{q} + \text{Arctan}\, \frac{r}{s} = \frac{\pi}{4}$$

Cette relation est équivalente à
$$\text{Arctan}\, \frac{r}{s} = \text{Arctan}\, 1 - \text{Arctan}\, \frac{p}{q} = \text{Arctan}\, \frac{q-p}{q+p}$$

On a donc, quels que soient les entiers p et q vérifiant $0<p<q$:

(2)
$$\text{Arctan}\, \frac{p}{q} + \text{Arctan}\, \frac{q-p}{p+q} = \frac{\pi}{4}$$

Par exemple :

$p=1$; $q=2$ $\qquad \text{Arctan}\, \dfrac{1}{2} + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

$p=5$; $q=7$ $\qquad \text{Arctan}\, \dfrac{5}{7} + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{6} = \dfrac{\pi}{4}$

$p=1$; $q=10$ $\qquad \text{Arctan}\, \dfrac{1}{10} + \text{Arctan}\, \dfrac{9}{11} = \dfrac{\pi}{4}$

Remarque : la relation reste vraie pour p, q réels positifs quelconques tels que $0<p<q$: par exemple

$p=1$; $q=\sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{Arctan}\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \text{Arctan}\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\pi}{4}$

d'où $\text{Arctan}\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \text{Arctan}\ (2-\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{12}$.

Après cela, on peut déterminer d'autres relations à deux termes en combinant la relation (2) avec celles-ci, valables pour x vérifiant $|x| < \tan \dfrac{\pi}{2K}$ donc en particulier pour $x=\dfrac{1}{n}$, n entier tel que $\dfrac{1}{n} < \tan \dfrac{\pi}{2K}$, K étant le coefficient de Arctan x dans le 1[er] membre.

$$2\ \text{Arctan}\ x = \text{Arctan}\ \frac{2x}{1-x^2}$$

$$3\ \text{Arctan}\ x = \text{Arctan}\ \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

$$4\ \text{Arctan}\ x = \text{Arctan}\ \frac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}$$

$$5\ \text{Arctan}\ x = \text{Arctan}\ \frac{5x-10x^3+x^5}{1-10x^2+5x^4}$$

$$6\ \text{Arctan}\ x = \text{Arctan}\ \frac{6x-20x^3+6x^5}{1-15x^2+15x^4-x^6}$$

Le principe est de déterminer un $n\in\mathbf{N}^*$ et un $k\in\mathbf{N}^*$ tels que $k\ \text{Arctan}\ \dfrac{1}{n}$ soit proche de $\dfrac{\pi}{4}$ puis de compléter.

Exemple 1 : $\qquad 4\ \text{Arctan}\ \dfrac{1}{5} = \text{Arctan}\ \dfrac{120}{119} = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\ \dfrac{119}{120}$

et (2) : $\qquad \text{Arctan}\ \dfrac{119}{120} + \text{Arctan}\ \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

d'où la formule citée de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\ \text{Arctan}\ \frac{1}{5} - \text{Arctan}\ \frac{1}{239}$$

Exemple 2: $\qquad 5\ \text{Arctan}\ \dfrac{1}{7} = \text{Arctan}\ \dfrac{2879}{3353}$

$\dfrac{2879}{3353}$ est irréductible car 2879 est premier :

par (2) $\qquad \dfrac{\pi}{4} = \text{Arctan}\ \dfrac{2879}{3353} + \text{Arctan}\ \dfrac{237}{3116}$

or $\qquad \text{Arctan}\ \dfrac{237}{3116} = 2\ \text{Arctan}\ \dfrac{3}{79}$ (voir Ex. 3 en fin d'article, §D) d'où la formule citée d'Euler

$$\frac{\pi}{4} = 5 \text{ Arctan } \frac{1}{7} + 2 \text{ Arctan } \frac{3}{79}$$

Exemple 3 : $\quad 3 \text{ Arctan } \frac{1}{4} = \text{Arctan } \frac{47}{52} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan } \frac{5}{99}$

avec $\quad \text{Arctan } \frac{55}{99} - \text{Arctan } \frac{1}{20} = \text{Arctan } \frac{1}{1985}$

Nous avons la formule de Störmer (1896) :

$$\frac{\pi}{4} = 3 \text{ Arctan } \frac{1}{4} + \text{Arctan } \frac{1}{20} + \text{Arctan } \frac{1}{1985}$$

(il y a d'ailleurs une erreur dans la formule de Störmer citée par le Petit Archimède p. 210, qui donne 1988 au lieu de 1985).

B. Tout cela reste assez empirique, et sans direction ni méthode précise. Une recherche plus systématique consiste à résoudre en nombres entiers positifs

(3) $$\text{Arctan } \frac{1}{x} + \text{Arctan } \frac{1}{y} + \text{Arctan } \frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}$$

On peut supposer $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$ et alors $x \leqslant 3$ à cause de $3 \text{ Arctan } \frac{1}{4} < \frac{\pi}{4}$ $\left(3 \text{ Arctan } \frac{1}{4} = \text{Arctan } \frac{47}{52}\right)$.

Cela revient à résoudre dans $\mathbf{N}^2$

soit, pour $x=2$: $\dfrac{z+y}{zy-1} = \dfrac{1}{3}$ ou $yz - 3(y+z) = 1$

soit, pour $x=3$: $\dfrac{z+y}{zy-1} = \dfrac{1}{2}$ ou $yz - 2(y+z) = 1$

En remarquant que $4yz = (y+z)^2 - (y-z)^2$, en posant $u = y+z$; $v = y-z$, on est ramené à résoudre

soit $u^2 - v^2 - 12u = 4$ ou $(u-6)^2 - v^2 = 40$ et, avec $w = u-6$: $(w-v)(w+v) = 40$ qui n'est possible qu'avec $w-v=2$ et $w+v=20$ ou $w-v=4$ et $w-v=10$; ce qui donne les solutions

$$y=15,\ z=4 \quad \text{ou} \quad y=8,\ z=5 .$$

soit $u^2 - v^2 - 8u = 4$ ou $(u-4)^2 - v^2 = 20$ et, avec $w = u-4$: $(w-v)(w+v) = 20$ qui n'est possible qu'avec $w-v=2$ et $w+v=10$; ce qui donne la seule solution $y=3$; $z=7$.

D'où trois solutions (et trois seulement) à l'équation (3) :

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan } \frac{1}{2} + \text{Arctan } \frac{1}{5} + \text{Arctan } \frac{1}{8}$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{13}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \text{Arctan}\,\frac{1}{7}\,.$$

Pour introduire la suite, avec l'aspect le plus intéressant de ces sommes, il nous faut revenir à la formule (1), appliquée à des rationnels $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ positifs, inférieurs à 1.

On a : $\quad \text{Arctan}\,\frac{p}{q} + \text{Arctan}\,\frac{r}{s} = \text{Arctan}\,\frac{ps+qr}{qs-pr}\,.$

Or, on vérifie facilement l'identité $(p^2+q^2)(r^2+s^2) = (ps+qr)^2 + (qs-pr)^2$.

Celle-ci va nous permettre de traiter la question sous une forme nouvelle et plus riche potentiellement : au lieu d'additionner des Arctan, cherchons à décomposer un arc à tangente rationnelle, en somme d'arcs du même type. Mais pour cela, nous sommes obligés de faire d'abord un petit détour par l'arithmétique et la théorie des nombres.

C. Décomposition d'un entier en somme de deux carrés

(Voir à ce sujet, par exemple, le *Que sais-je ?* sur les nombres premiers par Emile Borel - chap. V et VI).

Trois théorèmes importants :

1) Le produit de la somme de deux carrés par la somme de deux carrés est la somme de deux carrés.

En effet : $\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

mais aussi : $\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$

Par exemple : $5 = 2^2+1^2 \qquad 17 = 4^2+1^2$

$5 \times 17 = 85 = 9^2+2^2 + 7^2+6^2$

2) Si un nombre premier divise la somme de deux carrés premiers entre eux, il est lui-même la somme de deux carrés, premiers entre eux.

Par exemple : $29^2+57^2 = 4090 = 10 \times 409$

409 est premier $\qquad 409 = 20^2+3^2$

3) Tout nombre premier de la forme $4n+1$ est la somme de deux carrés, et cette décomposition est alors unique, à l'ordre près.

Les nombres premiers de la forme $4n+3$ ne sont pas décomposables en somme de deux carrés.

Nombres premier imaginaires

Les démonstrations sur ces résultats d'arithmétique sont grandement facilitées par l'utilisation des nombres complexes, de la forme $a+bi$, $(a,b)\in\mathbf{Z}^2$ appelés aussi entiers de Gauss.

L'ensemble G des entiers de Gauss est un anneau principal auquel par conséquent s'applique intégralement la théorie des diviseurs, du P.G.C.D., etc. En particulier, un entier de Gauss sera dit premier s'il n'admet d'autre diviseur que 1 et lui-même. Il y a trois sortes de nombres premiers dans G :

1) les nombres premiers réels de la forme $4n+3$
2) les nombres imaginaires $a\mp ib$ tels que $a^2+b^2=4n+1$
3) les nombres $\mp 1 \mp i$ qui sont les diviseurs (au sens complexe) de 2.

Alors tout nombre réel entier N se décompose de façon unique en produit de nombres premiers complexes, produit dont on peut regrouper les termes sous la forme :

$$\mathrm{N} = \mathrm{K}(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\ \dots\ (a_n^2+b_n^2) = \mathrm{K}m$$

où K rassemble les nombres premiers de la forme $4n+3$ ainsi que les produits du type $(a_k+ib_k)^{2c}(a_k-ib_k)^{2c}$ qui sont réels, et *puissances paires* de nombres premiers de la forme $(4n+1)$. Il reste

$m=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\ \dots\ (a_n^2+b_n^2)$ avec $a_k^2+b_k^2 = (a_k+ib_k)(a_k-ib_k)$ premiers

On démontre qu'il y a autant de décompositions *distinctes* de m en somme de deux carrés qu'il y a de paire $\{\mathrm{A}_k, \mathrm{B}_k\}$ *distinctes* obtenues en prenant :

— un facteur (a_1+ib_1) ou (a_1-ib_1) dans $a_1^2+b_1^2$
— un facteur (a_2+ib_2) ou (a_2-ib_2) dans $a_2^2+b_2^2$ etc.
— un facteur (a_k+ib_k) ou (a_k-ib_k) dans $a_k^2+b_k^2$

et en les multipliant pour obtenir un entier complexe $\mathrm{A}_k+i\mathrm{B}_k$.

Exemple : $m=2\times 17\times 29=986$ or $2=1^2+1^2$; $17=4^2+1^2$

$29=5^2+2^2$ donc

$m=(1+i)(1-i)(4+i)(4-i)(5+2i)(5-2i)$.

Il y a huit groupements possibles qui sont les quatre suivants, plus leurs conjugués :

$$\left.\begin{aligned}(1+i)(4+i)(5+2i) &= 5+31i\\ (1+i)(4+i)(5-2i) &= 25+19i\\ (1+i)(4-i)(5+2i) &= 19+25i\\ (1+i)(4-i)(5-2i) &= 31+5i\end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Cela nous donne pour m deux décompositions :

$$986 = 31^2+5^2 = 19^2+25^2 .$$

D. Application à la décomposition de Arctan $\frac{A}{B}$

Chacune des relations (4) se traduit immédiatement par une relation en Arctan, que l'on peut vérifier :

$$\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{4} + \text{Arctan}\,\frac{2}{5} = \text{Arctan}\,\frac{31}{5}$$

$$\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{4} - \text{Arctan}\,\frac{2}{5} = \text{Arctan}\,\frac{19}{25}$$

et deux autres analogues. Pourquoi ?

Première approche

On a les relations :

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ et

$\text{Arctan}\,\frac{a}{b} + \text{Arctan}\,\frac{c}{d} = \text{Arctan}\,\frac{ad+bc}{bd-ac}$.

Ainsi : $(2^2+1)(3^2+2^2) = 5\times 13 = 65 = 8^2+1 = 7^2+4^2$

donne : $\text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{2}{3} = \text{Arctan}\,\frac{7}{4}$.

La difficulté vient du fait qu'on ne sait pas directement à quel nombre $\mp$ Arctan $\frac{1}{8}$; $\mp$ Arctan 8 ; $\mp$ Arctan $\frac{4}{7}$; $\mp$ Arctan $\frac{7}{4}$ associer la somme Arctan $\frac{1}{2}$ + Arctan $\frac{2}{3}$ par exemple.

Le détour par les entiers complexes permet de lever cette difficulté.

Soit à décomposer Arctan $\frac{B}{A}$ en somme d'arcs à tangente rationnelle (A et B entiers ; $A \neq 0$).

A^2+B^2 étant déjà une somme de carrés, n'aura pas de facteurs premiers de la forme $4n+3$ (Théorème 2 du § C).

Comme $z = \dfrac{x+iy}{x-iy} = \dfrac{1+i\frac{y}{x}}{1-i\frac{y}{x}}$ a pour Argument 2 Arctan $\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$.

L'égalité $A+iB = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ \ldots\ (a_h+ib_h)$ entraîne

$$\frac{A+iB}{A-iB} = \left(\frac{a_1+ib_1}{a_1-ib_2}\right)\left(\frac{a_2+ib_2}{a_2-ib_2}\right)\cdots\left(\frac{a_h+ib_h}{a_h-ib_h}\right)$$

donc aussi $\text{Arg}\left(\dfrac{A+iB}{A-iB}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=h} \text{Arg}\left(\dfrac{a_k+ib_k}{a_k-ib_k}\right)$

d'où $\text{Arctan}\,\dfrac{B}{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=h} \text{Arctan}\,\dfrac{b_k}{a_k}$ $(a_k \neq 0$ pour tout $k)$.

Exemple 1 :

Soit $\text{Arctan}\,\frac{1}{13}$ $\quad m = 13^2 + 1^2 = 170 = 2 \times 5 \times 17$ $\quad 2 = 1^2 + 1^2$

$m = (1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(4+i)(4-i)$ $\quad 5 = 2^2 + 1^2$

$17 = 4^2 + 1$

Deux décompositions *distinctes* possibles données par

$$(1+i)(2+i)(4+i) = 1 + 13i$$
$$(1+i)(2+i)(4-i) = 7 + 11i$$

engendrent deux relations en Arctan :

$$\text{Arctan}\,1 + \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{4} = \text{Arctan}\,13 = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{13}$$

ou encore

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} + \text{Arctan}\,\frac{1}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{13}$$

mais aussi

$$\text{Arctan}\,1 + \text{Arctan}\,\frac{1}{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{4} = \text{Arctan}\,\frac{11}{7} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,\frac{7}{11}$$

donc

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{4} + \text{Arctan}\,\frac{7}{11}$$

Exemple 2

Déterminer $\frac{p}{q}$ rationnel tel que

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \text{Arctan}\,\frac{1}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{5} + \text{Arctan}\,\frac{1}{50} + \text{Arctan}\,\frac{p}{q}$$

Il suffit pour cela de faire intervenir le produit

$$(1-i)(3+i)(4+i)(5+i)(50+i) = 4702 - 6i$$

d'où $\quad \frac{p}{q} = \frac{6}{4702} = \frac{3}{2351}$ et

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \text{Arctan}\,\frac{1}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{5} + \text{Arctan}\,\frac{1}{50} + \text{Arctan}\,\frac{3}{2351}$$

et comme $\left[\frac{2351}{3}\right] = 783$

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\frac{1}{3} + \text{Arctan}\frac{1}{4} + \text{Arctan}\frac{1}{5} + \text{Arctan}\frac{1}{50} + \text{Arctan}\frac{1}{784} + \text{Arctan}\frac{1}{1843187}$$

Exemple 3

L'exemple 2 du premier paragraphe donne $\text{Arctan}\,\frac{237}{3116} = 2\,\text{Arctan}\,\frac{3}{79}$, ce qui peut évidemment se vérifier a posteriori en appliquant

$$2\,\text{Arctan}\,x = \text{Arctan}\,\frac{2x}{1-x^2}.$$

Mais comment l'établir a priori ? La méthode précédente nous en donne l'explication. En effet

$$237^2+3116^2 = 9765625 = 3125^2 = 5^{10}$$
$$5=2^2+1 \quad \text{d'où} \quad 5^2=4^2+3^2 \quad 5^4=24^2+7^2 .$$

Chacune de ces trois décompositions est unique.

$$5^5 = (24^2+7^2)(2^2+1) = \begin{matrix} 38^2+41^2 \\ 10^2+55^2 \end{matrix}$$

Gardons 38^2+41^2 à cause de $41-38=3$ et $41+38=79$.
3125^2 peut se décomposer soit en $(38+41i)^2(38-41i)^2$, soit en $(38+41i)(38-41i)(41+38i)(41-38i)$. Le seul produit donnant $3116+237i$ est $(38+41i)(41-38i)$ d'où la relation :

$$\text{Arctan}\ \frac{237}{3116} = \text{Arctan}\ \frac{41}{38} - \text{Arctan}\ \frac{38}{41} \qquad \text{(relation (2) § A)}$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\ \frac{3}{79}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\ \frac{3}{79}\right)$$
$$= 2\ \text{Arctan}\ \frac{3}{79}$$

Mais on peut remarquer aussi que :

$$38+41i = (-2+i)^5 \quad \text{et} \quad 41-38i = (1+2i)^5$$
$$= -(2-i)^5 \quad \text{facteurs premiers de } 3125^2$$

qui donnent :

$$\text{Arctan}\ \frac{237}{3116} = -\pi+5\ \text{Arctan}\ 2-5\ \text{Arctan}\ \frac{1}{2}$$

ou encore : $10\ \text{Arctan}\ \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{2} - \text{Arctan}\ \frac{237}{3116}$

donc : $\quad 20\ \text{Arctan}\ \frac{1}{2} + 4\ \text{Arctan}\ \frac{3}{79} = 3\pi$

E. Un peu d'histoire

C'est bien sûr Gauss qui a le premier utilisé ces méthodes pour trouver des formules en Arctangente. Calculateur infatigable, il construit des tables de décomposition en facteurs premiers de la forme $4n+1$ des nombres a^2+1, a^2+4, ... a^2+81 pour tous les cas où les facteurs intervenant sont inférieurs à 200, et pour les valeurs de a allant de 2 jusqu'à des nombres de l'ordre de 10^8 ou 10^{11} selon les cas.

Le but essentiel de ces tables était pour Gauss de rendre plus facile le calcul des arcs à tangente rationnelle, calcul qu'il désignait par le vocable "Cyklotechnie". Voici un exemple d'un tel calcul, trouvé dans les manuscrits de Gauss. Il y désigne par

[2], [5], [13], [17], [29], [37], [41], [53], [64], ... [197] et (18), (57), (239), $\left(\frac{79}{3}\right)$ ...

les Arccotan $x = \text{Arctan}\frac{1}{x}$ pour x égal à

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ 4,\ \frac{5}{2},\ 6,\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{2},\ \frac{6}{5},\ \ldots\ 14 \quad \text{et} \quad 18,\ 57,\ 239,\ \frac{79}{3},\ \ldots$$

A l'aide des tables, il obtient par décomposition de $18+i$, $57+i$, $239+i$ en facteurs complexes premiers :

$$\begin{aligned}(18) &= [2]\times 2 - 2[5] - [13]\\ (57) &= -[2] + 3[5] - [13]\\ (239) &= 3[2] \qquad\quad - 4[13]\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}[2] &= 12(18) + 8(57) - 5(239)\\ [5] &= 7(18) + 5(57) - 3(239)\\ [13] &= 9(18) + 6(57) - 4(239)\end{aligned}$$

plus loin, à l'aide des tables :

$$\begin{aligned}(268) &= -2[5] + 2[13] - [17]\\ (38) &= -[5] \qquad + 2[17]\end{aligned}$$

et par élimination de [17] et introduction des valeurs de [5] et [13] obtenues plus haut $(38) + 2(268) = (18) - (57) - (239)$.
D'où les deux très belles formules de Gauss :

$$\frac{\pi}{4} = 12\ \text{Arctan}\frac{1}{18} + 8\ \text{Arctan}\frac{1}{57} - 5\ \text{Arctan}\frac{1}{239}$$

et $$\frac{\pi}{4} = 12\ \text{Arctan}\frac{1}{38} + 20\ \text{Arctan}\frac{1}{57} + 7\ \text{Arctan}\frac{1}{239} + 24\ \text{Arctan}\frac{1}{268}$$

par élimination de (18).

F. L'algorithme de Todd

En 1946, J.C.P. Miller, engagé dans la tabulation de $\ln\Gamma(x+iy)$ utilisa la relation

$$\ln\Gamma(x+iy+1) = \ln(x^2+y^2) + i\ \text{Arctan}\frac{y}{x} + \ln\Gamma(x+iy)$$

pour déplacer l'argument dans une région où son développement en série converge avec une rapidité suffisante. Il eut besoin, pour ce faire, de tables d'$\text{Arctan}\left(\frac{a}{b}\right)$ et souleva la question de l'existence d'une décomposition de

Arctan(n) en combinaison linéaire d'Arctan(p) avec $p<n$ pour un entier positif n quelconque. La réponse complète à cette question, ainsi que la construction d'un algorithme donnant la décomposition éventuelle ont été fournis par John Todd dans un article publié dans l'American Math. Monthly 56 (1949), p. 517-528, dont voici les résultats essentiels :

Définition : Nous dirons que Arctan(n) est indécomposable s'il ne peut pas être exprimé comme somme finie de la forme

$$\text{Arctan}\,(n) = \sum f_r\,.\,\text{Arctan}\,(n_r)$$

où les f_r sont des entiers (positifs ou négatifs) et les n_r des entiers positifs strictement inférieurs à n. Si une telle représentation existe, nous dirons que Arctan (n) est décomposable.

Théorème A : Arctan (n) est décomposable si et seulement si tout diviseur premier de $1+n^2$ est aussi un diviseur premier de $1+d^2$ pour $d=1,2,\ldots,n-1$.

Théorème B : Arctan (n) est décomposable si et seulement si le plus grand facteur premier de $1+n^2$ est inférieur strictement à $2n$.

L'algorithme de Todd

Soit $n \geqslant 2$ vérifiant une telle condition. Il suffit d'exprimer $1+in$ comme produit d'un nombre réel et d'entiers complexes de la forme $(1+iw_r)$ avec $0<w_r<n$.

Commençons par décomposer $1+in$ comme produit de facteurs complexes premiers. Soit $u+iv$ celui de ces facteurs de plus grand module et n'étant pas de la forme $(1+iw_r)$ ou associée*.

Supposons que ce facteur se présente avec l'exposant $f \geqslant 1$ donc que

(5) $$1+in=(u+iv)^f\,(c+id).$$

Considérons alors l'équation d'inconnues a et b, où w reste à définir :

(6) $$(u+iv)(a+ib) = 1+iw$$

ou (7) $$au-bv=1 \qquad \text{et} \qquad av+bu=w\,.$$

Observons qu'il est possible de choisir a et b tels que $|w|<n$. Comme u^2+v^2 est un facteur premier de $1+n^2$, il est aussi un facteur premier de $1+d^2$ pour $d<n$ d'après le théorème A. Todd avait démontré dans un lemme que dans ces conditions $u+iv$ est un facteur de $1\mp id$. Nous pouvons certainement déterminer a et b pour que $w=\mp d$ et donc $|w|=d<n$.

Procédons alors de la façon suivante.

Multiplions (1) par $(a^2+b^2)^f$ pour obtenir

$$(1+in)(a^2+b^2)^f = (1+iw)^f(a-ib)^f(c+id)$$

* Deux entiers de Gauss sont associés si leur rapport est une unité, c'est-à-dire ∓ 1 ou $\mp i$.

et recommençons l'opération avec un nouveau facteur premier $u_1 + iv_1$ tel que

$$(a-ib)^f(c+id) = (u_1+iv_1)^f\,(c+id_1).$$

Après un nombre fini d'étapes, nous arriverons à une relation de la forme :

$$(1+in)\prod(a_r^2+b_r^2) = \prod(1+iw_r)^{f_r}$$

et la décomposition de Arctan(n) en découle en prenant les arguments des deux membres :

$$\text{Arctan}(n) = \sum f_r \,\text{Arctan}\,(w_r)\,.$$

Exemple 1 : Soit à décomposer Arctan (515)

La décomposition est possible car $515^2+1=2\times13\times101^2$ et $101<2\times515$.

On a $\quad 1+515i = (1-5i)(1+10i)^2$.

Ici aucun calcul n'est nécessaire car la décomposition en facteurs premiers est tout de suite de la forme souhaitée et donc

$$\text{Arctan}\,(515) = 2\,\text{Arctan}\,10 - \text{Arctan}\,5\,.$$

Exemple 2 : Décomposons Arctan (682)

$$682^2+1 = 5^3\,61^2$$
$$1+682i = (1+2i)^3(5-6i)^2$$

Cherchons a, b et w tels que

$$(5-6i)(a+ib) = 1+iw \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} 5a+6b=1 \\ -6a+5b=w \end{array}\right.$$

dont les solutions sont :

$$a=-1+6k \qquad b=1+5k \qquad w=11-11k\,.$$

Choisissons $a=-1 \quad b=1 \quad w=11$

$$(1+682i)(2^2) = (1+11i)^2(-1-i)^2(1+2i)^3$$

d'où la décomposition

$$\text{Arctan}\,(682) = 2\,\text{Arctan}\,(11) + 3\,\text{Arctan}\,2 - \frac{3\pi}{2}$$

En pratique, si l'on dispose d'une table de décomposition en facteurs premiers de $1+n^2$ comme celle de Gauss (voir en annexe), on peut aller beaucoup plus vite. Soit à décomposer par exemple Arctan 100.

La table nous donne	$100^2+1=73\times137$
et	$27^2+1=2\times5\times73 \qquad 37^2+1=2\times5\times137$
d'où	$(1+100^2)\,100=(1+27^2)(1+37^2)$

Donc les composantes de Arctan (100) sont Arctan (27) et Arctan (37) avec les coefficients ∓1 complétés par un multiple de $\frac{\pi}{4}$.

Ainsi $\quad 10(1+100i) = (1+27i)(37+i)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = (1+27i)(1-37i)\times i$

d'où la relation $\quad \text{Arctan } 100 = \text{Arctan } (27) - \text{Arctan } (37) + \dfrac{\pi}{2}.$

On trouvera en annexe la décomposition de Arctan(n) pour n inférieur à 100.

Une dernière remarque pour terminer. Le lecteur peut s'étonner que l'on prenne toujours $\dfrac{\pi}{4}$ comme Arc à décomposer en somme (finie) d'arcs à tangente rationnelle. Il se trouve que c'est le seul qui soit ainsi décomposable, avec ses multiples. Par contre, on pourrait décomposer pareillement $\dfrac{\pi}{3}$ en somme d'Arctan $\dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ en utilisant une décomposition des entiers à l'aide d'entiers premiers de la forme $3a^2+b^2$, définis à partir de l'anneau des nombres $(a+ib\sqrt{3})$ a et b entiers. (Pour la possibilité et l'unicité d'une telle décomposition, voir, par exemple, *Théorie des nombres par Borevitch et Chafarevitch* - Gauthier-Villars - Chap. III).

Exemple : $$\frac{\pi}{6} = \text{Arctan } \frac{\sqrt{3}}{2} - \text{Arctan } \frac{\sqrt{3}}{9}$$

en relation avec
$$7 = 3\times 1^2+2^2$$
$$12 = 3\times 1^2+3^2$$
$$84 = 7\times 12 = 3\times 1^2+9^2$$

et l'identité
$$(3a^2+b^2)(3\alpha^2+\beta^2) = 3(a\beta-\alpha b)^2+(3a\alpha+b\beta)^2$$

Annexe 1

Pour simplifier les notations, Arctan(n) est remplacé par (n).

$(3) = 3(1)-(2)$
$(7) = -(1)+2(2)$
$(8) = 5(1)-(2)-(5)$
$(13) = 5(1)-(2)-(4)$
$(17) = (1)+2(2)-(12)$
$(18) = 3(1)-2(2)+(5)$
$(21) = 2(1)+(4)-(5)$
$(30) = 7(1)-(2)-(4)-(23)$
$(31) = 2(1)+(5)-(5)$
$(32) = (1)+2(2)-(9)$
$(38) = -(2)+2(4)$
$(41) = (1)-2(2)+2(12)$
$(43) = 3(1)-2(2)+(6)$
$(46) = 3(1)+2(2)-(12)-(27)$
$(47) = 4(1)+(2)-(4)-(5)$
$(50) = 2(1)+(9)-(11)$
$(55) = 4(1)+(4)-(5)-(34)$
$(57) = -4(1)+3(2)+(5)$
$(68) = 8(1)-3(2)-(6)$
$(70) = -2(1)-(2)+2(5)+(12)$
$(72) = -3(1)+(2)+(4)+(11)$
$(73) = 7(1)-(2)-(5)-(9)$
$(75) = 3(1)+2(2)-(12)-(22)$
$(76) = 2(1)+(23)-(33)$
$(83) = 5(1)-2(2)+(5)-(23)$
$(91) = 2(1)+(9)-(10)$
$(93) = 5(1)-2(2)+(6)-(80)$
$(98) = 7(1)-(2)-(4)-(15)$
$(99) = 5(1)-(2)-2(5)+(12)$
$(100) = 2(1)+(27)-(37)$

Annexe2

Table de décomposition de $a^2 + 1$ en facteurs premiers par Gauss (extrait)

Bibliographie

Supplément au Petit Archimède n° 64-65. Numéro spécial.

C.G.F. GAUSS Werke 2 (1836-1876), p. 477, 523.

John TODD, *A problem on Arctangent Relations*, Am. Ma. Monthly 56 (1949), p. 517-528.

Emile BOREL, *Les nombres premiers*, "Que sais-je", P.U.F.

BOREVITCH-CHAFAREVITCH, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars.

SEROUL Raymond, *L'Ouvert* n° 45, Régionale A.P.M.E.P. de Strasbourg, que je remercie pour ses informations sur l'algorithme de Todd.

NACHLASS. ZERLEGBARE $aa+1$.

2	5	119	73.97	500	53.53.89	1341	73.109.113	3405	29.29.61.113
3	5	123	5.17.89	507	5.5.53.97	1385	41.149.157	3458	5.73.181.181
4	17	128	5.29.113	512	5.13.37.109	1393	5.5.197.197	3521	29.37.53.109
5	13	129	53.157	515	13.101.101	1407	5.5.17.17.137	3532	5.5.17.149.197
6	37	132	5.5.17.41	524	37.41.181	1432	5.5.5.5.17.193	3583	5.13.17.37.157
7	5.5	133	5.29.61	538	5.13.61.73	1433	5.29.73.97	3740	41.41.53.157
8	5.13	142	5.37.109	557	5.5.5.17.73	1467	5.29.41.181	3782	5.5.29.109.181
9	41	157	5.5.17.29	560	53.61.97	1477	5.13.97.173	3793	5.5.53.61.89
10	101	162	5.29.181	568	5.5.5.29.89	1560	17.37.53.73	3957	5.5.13.13.17.109
11	61	172	5.61.97	577	5.13.13.197	1567	5.41.53.113	4193	5.5.5.5.5.29.97
12	5.29	173	5.41.73	599	17.61.173	1568	5.5.5.13.17.89	4217	5.13.29.53.89
13	5.17	174	13.17.137	606	13.13.41.53	1597	5.37.61.113	4232	5.5.41.101.173
14	197	182	5.5.5.5.53	616	13.17.17.101	1607	5.5.13.29.137	4246	13.17.29.29.97
15	113	183	5.17.197	621	29.61.109	1636	17.29.61.89	4327	5.89.109.193
17	5.29	185	109.157	657	5.5.89.97	1744	137.149.149	4484	17.89.97.137
18	5.5.13	191	17.29.37	660	37.61.193	1772	5.17.17.41.53	4535	17.53.101.113
19	181	192	5.73.101	682	5.5.5.61.61	1818	5.5.5.137.193	4545	13.37.109.197
21	13.17	193	5.5.5.149	684	13.17.29.73	1823	5.17.113.173	4581	13.53.97.157
22	5.97	200	13.17.181	693	5.5.5.17.113	1832	5.5.17.53.149	4594	13.17.29.37.89
23	5.53	211	113.197	697	5.13.37.101	1893	5.5.13.37.149	4662	5.13.13.17.17.89
27	5.73	212	5.89.101	701	17.97.149	1918	5.5.37.41.97	4747	5.17.41.53.61
28	5.157	216	13.37.97	743	5.5.61.181	1929	13.13.101.109	4906	13.53.181.193
30	17.53	233	5.61.89	746	13.13.37.89	1955	13.29.37.137	4937	5.73.173.193
31	13.37	237	5.41.137	757	5.5.73.157	1984	13.29.53.197	4952	5.37.41.53.61
32	5.5.41	239	13.13.13.13	772	5.13.53.173	2010	13.17.101.181	5052	5.13.41.61.157
33	5.109	242	5.13.17.53	776	73.73.113	2013	5.29.89.157	5087	5.17.29.29.181
34	13.89	251	17.17.109	785	13.137.173	2018	5.5.29.41.137	5257	5.5.13.17.41.61
37	5.137	253	5.37.173	798	5.13.97.101	2042	5.29.149.193	5283	5.13.17.73.173
38	5.17.17	255	13.41.61	818	5.5.5.53.101	2059	13.41.41.97	5357	5.5.61.97.97
41	29.29	265	13.37.73	829	17.17.29.41	2153	5.13.181.197	5443	5.5.5.5.137.173
43	5.5.37	268	5.5.13.13.17	853	5.13.29.193	2163	5.13.17.29.73	5507	5.5.13.13.37.97
44	13.149	278	5.13.29.41	882	5.5.29.29.37	2191	89.149.181	5648	5.17.53.73.97
46	29.73	293	5.5.17.101	905	13.17.17.109	2309	13.53.53.73	5667	5.29.37.41.73
47	5.13.17	294	13.61.109	919	37.101.113	2350	17.17.97.197	5701	29.53.97.109
50	41.61	302	5.17.29.37	922	5.17.73.137	2428	5.41.149.193	5767	5.13.17.101.149
55	17.89	307	5.5.5.13.29	924	53.89.181	2436	13.13.13.37.73	5928	5.29.29.61.137
57	5.5.5.13	313	5.97.101	931	13.17.37.53	2515	101.173.181	5962	5.13.29.109.173
68	5.5.5.37	319	17.41.73	945	29.89.173	2540	13.29.109.157	6065	17.53.137.149
70	13.13.29	327	5.17.17.37	948	5.17.97.109	2547	5.37.89.197	6107	5.5.17.17.29.89
72	5.17.61	342	5.149.157	993	5.5.13.37.41	2621	13.37.37.193	6118	5.5.13.41.53.53
73	5.13.41	343	5.5.13.181	999	17.149.197	2673	5.13.17.53.61	6252	5.17.29.101.157
75	29.97	360	29.41.109	1032	5.5.13.29.113	2697	5.41.113.157	6481	17.37.173.193
76	53.109	378	5.17.41.41	1057	5.5.5.41.109	2738	5.13.29.41.97	6682	5.5.5.29.109.113
80	37.173	394	29.53.101	1067	5.17.37.181	2801	17.29.73.109	6898	5.13.17.17.17.149
81	17.193	401	37.41.53	1068	5.5.5.5.5.5.73	2818	5.5.5.17.37.101	6908	5.13.73.89.113
83	5.13.53	403	5.109.149	1087	5.13.61.149	2917	5.13.29.37.61	6943	5.5.5.29.61.109
91	41.101	408	5.13.13.197	1118	5.5.17.17.173	2943	5.5.5.5.13.13.41	6962	5.37.37.73.97
93	5.5.173	411	13.73.89	1123	5.13.89.109	3039	17.61.61.73	7093	5.5.13.17.29.157
98	5.17.113	437	5.13.13.113	1143	5.5.17.29.53	3112	5.13.13.73.157	7161	17.101.109.137
99	13.13.29	438	5.17.37.61	1148	5.29.61.149	3141	13.13.17.17.101	7443	5.5.5.37.53.113
100	73.137	443	5.5.5.5.157	1196	53.137.197	3149	17.29.89.113	7697	5.17.29.61.197
105	37.149	447	5.13.29.53	1228	5.17.113.157	3166	17.41.73.197	7782	5.5.13.17.97.113
111	61.101	463	5.13.17.97	1239	41.97.193	3207	5.5.29.41.173	8224	13.17.29.61.173
112	5.13.193	467	5.113.193	1270	61.137.193	3323	5.13.29.29.101	8307	5.5.5.5.5.61.181
117	5.37.37	499	13.61.157	1303	5.41.41.101	3362	5.13.17.53.193	8368	5.5.17.37.61.73