fraction, n. f. 1969-1/3

fractionnaire, adj.

Etym.: Action de briser (ne s'emploie plus que dans l'expression liturgique : *fraction du pain*).

Us.: Résultat de l'action précédente, partie d'un tout; *ex.:* les fractions de l'assemblée. Ce sens est visiblement à l'origine des sens mathématiques.

1. Généralités.

Mot d'un usage délicat, l'évolution ayant fait diverger les habitudes de l'écriture et celles du langage; des deux, c'est l'écriture, c'est-à-dire la notation fractionnaire, qui garde la signification la plus précise.

1.1. *Notation fractionnaire.* La notation fractionnaire consiste essentiellement en un trait horizontal (———) ou parfois oblique (/) au-dessus et au-dessous duquel sont écrits deux symboles. Cette notation peut, surtout en analyse, constituer un tout indissociable (par exemple, notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ d'une dérivée partielle, notation $\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ d'un jacobien). Mais, dans la pratique courante de l'algèbre, les deux symboles suscrit et souscrit désignent des êtres mathématiques indépendants — usuellement : nombres, polynomes, vecteurs — respectivement appelés *numérateur* et *dénominateur* ou, dans leur ensemble, *termes*.

Ex.: $\frac{3}{5}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$, $\frac{\overrightarrow{AB}}{3}$, etc.

Une notation fractionnaire telle que $\frac{a}{b}$ s'énonce en général

« a sur b », sauf lorsque a et b sont des naturels, auquel cas on lit « a b-ièmes » (comparer à cet égard les notations $\frac{\pi}{5}$, $\frac{-4}{-5}$, $\frac{4}{5}$; encore faut-il dans ce dernier cas signaler les exceptions « demi », « tiers », « quart » pour les dénominateurs 2, 3, 4).

1.2. *Signification.* La signification générale de la notation fractionnaire est celle de la « division », à l'exclusion toutefois de la division euclidienne, des divisions croissante et décroissante des polynomes. Certes cette signification est purement formelle, car le mot « division » lui-même n'exprime rien de plus que le fait qu'une certaine opération, notée multiplicativement, présente des analogies suffisantes avec la multiplication ordinaire [DIVISION, 1]. Mais, cette réserve faite, la notation $\frac{a}{b}$ désigne de façon constante l'être mathématique dont le « produit » par le dénominateur b est le numérateur a : c'est donc le quotient de a par b.

Finalement ce qui fait l'unité et d'ailleurs la commodité des notations fractionnaires, c'est qu'elles obéissent à un formalisme unique, qui est le formalisme élémentaire des fractions arithmétiques, dans la mesure du moins où ses règles peuvent être définies pour les êtres mathématiques concernés (par exemple il ne saurait être question de « multiplier » des vecteurs entre eux au sens présent; de même « simplifier » une notation fractionnaire à termes entiers a un sens précis, mais si les termes sont réels, le sens ne peut être que conventionnel, etc.).

1.3. *Fractions.* Il semble impossible de dégager pour le mot *fraction* un sens autre que celui de « notation fractionnaire ». Par exemple, lors de la construction de $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$, on se trouve placé devant le dilemme suivant :

— ou bien on appelle « fractions » les couples d'entiers, éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, mais alors il faut surtout s'abstenir de les noter sous la forme $\frac{a}{b}$, vu la signification générale de cette notation fractionnaire; et une fois achevée la construction de $\mathbb{Q}$, on n'a plus aucun usage de ces « fractions » ni en tant qu'objets, ni en tant que vocables;

— ou bien on appelle « fractions » les rationnels, éléments de $\mathbb{Q}$, mais alors des locutions utiles comme « simplifier », « réduire au même dénominateur », etc., visiblement liées à l'idée de couple, seront vidées de leur sens.

En revanche, si, au lieu de considérer les fractions comme des êtres mathématiques, on les considère comme des *notations* — ainsi qu'on le fait usuellement pour l'expression voisine *nombre décimal* — on lève les difficultés signalées; car il est tout à fait normal que des notations *synonymes* comme $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{9}$ représentent le *même* rationnel et qu'on écrive l'*égalité* $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$; de même il est légitime qu'on cherche à donner à ce même rationnel la représentation *irréductible* $\frac{2}{3}$, etc.

En conclusion il n'y aurait pas d'empêchement grave à appeler *fraction* la notation fractionnaire la plus générale; l'usage le plus fréquent toutefois est soit arithmétique (fractions à termes entiers, ou même naturels), soit algébrique (fractions à termes polynomes).

2. Arithmétique

2.1. La fraction arithmétique « $\frac{a}{b}$ » est une notation du rapport de l'entier a à l'entier non nul b. On sait que, si l'on multiplie a et b par un même entier non nul ou qu'on les divise par un diviseur commun, toutes les fractions obtenues sont synonymes en ce sens que $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$.

2.2. *Fraction irréductible :* fraction « $\frac{a}{b}$ » telle que le P.G.C.D. de $|a|$ et $|b|$ soit 1; on montre alors que toute fraction synonyme de « $\frac{a}{b}$ » a pour termes des équimultiples de a et b.

2.3. *Fraction décimale (basale).* Une fraction est dite *décimale* quand son dénominateur est une puissance de dix; le rationnel ainsi défini est lui-même dit *rationnel décimal* et peut alors être représenté par une infinité d'autres fractions décimales. Mais il n'existe en général aucune fraction décimale synonyme d'une fraction donnée.

Extension à une base K quelconque de numération : une fraction est *basale* si son dénominateur est une puissance de K [NUMÉRATION].

2.4. *Fraction continue.* Une extension de la notion de fraction consiste à considérer l'écriture illimitée (en général) :

$$m_0 + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \dots}}}$$

dans laquelle m_0 est un naturel nul ou non, et m_1, m_2, m_3, ... sont des naturels non nuls; une telle expression est dite *fraction continue.* Si les m_i sont en nombre fini, cette expression est un rationnel x; (et, si ce rationnel se note $\frac{a}{b}$, les m_i ne sont autres que les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide pour la recherche du P.G.C.D. de a et b). Dans le cas contraire, les *réduites*

$$x_0 = m_0,\ x_1 = m_0 + \frac{1}{m_1},\ x_2 = m_0 + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2}},\ \text{etc.}$$

convergent vers un irrationnel x. Réciproquement tout réel positif peut être ainsi représenté, et de façon unique, par un « développement (limité ou illimité) en fraction continue ». Dans tous les cas, les réduites sont des approximations de plus en plus fines de x, les réduites d'indice pair par défaut, les réduites d'indice impair par excès, sauf éventuellement la dernière en cas de développement limité.

3. Algèbre.

De même que pour les polynomes il convient de distinguer deux notions :

3.1. *Fractions formelles.* Soit A un anneau intègre et unitaire; les polynomes à coefficients dans A constituent eux-mêmes un anneau intègre et unitaire; les éléments du plus petit corps dans lequel cet anneau peut être plongé se notent au moyen des *fractions formelles :*

$$\frac{(a_o, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)}{(b_o, b_1, \ldots, b_p, 0, 0, \ldots)} \qquad (a_i \in \mathrm{A},\ b_j \in \mathrm{A})$$

3.2. Si x est un élément d'un corps K construit sur l'anneau A précédent, les fractions formelles permettent de définir des applications

$$x \mapsto \frac{a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_o + b_1 x + \ldots + b_p x^p}$$

qui prennent leurs valeurs dans K; mais l'ensemble de ces valeurs n'a pas structure de corps. Ces valeurs sont souvent appelées (quoique de façon malencontreuse) *fractions rationnelles.*

ERRATUM : *Dans la notice* FRACTION *millésimée* 1969, *supprimer le* § **2.4.** *et ajouter en fin de notice ce qui suit :*

4. Fraction continue.

4.1. En théorie des nombres, nous appellerons *fraction continue finie* (resp. *infinie*) tout couple de suites finies (resp. infinies) $((a_i)\ ;\ (r_i))$ indexées par l'intervalle $[0\ ;n]$ de N (resp. par N) telles que $a_0 \in \mathbf{Z}$, $r_0 = a_0$, et, pour tout naturel i non nul,

$$a_i \in \mathrm{N}_* \qquad \text{et} \qquad r_i = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}$$

Plus formellement, on peut définir l'opération φ_i à $(i+1)$ places qui permet de calculer r_i à l'aide de $a_0, a_1, \ldots, a_i$ par :

$$\varphi_0(x) = x \ ; \text{ et}$$

$$\forall i,\ \forall x_0, \ldots \forall x_i,\ \varphi_i(x_0, x_1, \ldots x_i) = x_0 + \frac{1}{\varphi_{i-1}(x_1, \ldots x_i)}$$

Une telle fraction continue peut être notée $[a_0\ ;a_1\ ;\ldots a_n]$ (resp. $[a_0\ ;a_1\ ;\ldots a_n\ ;\ldots])$: a_i en est le terme d'indice i tandis que r_i en est la réduite d'indice i. Chaque réduite est un rationnel.

On dit que la fraction continue finie $[a_0\ ;a_1\ ;\ldots a_n]$ *représente* le rationnel x ou qu'elle est un *développement en fraction continue* de x pour exprimer que x est la dernière réduite de cette fraction continue. C'est d'ailleurs souvent le rationnel r_n lui-même qui est noté $[a_0\ ;a_1\ ;\ldots a_n]$.

La suite des réduites de toute fraction continue infinie converge vers un irrationnel. On dit que la fraction continue $[a_0 ; a_1 ; \dots a_n ; \dots]$ *représente* l'irrationnel x, ou est un *développement de x en fraction continue*, si x est la limite de la suite de ses réduites ; on écrit alors souvent $x = [a_0 ; \dots a_n ; \dots]$.

4.2. Inversement, tout nombre réel x admet au moins un développement en fraction continue. On obtient un tel développement de la façon suivante : on forme la suite (x_i) définie par

$$x_0 = x \ , \ x_{i+1} = \frac{1}{x_i - \mathrm{E}(x_i)} \quad \text{pourvu que} \quad x_i \notin \mathrm{Z}$$

puis la suite (a_i) définie par $a_i = \mathrm{E}(x_i)$.

Deux cas peuvent alors se présenter :

- Si x est irrationnel, aucun x_i n'est entier, la suite (x_i) est illimitée, ainsi que la suite (a_i) : cette dernière est un développement de x, et l'on démontre qu'il est unique. Un irrationnel est algébrique de degré 2 ssi la suite des termes de son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

Exemples : Le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue est $[1 ; 2 ; \underline{2} ; \dots]$, celui du nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est $[1 ; 1 ; \underline{1} ; \dots]$, tandis que celui de e est $[2 ; 1 ; 2 ; 1 ; 1 ; 4 ; 1 ; 1 ; 6 ; 1 ; 1 ; 8 ; 1 ; \dots ; 1 ; 2k ; 1 ; \dots]$.

- Si x est rationnel, le procédé amène à un certain x_n entier, et il est impossible de continuer ; la suite (a_i) est elle-même limitée, et (si elle ne se réduit pas à a_0) son dernier terme est supérieur à 2. La suite $[a_0 ; a_1 ; \dots ; a_n]$ est alors *un* développement du rationnel x ; de plus, si ce rationnel est $\dfrac{p}{q}$, on reconnaît que les a_i sont les quotients euclidiens qui apparaissent dans l'algorithme d'Euclide pour la recherche du pgcd des entiers p et q. Noter enfin que le rationnel x possède un *second* développement en fraction continue, qui est $[a_0 ; a_1 ; \dots ; a_n - 1 ; 1]$.

Exemple : Les développements en fractions continues de $\dfrac{355}{113}$ sont $[3 ; 7 ; 16]$ et $[3 ; 7 ; 15 ; 1]$.

4.3. $[a_i]$ étant le développement en fraction continue d'un réel non entier x, si on effectue mécaniquement les réductions successives au même dénominateur qui se présentent dans l'expression de la réduite r_i en fonction des termes $a_0, a_1 \dots a_i$, on obtient une fraction irréductible «$\dfrac{p_i}{q_i}$» telle qu'aucune fraction de dénominateur inférieur au sien ne donne de x une évaluation strictement meilleure que r_i ; cette évaluation est par défaut si i est pair, par excès si i est impair.

Exemple : $\dfrac{22}{7}$ et $\dfrac{355}{113}$ sont respectivement les réduites d'indice 1 et d'indice 3 du développement en fraction continue de π.

Remarque : L'intérêt des fractions irréductibles «$\dfrac{p_i}{q_i}$» est tel qu'on préfère souvent leur réserver le terme de réduites plutôt qu'aux rationnels qu'elles représentent. Ce choix se justifie d'autant plus que les suites (p_i) et (q_i) se déterminent simplement par récurrence à partir de la suite (a_i), ce qui n'est pas le cas de la suite (r_i).

4.4. On peut également définir des fractions continues généralisées, dans lesquelles les 1 figurant dans l'expression des réduites sont remplacés par des entiers quelconques ; mais la convergence et même l'existence de la suite des réduites n'est plus assurée.