échanges

sur la raréfaction des nombres premiers

par E. Ehrhart
Strabourg

Une certaine régularité dans la raréfaction des nombres premiers apparaît dans la proposition suivante :

Théorème : *La première moitié des 2n premiers nombres entiers contient plus de nombres premiers que la seconde, pour n supérieur à 10.*

Démonstration (par Guy Robin, professeur à l'Université de Limoges)

En désignant traditionnellement par π_n le nombre de nombres premiers jusqu'à n compris, il faut prouver que

(1) $$\pi_{2n} < 2\pi_n \qquad (n > 10).$$

Désignons par p un nombre premier et par La le logarithme népérien de a. D'après Schoenfeld [1]

$$\sum_{p \leqslant n} \mathrm{L}p = n + R(n)$$

avec

$$R(n) > -\frac{n}{6\,\mathrm{L}n} \qquad (n > 10000).$$

On en déduit (par une démonstration érudite que nous ne reproduisons pas ici)

$$\pi_n \geqslant \frac{n}{\mathrm{L}n}\left(1 + \frac{5}{6\,\mathrm{L}n}\right) \qquad (n > 10000).$$

Comme d'autre part suivant Rosser et Schoenfeld [2]

$$\pi_n \leqslant \frac{n}{Ln}\left(1+\frac{3}{2\,Ln}\right) \qquad (n \geqslant 52),$$

On a donc l'encadrement

$$(2) \qquad \frac{n}{Ln}\left(1+\frac{5}{6\,Ln}\right) \leqslant \pi_n \leqslant \frac{n}{Ln}\left(1+\frac{3}{2\,Ln}\right) \qquad (n > 10000).$$

Il en résulte :

$$2\,\pi_n - \pi_{2n} \geqslant \frac{2n}{LnL2n}\left(L2 + \frac{\frac{5}{2}L^2 2n - L^2 n}{Ln\;L2n}\right)$$

$$> \frac{2n}{LnL2n}\left(L2+\frac{5}{6}-\frac{3}{2}\right) > 0 \qquad (n > 10000)$$

Or, (1) est vrai également pour $n < 10000$, comme on l'a vérifié par ordinateur.

Remarques :

1) Soit π'_n le nombre de nombres premiers de l'intervalle $[n+1,\, 2n]$. Quand n tend vers l'infini,

$$\frac{\pi'_n}{\pi_n} \to 1\ , \quad \pi_n - \pi'_n \to +\infty\ , \quad \pi_n - \pi'_n \sim \frac{n}{L^2 n}\ (L4 - \frac{4}{3})$$

De la relation classique $\pi_n \sim \dfrac{n}{Ln}$ résulte immédiatement

$$\frac{\pi'_n}{\pi_n} = \frac{\pi_{2n} - \pi_n}{\pi_n} = \frac{\pi_{2n}}{\pi_n} - 1 \sim 2\ \frac{Ln}{Ln + L2} - 1 \to 1$$

Comme $\pi_n - \pi'_n = 2\pi_n - \pi_{2n}$, on déduit de (2) :

$$\frac{2n}{LnL2n}\,(L2 - \frac{2}{3}) < \pi_n - \pi'_n < \frac{2n}{LnL2n}\,[L2 - \frac{2}{3} + (\frac{5}{6Ln} + \frac{3}{2L2n})L2]$$

D'où $$\frac{Ln2n}{n}\ (\pi_n - \pi'_n) \to L4 - \frac{4}{3} = 0{,}053$$

Par suite $$\pi_n - \pi'_n \sim \frac{n}{L^2 n}\ (L4 - \frac{4}{3}) \quad \text{et} \quad \pi_n - \pi'_n \to +\infty$$

2) Pour $n < 10000$, le maximum de $\pi_n - \pi'_n$ est 204. Il est atteint 14 fois pour $9941 \leqslant n \leqslant 9944$, $9949 \leqslant n \leqslant 9956$, $n = 9973$, $n = 9974$.

Pour $n > 10000$, le minimum de $\pi_n - \pi'_n$ est très probablement 191.

Commentaire :

En avril 1986, j'avais communiqué le théorème comme conjecture :

— aux professeurs Foata et Mignotte de Strasbourg, spécialistes en théorie des nombres. Ils m'ont dit n'avoir jamais rencontré en littérature cette conjecture, sans doute très difficile à démontrer ;

— au "American Mathematical Monthly", dont le "referee" n'a non plus trouvé de trace imprimée de cette conjecture. Il l'estime trop difficile pour sa rubrique des "advanced problems". Il m'a appris que la conjecture plus générale

$$\pi_{n+m} \leqslant \pi_n + \pi_m \qquad (n \text{ et } m \geqslant 2)$$

a déjà été émise, "mais qu'elle était probablement fausse" ;

— à Monsieur Dominique Roux, responsable de la rubrique des problèmes du *Bulletin* de l'A.P.M.E.P., en observant que l'encadrement de π_n donné par Rosser et Schoenfeld [2] :

$$\frac{n}{Ln}\left(1+\frac{1}{2Ln}\right) < \pi_n < \frac{n}{Ln}\left(1+\frac{3}{2Ln}\right) \qquad (n \geqslant 52)$$

ne suffit pas pour établir (1) car il conduit à

$$2\pi_n - \pi_{2n} > \frac{2n}{LnL2n}\left(L2 - \frac{3L^2n - L^22n}{2LnL2n}\right)$$

où la parenthèse est négative ;

— au Centre de Calcul de Strasbourg, où M. Strosser a bien voulu vérifier la conjecture pour l'intervalle [11,10000] de n ;

— à G. Robin qui m'a envoyé sa splendide démonstration. M. Roux lui avait déjà transmis ma conjecture.

Les personnes compétentes consultées pensent que ce théorème inédit est important.

Post-scriptum :

Quelques temps après l'envoi de cet article au *Bulletin*, M. Robin m'a communiqué une information intéressante : "Dans [3], les auteurs affirment avoir démontré (1) et que leur démonstration paraîtra ultérieurement. A ma connaissance, elle n'est pas parue, mais comme je vous l'ai montré, la preuve est conséquence facile du travail de Rosser et Schoenfeld".

M. Robin m'a également envoyé la démonstration d'une proposition plus générale que je lui avais soumise comme conjecture :

Théorème 2 : *Quels que soient les entiers k et n supérieurs à 2,*

$$\pi_{kn} < k\pi_n$$

[1] Schoenfeld, Shaper bonds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, II, Mathematics of Computation, Vol. 30, pp. 337-360 (1976).

[2] Rosser et Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois Journal of Mathematics, vol. 6, pp. 64-94 (1962).

[3] Rosser et Schoenfeld, Sharper bonds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, I, Mathematics of Computation, Vol. 29, pp. 243-269 (1975).