les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions, qui sont à envoyer à l'adresse suivante :
(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

ÉNONCÉS

A l'occasion de la remise, le 22 avril 1986, du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Limoges à Monsieur le Professeur Paul ERDÖS, mathématicien hongrois de renommée internationale, auteur de plus de mille publications, celui-ci a bien voulu communiquer, pour les lecteurs du Bulletin de l'A.P.M.E.P., les énoncés suivants :

ÉNONCÉ N° 122 (P. ERDÖS, Budapest)

Placer dans le plan cinq points, sans qu'il y en ait trois alignés ni quatre cocycliques, de telle façon que leurs distances mutuelles se classent ainsi : une d'une longueur ℓ_1, deux d'une longueur ℓ_2, trois d'une longueur ℓ_3, et quatre d'une longueur ℓ_4, où ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 sont des réels deux à deux distincts.

ÉNONCÉ N° 123 (P. ERDÖS, Budapest)

On joint deux à deux n points distincts donnés dans le plan, non tous alignés. Montrer que l'on obtient au moins n droites distinctes.

ÉNONCÉ N° 124 (P. ERDÖS, Budapest)

n points distincts sont donnés dans le plan. A partir de quelle valeur de n est-on sûr de pouvoir former un triangle non isocèle avec trois d'entre eux ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 107 (Concours général 1985)

p et q étant deux entiers positifs donnés, calculer :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{C_{p+k}^{k}}{2^{p+k}} + \sum_{k=0}^{p} \frac{C_{q+k}^{k}}{2^{q+k}}$$

SOLUTIONS

I. Solution combinatoire de Claude MORIN (Limoge)

Soit E l'ensemble des suites de $p+q+1$ termes formées de 0 et de 1 ; on a : card $E = 2^{p+q+1}$.

Soit A (respectivement B) le sous-ensemble de E des suites possédant au moins $p+1$ fois le 0 (respectivement au moins $q+1$ fois le 1). A et B forment une partition de E, donc card A + card B = card E.

Soit A_k l'ensemble des suites de A possédant k fois le 1 avant le $(p+1)$-ième 0 :

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{k \text{ fois } 1 \\ \text{et } p \text{ fois } 0}} \; 0 \; \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{q-k \text{ termes quelconques}}$$

On calcule : card $A_k = C_{p+k}^{k} \times 2^{q-k}$

d'où card $A = \sum_{k=0}^{q}$ card $A_k = \sum_{k=0}^{q} 2^{q-k} C_{p+k}^{k}$, car A est réunion disjointe des A_k.

En échangeant p et q on obtient de même :

$$\text{card B} = \sum_{k=0}^{p} 2^{p-k} C_{q+k}^{k},$$

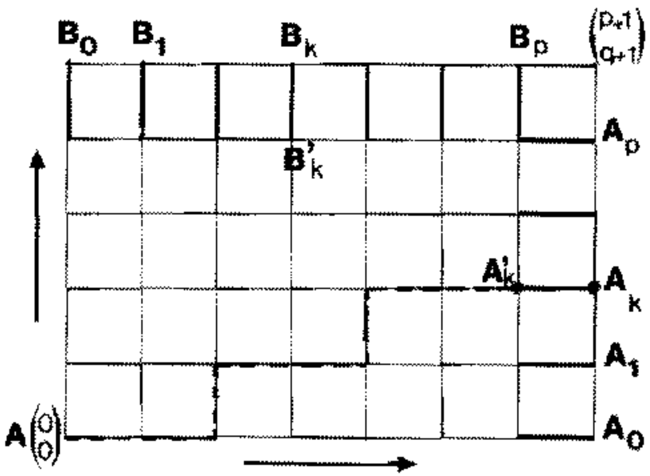
d'où :
$$\sum_{k=0}^{q} 2^{q-k} C_{p+k}^{k} + \sum_{k=0}^{p} 2^{p-k} C_{q+k}^{k} = 2^{p+q+1}$$

et en divisant par 2^{p+q} :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{C_{p+k}^{k}}{2^{p+k}} + \sum_{k=0}^{p} \frac{C_{q+k}^{k}}{2^{q+k}} = 2.$$

2. Solution probabiliste de Daniel CARRON (St-Louis - Réunion)

Considérons un rectangle $(q+1) \times (p+1)$ quadrillé par des carreaux 1×1. Soit A le sommet (0,0) et on considère une promenade aléatoire issue de A en respectant le quadrillage et les "deux sens uniques"



• A chaque carrefour le promeneur a la probabilité $\frac{1}{2}$ de choisir le segment suivant.

• On arrête la promenade lorsqu'on touche le bord $x = p+1$ ou $y = q+1$, c'est-à-dire qu'on exclut tout déplacement sur ces deux bords.

• On peut donc atteindre les bords $x = p+1$ ou $y = q+1$ en l'un des points $A_0, A_1 \ldots A_q$ ou $B_0, B_1 \ldots B_p$. On termine la promenade par l'un des chemins indiqués en trait fort sur le dessin ci-dessus.

• La somme de toutes les probabilités correspondant à l'arrivée en $A_0 \ldots A_q$, $B_0 \ldots B_p$ vaut 1 (les événements s'excluent mutuellement).

Probabilité pour arriver en A_k, $0 \leqslant k \leqslant q$

Il faut déjà compter tous les chemins pour joindre A et A'_k, chaque segment étant affecté de la probabilité $\frac{1}{2}$, puis il reste un chemin pour joindre A'_k à A_k toujours avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Le calcul est classique et fournit la valeur

$$p_{A_k} = \frac{C_{p+k}^{k}}{2^{q+k}} \times \frac{1}{2}$$

Probabilité pour arriver en B_k, $0 \leqslant k \leqslant p$

Le calcul est analogue et donne

$$p_{A_k} = \frac{C_{p+k}^{k}}{2^{q+k}} \times \frac{1}{2}$$

On additionne toutes ces probabilités et on obtient le résultat désiré.

Autres solutions :

— *Solutions probabilistes* : Martine BÜHLER (Paris), Robert CHARDARD (Les Ulis), Martine CLÉMENT (Limoges), Dominique MARSELLI (Décines).

— *Solutions algébriques* (développements, dérivations formelles) : Marcel BOUTEILLER (Brive), Claude MORIN (Limoges), Michel PÉRET (Brochon).

— *Solutions par récurrence* : Henri BERTHIER (Salins), Marcel BOUTEILLER (Brive), COLLET et VIDIANI (Dijon), Gabriel FRAÏSSE (Lézignan-Corbières), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (Strasbourg), Gilbert GRIBONVAL (Palaiseau), Maurice LAILLET (Givry), Gérard LAVAU (Mesnil-Esnard), Jean LEMAIRE (Lille), Michèle MALLEÚS (Châtenay-Malabry), Moïse MARCADÉ (Agde), Charles NOTARI (Noé), Roger QUENTON (Seillans), Anne-Marie RAUCH (Strasbourg), Geneviève SAMBARD (Saint-Quentin), Dominique TOUSSAINT (Morez), Didier TROTOUX (Evreux).

— *Solution et lettre* de Marcel DUMONT (St-Etienne-du-Rouvray) : voir courrier de lecteurs.

ÉNONCÉ N° 108 (Louis GUERBER, Clermont-Ferrand)

Quel est le plus grand nombre de points à coordonnées toutes entières que l'on peut placer dans le plan de façon à ce qu'aucun des centres de gravité des triangles qu'ils permettent de former (en les prenant par trois) n'ait ses coordonnées toutes entières ?

SOLUTION de Gérard LAVAU (Mesnil - Esnard)

Soient M, N, P trois points à coordonnées entières. Il est équivalent de dire :

i) le barycentre de M, N, P est à coordonnées entières.

ii) les sommes respectives des abscisses et des ordonnées de M, N, P sont toutes deux divisibles par 3.

On peut aussi associer à tout point M un élément M' de $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ de composantes x' et y' images canoniques dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ des coordonnées x et y de M. D'où une troisième formulation équivalente à i) et ii) :

iii) la somme $M' + N' + P'$ est égale à 0 dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$.

De ce point de vue, le problème énoncé est équivalent à chercher dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ le nombre maximum d'éléments $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ tels que, pour tout i, j, k distincts, on ait : $M'_i + M'_j + M'_k \neq 0$. Ces éléments peuvent être distincts ou confondus, cependant, il ne peut y avoir trois éléments confondus car $M' + M' + M' = 0$. D'autre part, si $(M'_1, M'_2, \ldots, M'_n)$ est une famille solution constituée d'éléments distincts, alors

$$(M'_1, \ldots, M'_n, M'_1, \ldots, M'_n)$$

où chaque élément est répété deux fois est aussi solution ; en effet, il suffit de vérifier que $i \neq j \Rightarrow M'_i + M'_i + M'_j \neq 0$, ce qui est effectivement le cas, sinon on aurait $M'_i = M'_j$.

Il suffit donc de chercher dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$ une famille maximale d'éléments distincts $(M'_1, \ldots, M'_n)$ tels que, pour i, j, k distincts, on ait

$$M'_i + M'_j + M'_k \neq 0$$

puis de répéter cette famille.

Remarquons enfin que, si l'on applique à une famille solution une translation à coordonnées entières, une symétrie relativement à la droite $x = y$ ou une symétrie centrale par rapport à l'origine, on obtient une autre famille solution. Ces propriétés seront utilisées pour réduire le nombre de cas à étudier.

Nous affirmons qu'une famille solution maximale est constituée de 4 éléments distincts notés M'_1, M'_2, M'_3, M'_4. $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ n'ayant que trois éléments, deux des points, M'_1 et M'_2 par exemple, ont nécessairement même abscisse ou même ordonnée. A une translation près, on peut supposer que $M'_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, la coordonnée commune étant 0. De même, en vertu de la symétrie relativement à la droite $x = y$, on peut également supposer que c'est l'abscisse de M'_2 qui est nulle, son ordonnée (dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$) valant 1 ou 2. En utilisant enfin la symétrie par rapport à l'origine, et comme $-2 = 1$ dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, on peut supposer que $M'_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$$\text{On a donc :} \quad \begin{array}{cc} M'_1 & M'_2 \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{array}$$

• Le point $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ est exclu car $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Il reste $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

• Si l'un des points, M'_3 par exemple, est égal à $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, on a
$$\begin{array}{ccc} M'_1 & M'_2 & M'_3 \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{array}$$

Cela exclut $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+M'_1+M'_3=0$, ainsi que $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+M'_2+M'_3=0$.

Il reste $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Il est facile de vérifier que les solutions maximales sont obtenues en ajoutant à M'_1, M'_2, M'_3 l'un quelconque des trois éléments restants, mais qu'il est impossible d'en ajouter deux.

Une solution possible est $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

• Si aucun point n'est égal à $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ mais que l'un d'eux, M'_3, est égal à $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, on a :
$$\begin{array}{ccc} M'_1 & M'_2 & M'_3 \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{array}.$$

Cela exclut $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Il reste $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Ces deux derniers points ne peuvent s'ajouter à la famille car
$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$
Ici aussi, le maximum est 4.

• Par un raisonnement analogue, si $M'_3=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, aucun point n'étant égal à $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, on a :
$$\begin{array}{ccc} M'_1 & M'_2 & M'_3 \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\end{array}\quad \text{ce qui exclut } \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Il reste $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. On ne peut donc avoir cinq éléments.

• La dernière éventualité est $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ avec les éléments restants $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

Le maximum est ici aussi de 4 car $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Conclusion : Si l'on revient à l'énoncé initial, il y a au maximum 8 points répondant à la question, par exemple

$$\binom{2}{3}\binom{2}{1}\binom{3}{3}\binom{4}{4}\binom{-1}{0}\binom{2}{4}\binom{6}{6}\binom{1}{1}.$$

Autres solutions :

Jean LEMAIRE (Lille), Moïse MARCADÉ (Agde) et Claude MORIN (Limoges). D'autre part, j'ai reçu deux réponses fausses.

Remarques : Dans l'espace, il est possible de trouver 18 points à coordonnées toutes entières, tels que les centres de gravité des triangles formés n'aient pas toutes leurs coordonnées entières.

ÉNONCÉ N° 109 (D. ROUX, Limoges)

Définissons une application P de N* dans N ainsi :
P(k) est le nombre des coefficients binomiaux pairs appartenant à la $k^{\text{ième}}$ ligne du triangle arithmétique de Pascal. q étant un entier donné, quel est le nombre des éléments de P(N*) plus petits que 2^q ?

SOLUTION de Charles AUQUE (Clermont-Ferrand)

• Notations : La ligne de rang n du triangle de Pascal sera celle du développement de $(a+b)^n$:

$n=0$	1			
$n=1$	1	1		
$n=2$	1	2	1	
$n=3$	1	3	3	1
....	.....	.....	.....	.....

Nous poserons $P(0)=0$.

D'autre part, nous utiliserons l'écriture en base 2 de tout entier a sous la forme : $a=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_k}$ avec la convention : $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_k$, et nous noterons u($a$) le nombre des chiffres "un" dans l'écriture binaire de a, c'est-à-dire : $u(a)=k$.

• *Calcul de P(n)* : Nombre des termes pairs dans la ligne de rang n du triangle de Pascal, pour $n=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_k}$.

Seule la parité des coefficients binomiaux nous intéresse, donc nous calculons dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et appliquons la formule du binôme de Newton, en utilisant l'identité : $(a+b)^k=a^k+b^k$ (dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$), il vient :

$$(a+b)^{(2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_k})}=(a^{2^{\alpha_1}}+b^{2^{\alpha_1}})(a^{2^{\alpha_2}}+b^{2^{\alpha_2}})\ \ldots\ (a^{2^{\alpha_k}}+b^{2^{\alpha_k}})$$

Dans le développement de ce produit, tous les monômes sont distincts. il y en a 2^k, c'est-à-dire $2^{u(n)}$.

Le nombre des coefficients binomiaux impairs de la ligne de rang n est donc $2^{u(n)}$, celle-ci ayant $(n+1)$ termes on conclut :

$$\boxed{P(n) = n + 1 - 2^{u(n)}}$$

• *Détermination des valeurs prises par l'application P :*

$0 = P(0) = P(1) = P(3) = P(7) = \ldots$ est une valeur prise (une infinité de fois).

Théorème 1 : Soit a un entier non nul. a est une valeur prise par l'application P si et seulement si l'écriture binaire de $a-1$ n'a pas de "un" au rang $1+u(a-1)$, compté à partir de la droite.

Attention : le rang du chiffre des "unités" est 0
le rang du chiffre des "dizaines" est 1 etc...

Autrement dit, dans l'écriture de a en base 2 le coefficient de $2^{1+u(a-1)}$ doit être 0.

Démonstration :

1) Supposons que $a-1$ ait un "zéro" au rang $1+u(a-1)$ dans son écriture binaire et soit $n = (a-1) + 2^{1+u(a-1)}$. Le chiffre 1 s'ajoute dans le rang $1+u(a-1)$, donc $u(n) = u(a-1)+1$. Par suite :

$P(n) = (a-1) + 2^{1+u(a-1)} + 1 - 2^{1+u(a-1)} = a$. Donc $a \in P(\mathbb{N}^*)$.

2) Supposons que $a = P(n)$, c'est-à-dire : $n = (a-1) + 2^{u(n)}$ et distinguons deux cas :

Cas 1 : $a-1$ a un "zéro" au rang $u(n)$ de son écriture binaire, alors $u(n) = u(a-1)+1$ et $a-1$ a un "zéro" au rang $1+u(a-1)$.

Cas 2 : $a-1$ a un "un" au rang $u(n)$. Supposons qu'il y ait une séquence de k "un" en allant vers sa gauche :

$$a-1 = \ \ldots\ldots\ 0\ \underbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}_{k \text{ chiffres } 1}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{u(n) \text{ chiffres}} \qquad \text{alors :}$$

$$n = (a-1) + 2^{u(n)} = \ \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{inchangés}}\ 1\ \underbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}_{k \text{ chiffres } 0}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{inchangés}}$$

donc $u(n) = u(a-1) - k + 1$, et le "zéro" écrit dans $a-1$ est au rang
$u(n) + k = 1 + u(a-1)$ — cqfd —

• *Détermination de* card $\{n \in P(\mathbb{N}^*) \mid n \leqslant 2^q\}$.

Dénombrons en discutant suivant les valeurs de $k = u(n-1)$, pour $n > 0$.

— Si $u(n-1)=0$ alors $n=1$: 1 nombre.

— Si $1 \leqslant k \leqslant q-2$, il faut pour construire $(n-1)$, choisir k chiffres égaux à 1 parmi les $q-1$ chiffres autres que celui de rang $1+u(n-1)$: cela donne C_{q-1}^{k} possiblités.

— Si $u(n-1)=q-1$, il faut choisir $u(n-1)$ chiffres égaux à 1 parmi les q chiffres de l'écriture binaire de $(n-1)$, car dans ce cas $1+u(n-1)=q$. Cela donne $C_{q}^{q-1}=q$ possibilités.

— $u(n-1) \geqslant q$ entraîne $n-1 \geqslant 2^{q}-1$, ce qui est impossible car $n<2^{q}$.
En n'oubliant pas la possibilité $n=0$ cela donne finalement le nombre suivant :

$$1+1+\sum_{k=1}^{q-2} C_{q-1}^{k} + q = \boxed{2^{q-1}+q}$$

Autres solutions :

Gérard LAVAU (Mesnil - Esnard), Claude MORIN (Limoges), et l'auteur.

Commentaire : genèse de ce problème

Des questions relatives à la parité des coefficients binomiaux sont apparues à plusieurs reprises. Dans l'énoncé n° 52 de cette rubrique nous demandions si une ligne du triangle de Pascal pouvait contenir autant de termes pairs que de termes impairs (voir *Bulletin* n° 306, une solution). Puis dans le problème n° 145 du *Petit Archimède* nous demandions si une ligne du triangle de Pascal pouvait contenir exactement 10 termes pairs. Le théorème 1 montre immédiatement que la réponse est négative : $10-1=9$ s'écrit en binaire : 1001. Donc $1+u(a-1)=3$, et le chiffre de rang 3 est 1.

Il était alors naturel de se demander par quels entiers on pouvait remplacer 10 tout en conservant la propriété, cela définit un ensemble E d'entiers dont le complémentaire dans $\mathbf{N}$ est $P(\mathbf{N}^*)$. Pour les petites valeurs on constate qu'il y a moins d'éléments dans E que dans $P(\mathbf{N}^*)$. Venait alors la question : un entier pris au hasard a-t-il moins de chance d'être dans E que dans son complémentaire ? Ce qui précède permet de répondre : les éléments de E plus petits que 2^{q} sont au nombre de $2^{q-1}-q$, et à la limite, un entier a autant de chance d'être dans E que d'être dans $P(\mathbf{N}^*)$: une chance sur deux.

Complément n° 1 :

Considérons la suite des valeurs prises par l'application P :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
$P(n)$	0	0	1	0	3	2	3	0	7	6	7	4	9	6	7	0	15	14	15	12	...

Charles AUQUE démontre le théorème suivant :

Théorème 2 : Un entier n fait apparaître une nouvelle valeur $P(n)$ si et seulement si son écriture binaire comporte un "zéro" au rang $u(n)-1$ (avec les mêmes conventions que ci-dessus).

Démonstration :

1) Si n comporte un "un" au rang $u(n)-1$, le nombre $m=n-2^{u(n)-1}$ vérifie $u(m)=u(n)-1$, donc $P(m)=n-2^{u(n)-1}+1-2^{u(n)-1}=P(n)$, donc $P(n)$ n'est pas nouveau. De plus, en répétant éventuellement cette descente on aboutira nécessairement à un entier a dont l'écriture binaire comporte "zéro" au rang $u(a)-1$ et tel que $P(n)=P(a)$.

2) Si $a=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_k}$, tous les α_i étant différents de $k-1$, on peut écrire :
$\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_i>k-1>\alpha_{i+1}>\ldots>\alpha_k$.

Alors
$$P(a)-1=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_{i-1}}+(2^{\alpha_i}-2^k)+2^{\alpha_{i+1}}+\ldots+2^{\alpha_k}$$
$$=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\ldots+2^{\alpha_{i-1}}+(2^{\alpha_i-1}+2^{\alpha_i-2}+\ldots+2^k)$$
$$+2^{\alpha_{i+1}}+\ldots+2^{\alpha_k},\quad \text{si}\quad \alpha_i\neq k.$$

Ceci permet de voir que l'écriture binaire de $P(a)-1$ n'a que des "un" entre les deux "zéro" situés aux rangs $k-1$ et $\alpha_i=1+u(P(a)-1)$ (cf. 2 de la démonstration du théorème 1).

Donc la connaissance de $P(a)$ détermine k et permet de retrouver de façon unique le nombre a tel que son écriture binaire comporte "zéro" au rang $u(a)-1$.

Corollaire : card $\{P(n) \mid n<2^q\} = 2^{q-1}$.

En effet, comptons les nouvelles valeurs $P(n)$ données par les entiers $n=0,1,\ldots,2^q-1$.

— $n=0$ donne $P(0)=0$: un nombre.

— Si $u(n)=1$ alors $u(n)-1=0$ donc n doit se terminer par 0 : $q-1$ possibilités.

— Si $u(n)=2$ alors $u(n)-1=1$ l'avant dernier chiffre doit être 0 : C_{q-1}^2 possibilités.

....

— Si $u(n)=k$ le chiffre de rang $k-1$ doit être 0 : C_{q-1}^k possibilités.

En tout, le nombre de valeurs $P(n)$ distinctes est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} C_{q-1}^k = 2^{q-1}$.

Complément n° 2

Il est intéressant d'observer le triangle de Pascal considéré modulo 2 :

$n=0$

$n=1$

$n=2$

$n=3$

$n=4$

. . . .

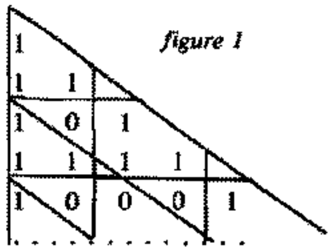


figure 1

On obtient une figure très parlante en notant d'une croix les nombres 1 et en laissant les nombres 0 en blanc : voir *figure 2* due à Gérard LAVAU.

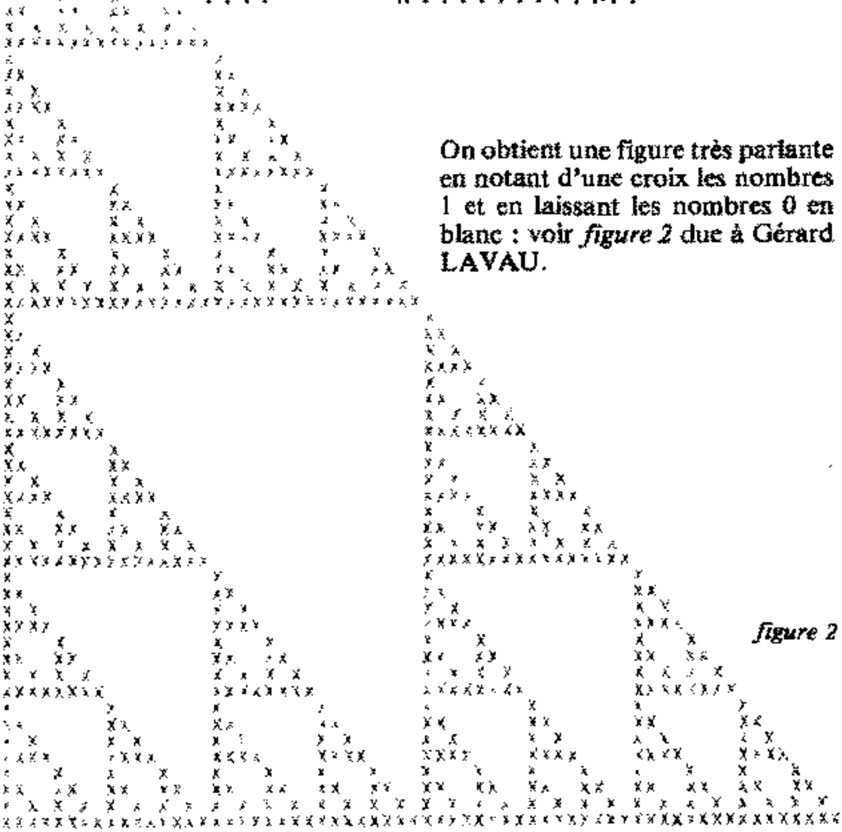


figure 2

On observe un phénomène de "croissance cellulaire" : le triangle compris entre les lignes 0 à $2^n - 1$ se répète en double exemplaire entre les lignes 2^n et $2^{n+1} - 1$.

Le lecteur pourra faire de nombreuses observations. On déduit également sans peine une construction par récurrence de la suite $(P(n))_{n \in N}$, aisément programmable.

Remplissons trois lignes A, B, C, de pas en pas, la longueur de chaque pas doublant à chaque étape, de la façon suivante :

			1er pas		2e pas				3e pas								4e pas				
A		0	1	0	3	2	1	0	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	...
B		0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	6	4	6	0	0	0	2	0	...
C	0	0	1	0	3	2	3	0	7	6	7	4	9	6	7	0	15	14	15	12	...

Au $k^{\text{ième}}$ pas, la ligne A est complétée par la suite décroissante des entiers de $2^k - 1$ à 0, la ligne B est complétée par les doubles des termes figurant déjà sur la ligne C, enfin chaque terme de la ligne C est la somme des termes de même rang situés dans les lignes A et B. La ligne C donne la suite $P(n)$.

COURRIER DE LECTEURS

1) *Réponses tardives* parvenues après rédaction de la rubrique :
N° 102 : Claude MORIN (Limoges) et Jean LEMAIRE (Lille).
N° 105 et N° 106 partiel : Jean LEMAIRE (Lille).

2) Marcel DUMONT envoie, à propos du problème n° 107, une lettre de 7 pages dans laquelle il plaide pour la transparence des énoncés et des solutions. Voici quelques extraits :

"Dans la plupart des rubriques "Problèmes" de diverses revues ou brochures françaises on constate presque toujours que les énoncés (pour des raisons de place, peut-être...) ont été coupés de leur contexte. Le lecteur ignore tout des motivations de l'auteur"...

..."Il serait bon que les auteurs de solutions explicitent les dessous de leurs démarches, les apports extérieurs et leur origine, les questions subsidiaires parfois plus importantes que la question primitive, leurs initiatives heureuses ou malheureuses, bref tout ce qui fait qu'un être humain ne se comporte pas comme une machine"...

..."Les habitudes et usages portent, en mathématiques comme ailleurs, les inconvénients de leurs avantages. Commodes pour tous les types de problèmes habituels, classés, catalogués, et incommodes chaque fois qu'un problème de type nouveau surgit dans la tête d'un curieux. En particulier l'unicité de l'interprétation, l'unicité du codage et des techniques emprisonnent enseignés et enseignants et bloquent toute évolution"...

Et à titre d'exemple, Marcel DUMONT propose pour résoudre le problème n° 107, un nouveau codage des coefficients binomiaux et de l'exponentielle, et introduit la notion de fréquence relative aux nœuds d'un quadrillage.

Il compare le calcul demandé à un phénomène de "propagation de la houle" dans lequel les nœuds intérieurs interviennent deux fois et les nœuds du "bord" une fois.

..."Finalement, le ressac de la houle s'arrête au point origine, dernière "diagonale", la somme demandée est le double de la fréquence relative du point origine, c'est-à-dire 2".

Enfin Marcel DUMONT explique que de telles interprétations ou visualisations offrent un pouvoir de suggestion pour ouvrir ou généraliser le problème, justifient le besoin de créer et d'utiliser un langage algorithmique et soulignent le paradoxe entre deux tendances indispensables :

- d'une part, l'appel à l'intuition à l'aide de visualisations ou images portant sur des idées,
- d'autre part, la recherche d'une rationnalisation des écritures pour mieux "coller" aux idées et permettre de contrôler l'intuition.