courrier des lecteurs

après
“le numérateur de la dérivée du quotient de deux polynômes”
bulletin 351

Trois lecteurs ont écrit à la suite de la publication de cet article :

Gabriel FRAÏSSE du lycée de Narbonne, que l'étude a surpris et intéressé, propose une autre démonstration.

Etant donnés deux polynômes

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i x^i \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \ell_j x^j ,$$

exprimons $P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)$.

$$P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x) = \Big(\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} i\,a_i x^{i-1}\Big).\Big(\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} b_j x^j\Big) - \Big(\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i x^i\Big).\Big(\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} j b_j x^{j-1}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} i\,a_i\,b_j\,x^{i+j-1} - \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} j\,a_i\,b_j\,x^{i+j-1}$$

$$= \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (i-j)\,a_i\,b_j\,x^{i+j-1}$$

$$= \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j)\,(a_i b_j - a_j b_i)\,x^{i+j-1}$$

La dernière égalité est obtenue en échangeant i et j quand $i<j$.

Georges RIGAUD du lycée d'Avignon indique que la méthode naturelle fournit un algorithme plus performant si on développe $u'v - v'u$, le temps de calcul étant proportionnel au produit des degrés des polynômes.

On obtient $c_k = \sum_{i+j-1=k} (i-j)\, a_i\, b_j$ pour k variant de 0 à $n+m-1$.

Cette méthode peut être illustrée par le calcul "à la main" suivant.

On prendra $f(x) = \dfrac{2x + x - 3x - 5}{x^2+9x-7}$ pour illustrer la méthode.

I) Faire le tableau des produits $a_i{*}b_j$ (entre parenthèses $i-j$)

	i	0	1	2	3
j	a_i / b_j	-5	-3	1	2
0	-7	***(0)	21(1)	$-7(2)$	$-14(3)$
1	9	$-45(-1)$	***(0)	9(1)	18(2)
2	1	$-5(-2)$	$-3(-1)$	***(0)	2(1)

*** = calcul inutile

2) Faire le tableau des produits $(i-j){*}a_i{*}b_j$ en déduire les coefficients C(K)

$K = i+j-1$

j \ i	0	1	2	3
0	0	21	-14	-42
1	45	0	9	36
2	10	3	0	2

K	C(K)
0	66
1	-4
2	-30
3	36
4	2

d'où $f'(x) = \dfrac{2x^4+36x^3-30x^2-4x+66}{(x^2+9x-7)^2}$

Jean-François CANET d'Avignon signale que pour faire le produit de 2 polynômes A et B de degré n et p on est amené à calculer $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ et qu'un seul indice (i par exemple) suffit, j étant alors $k-i$, avec j variant de 0 à p et i de $\sup(0, k-p)$ à $\inf(n,k)$.

Cette méthode améliore sensiblement les performances du programme A, qui deviennent comparables à celles des programmes B et C.

D'une façon plus générale, il s'étonne de la méthode employée pour tester la performance des programmes (en chronométrant *un exemple*), et craint qu'une confusion soit faite entre performance d'un *algorithme* et performance dans la *rapidité d'exécution du programme* qui essaie de coder cet algorithme.

J.-F. CANET signale par ailleurs l'existence de logiciel de calcul symbolique formel au catalogue "Informatique pour tous".

Tous trois signalent leur intérêt pour le calcul formel sur ordinateur et leur souhait que se développe dans le *Bulletin* la rubrique des applications de l'informatique aux mathématiques.