introduction de la notion de logarithme népérien en terminale C

Michel Marguerite
Lycée A. Chevalier 61700 Donfront

Il s'agit de l'introduction de la notion de logarithme népérien en Terminale C que j'ai effectivement traitée ainsi cette dernière année scolaire, elle me paraît également utilisable en Terminales E et D.

Elle s'appuie sur une idée présentée dans le *Bulletin A.P.M.E.P.* n° 333 par M. Rihaoui, qui évite la notion d'intégrale (ou de primitive, qui peut donc être traitée ultérieurement pour elle-même). Elle utilise au contraire les résultats sur les suite et peut donc être traitée assez tôt dans l'année. Afin que cette présentation n'apparaisse pas trop aride à l'élève, il est souhaitable qu'il ait à sa disposition une calculatrice programmable qui lui permette d'obtenir un grand nombre de résultats numériques assez rapidement (de préférence, utiliser une machine permettant la modification de programmes).

Cette idée consiste à définir $\ln x$ comme la limite de la suite

$$v_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \quad (\text{pour } x > 0).$$

Cette suite m'est apparue cependant un peu trop compliquée à manipuler : on n'a pas de relation de récurrence simple et il faut établir des résultats préliminaires sur la suite $u_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ qui peuvent sembler nécessiter un temps trop important aux yeux de l'élève.

J'ai préféré une sous-suite de $v_n(x)$: $t_n = v_{2^n}(x)$. (J'ai éliminé "(x)" pour simplifier la rédaction).

Voici donc le travail que j'ai réalisé en classe (2 heures) :

I. Je demande à chaque élève de prendre sa calculatrice — en mode *normal* —, de se choisir un nombre strictement positif quelconque et d'appuyer continuellement sur la touche $\sqrt{\ }$. On note au tableau quelques résultats :

a) 6 ; 2,449... ; 1,565... ; 1,251... ; 1,118... ; 1,057... ; 1,028...

b) 3 ; 1,732... ; 1,316... ; 1,147... ; 1,071... ; 1,034... ; 1,017...

c) 2 ; 1,414... ; 1,189... ; 1,090... ; 1,044...

d) 0,5 ; 0,707... ; 0,840... ; 0,917... ; 0,957... ; 0,978... ; 0,989...

etc...

Proposer d'autres exemples si nécessaire mais il est bien rare que les élèves ne se rendent pas compte que tous ces nombres se rapprochent de 1, avec même une distinction entre les cas a), b), c) d'une part, et d) d'autre part.

Je propose donc l'exercice suivant :

Ex. : Etant donné un réel $x > 0$, on définit la suite w par

$$w_0 = x \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \sqrt{w_n}.$$

Dans le cas $x \geqslant 1$, montrer que w_n est :

a) minorée par 1

b) décroissante

c) convergente, de limite 1.

On peut donc établir :

Résultats :

Remarques

w_n correspond à $u_{2^n}(x)$. Il n'est pas nécessaire d'avoir traité les puissances rationnelles (peut se traiter après l'exponentielle).

On peut également utiliser l'inégalité des accroissements finis pour la fonction $x \to \sqrt{x}$.
Mais il faut tout de même établir $w_n \geqslant 1$ (pour le II).

$\boxed{\text{Si } 0<x\leqslant 1,\ w_n \text{ est croissante et converge vers } 1}$

$\boxed{\text{Si } x\geqslant 1,\ w_n \text{ est décroissante et converge vers } 1}$

Si à x on associe w_n alors $w'_n = \dfrac{1}{w_n}$

à $\dfrac{1}{x}$ on associe w'_n

Si à x on associe w_n

Si à y on associe w'_n

Si à xy on associe W_n

alors $W_n = w_n w'_n$

II. Je propose ensuite aux élèves d'étudier la suite $t_n = 2^n(w_n - 1)$ (toujours pour $x > 0$).

Nous avons, bien sûr, un beau cas d'indétermination de limites. Essayons de voir comment se comporte cette suite et avec les élèves nous établissons un organigramme qui peut être celui-ci :

DÉBUT

(1) Mettre N = 0 dans le registre 1

(2) Mettre W = ... dans le registre 2

(3) Afficher N

(4) T ← 2^N * (W − 1)

(5) Afficher T

(6) N ← N + 1 dans le registre 1

(7) W ← $\sqrt{W}$ dans le registre 2

Prendre pour W ce qu'on veut (c'est w_0).
Je demande l'affichage alterné des indices et de la valeur des termes.

Les résultats ne sont plus fiables à partir d'un certain rang, mais une dizaine de termes suffit largement.

Les élèves exécutent le programme et le testent sur plusieurs exemples. Nous notons quelques résultats :

$x = 6$: 5 ; 2,89... ; 2,26... ; 2,008... ; 1,89... ; 1,84... ; 1,81... ; 1,804...; 1,798...

$x = 4$: 3 ; 2 ; 1,65... ; 1,51... ; 1,448... ; 1,416... ; 1,401... ; 1,393... ; 1,390... ; 1,383... ; 1,387...

$x=3$: 2 ; 1,46... ; 1,26... ; 1,17... ; 1,137... ; 1,117... ; 1,108... ; 1,103... ; 1,100... ; 1,099...

$x=2$: 1 ; 0,82... ; 0,75... ; 0,72... ; 0,708... ; 0,700... ; 0,696...

$x=1$: (bizarre, bizarre...)

$x=0,5$: $-0,5$; $-0,58...$; $-0,636...$; $-0,663...$; $-0,678...$; $-0,685...$; $-0,689...$

$x=0,25$: $-0,75$; -1 ; $-1,17...$; $-1,27...$; $-1,32...$; $-1,356...$; $-1,371...$; $-1,3788...$; $-1,382...$

Que remarque-t-on ? Ces suites ont l'air convergentes. Mais encore ? Elles semblent décroître.

Je propose l'exercice suivant :

Exercice :

1°) Exprimer w_n en fonction de w_{n+1}

t_n en fonction de w_{n+1}

et $t_n - t_{n+1}$ en fonction de w_{n+1} — $t_n - t_{n+1} = 2^n (w_{n+1} - 1)^2$

En déduire que t_n est décroissante. — $w_n \geqslant 1$!!

2°) Dans le cas $x \geqslant 1$, établir que t_n est convergente.

3°) Etablir que si les 2 suites associées à x sont w_n et t_n et les 2 suites associées à $\frac{1}{x}$, w'_n et t'_n alors $t'_n = -\frac{t_n}{w_n}$ (*)

En déduire que dans le cas $0 < x \leqslant 1$, la suite t_n est également convergente.

Nous énonçons donc les résultats suivants :

Propriété et définition

> Etant donné un réel $x>0$, la suite t_n est décroissante et convergente vers un nombre noté $\ln x$ et appelé le logarithme népérien de x.

Remarques : si $x>0$

1) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ — Conséquence de (*)

$\ln 1 = 0$ — Peut également s'obtenir directement ($w_n = 1$).

2) $\frac{t_n}{w_n} \leqslant \ln x \leqslant t_n$ (**)

$\ln x \leqslant t_n$ car t_n est décroissante, l'autre inégalité s'obtient en appliquant cette remarque à $\ln(\frac{1}{x})$.

Conséquence : pour $n=0$

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x-1 \qquad (**\text{bis})$$

Je propose ensuite de tracer la courbe de ln en traçant un certain nombre de points, mais pour cela il faut tout de même pouvoir obtenir un encadrement (ne serait-ce qu'à 0,1 près, ce qui suffit) de $\ln x$.
En se servant de (**), il suffit d'intercaler entre les lignes (5) et (6) de l'organigramme la ligne

(5bis) Afficher T/W

C'est ici que la possibilité de modifier un programme est bien utile!! (Ce n'était pas notre cas). Les machines avec écran graphique me paraissent également intéressantes.

Une fois que la courbe est tracée, on ajoute au graphique la droite d'équation $y=x-1$, dont on sait d'après (**bis) qu'elle est au-dessus de la courbe.
Elle semble être, en plus, tangente à la courbe au point de coordonnées (1;0). Que suffit-il de montrer pour cela ?

Exercice :
1) Pour $x \geqslant 1$, établir en se servant de (**bis) que:

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln x}{x-1} \leqslant 1 .$$

En déduire que ln est dérivable à droite en 1.

Tout ce qui suit est l'exacte reprise de l'article de M. Rihaoui.

2) Par un raisonnement semblable, établir que ln est dérivable à gauche en 1.

Seule différence : le signe de $x-1$.

On veut dès lors savoir si ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Mais il faut d'abord établir la propriété fondamentale.

Exercice : Si les suites associées à x sont w_n et t_n, à y, w'_n et t'_n et à xy, W_n et T_n, établir

a) $W_n = w_n . w'_n$

b) $T_n = w'_n \ t_n + t'_n$ ou $w_n \ t'_n + t_n$.

Déduire $\ln xy = \ln x + \ln y$.

Nous pouvons donc établir :

Résultats :

1) ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = 1$

2) $\ln xy = \ln x + \ln y$

$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

3) ln est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Cette propriété se démontre à l'aide de :
Exemple :

Etablir que $\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h}$

Déduire que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$

....

A partir de là, les autres propriétés s'obtiennent de façon tout à fait classique.