Bulletin de l'APMEP n°355 - Septembre 1986

les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiative, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions.

Cette rubrique accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes", ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Les énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante : (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
85 bis, rue Aristide BRIAND
87100 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 116 (J.-L. NICOLAS, Limoges)

Désignons par $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, ..., la suite des nombres premiers. Quels sont tous les entiers k tels que $p_1p_2...p_k < k^k$?

ÉNONCÉ N° 117 (J. LEGRAND, Biarritz)

Construire un triangle connaissant les trois points, autres que ses sommets, en lesquels ses médianes coupent son cercle circonscrit.

ÉNONCÉ N° 118 (J. BERRARD, Paris)

Pour tout tétraèdre T désignons par S' et par S la plus grande et la plus petite des aires des projections orthogonales de T sur des plans. Déterminer le plus grand réel k tel que pour tout tétraèdre on ait : $S' \geqslant kS$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 101 (Rallye Mathématique de Franche-Comté, 1976)

Soient D et D' deux droites de l'espace.

Peut-on trouver deux rotations, l'une R d'axe D, l'autre R' d'axe D', telles que $R(D') = R'(D)$?

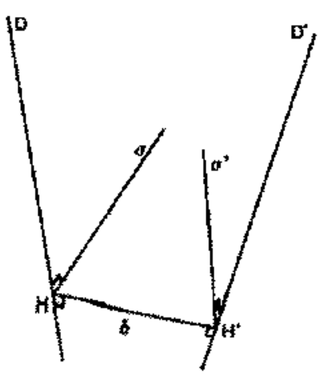
SOLUTION (J.-C. FONTAINE, Besançon)

1er cas : Supposons D et D' parallèles. Le cylindre de révolution d'axe D, contenant D' et le cylindre de révolution, d'axe D' contenant D se coupent suivant deux droites. Soit Δ l'une d'elles. La rotation R d'axe D envoyant D' sur Δ et la rotation R' d'axe D' envoyant D sur Δ répondent à la question.

2e cas : Supposons D et D' concourantes. Le cône de révolution d'axe D contenant D' et le cône de révolution d'axe D' contenant D se coupent suivant deux droites.

Soit Δ l'une d'elles. La rotation R d'axe D envoyant D' sur Δ et la rotation R' d'axe D' envoyant D sur Δ répondent à la question.

3e cas : Reste à envisager le cas où D et D' ne sont pas coplanaires. On va montrer qu'alors il est impossible de trouver R et R' répondant à la question. Pour cela considérons le retournement δ autour de la perpendiculaire commune HH' à D et D'. Il est possible de déecomposer la rotation R en le produit de deux retournements $R = \sigma \circ \delta$ où σ est un retournement dont l'axe est perpendiculaire en H' à D' de même $R' = \sigma' \circ \delta$ où σ' est un retournement dont l'axe est perpendiculaire en H' à D'.



Puisque $\delta(D) = D$ et $\delta(D') = D'$ l'égalité $R(D') = R'(D)$ équivaut à $\sigma(D') = \sigma'(D) = \Delta$.

σ envoie D sur D ; D′ sur Δ ; Δ sur D′. σ' envoie D sur Δ ; D′ sur D′ ; Δ sur D d'où $\sigma' \circ \sigma$ envoie D sur Δ, D′ sur D ; Δ sur D′. Et par suite $(\sigma' \circ \sigma)^3$ envoie D sur D ; D′ sur D′ ; Δ sur Δ. $(\sigma' \circ \sigma)^3$ est donc un vissage qui conserve D et D′ donc c'est l'identité ou le retournement δ. Donc c'est une rotation. Il en résulte que le vissage $\sigma' \circ \sigma$ est une rotation (car si le vissage $\sigma' \circ \sigma$ contenait une translation $\vec{T}$ dans sa décomposition en produit d'une rotation et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe, alors le vissage $(\sigma' \circ \sigma)$ contiendrait la translation $3\vec{T}$ dans sa décomposition).

Or, pour que le composé des deux retournements σ et σ' soit une rotation, il faut que leurs axes soient concourants. L'axe de σ n'est pas la perpendiculaire HH′ sinon on aurait $\sigma = \delta$ et par suite $\sigma'(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$; D et D′ seraient concourantes. De même l'axe de σ' n'est pas HH′. Par suite les axes de σ, de σ' et HH′ définissent un plan auquel sont perpendiculaires D et D′. D et D′ seraient donc parallèles, contraire à l'hypothèse.

Conclusion :

On peut trouver les deux rotations R et R′ telles que $\mathrm{R}(\mathrm{D}') = \mathrm{R}'(\mathrm{D})$ si et seulement si leurs axes D et D′ sont coplanaires.

Autres solutions : J. LEMAIRE (Lille), C. NOTARI (Noé), C. TISSERON (Bizerte). (Ces deux dernières solutions sont analytiques).

ÉNONCÉ N° 102 (ROUX, Le Puy)

Quels sont tous les couples d'entiers naturels (x,y) pour lesquels $x^6 + 27y^6$ admet au moins trois diviseurs premiers distincts ?

SOLUTION de Gérard COQUET (Valenciennes) et l'auteur.

La réponse est immédiate dans les cas $x = 0$ ou $y = 0$. Ecartons ces cas triviaux en supposant $xy \neq 0$.

Sans perte de généralité, on peut supposer x et y premiers entre eux, car si $x = \mathrm{d}X$ et $y = \mathrm{d}Y$ avec $(X,Y) = 1$ alors $x^6 + 27y^6 = \mathrm{d}^6(X^6 + 27Y^6)$.

Observons que $x^6 + 27y^6 = \mathrm{A.B.C}$ où

$$\mathrm{A} = x^2 + 3y^2 - 3xy, \quad \mathrm{B} = x^2 + 3y^2, \quad \mathrm{C} = x^2 + 3y^2 + 3xy.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer x non divisible par 3, car si $x = 3Y$, posant $X = y$, alors $x^6 + 27y^6 = 27(X^6 + 27Y^6)$.

Dans ces conditions, A, B, C *sont premiers entre eux deux à deux*, en effet si p est un diviseur premier commun à A et B alors p divise $\mathrm{B} - \mathrm{A} = 3xy$, donc : ou $p = 3$, ou p divise x, ou p divise y, ce qui, compte tenu du fait que p divise $x^2 + 3y^2$, conduit chaque fois à une contradiction.

Si p divise B et C, le raisonnement est le même. Enfin si p divise A et C alors p divise $C-A=6xy$, comme le cas $p=2$ est exclu par le fait que x et y ne sont pas tous les deux pairs, donc que A et C sont impairs, il résulte que p divise $3xy$ et par suite aussi x^2+3y^2, nous avons vu que ceci est impossible.

Comme $0<A<B<C$ nous pouvons affirmer que si $A\neq 1$ le produit A.B.C admet au moins trois diviseurs premiers.

Supposons maintenant $A=1$: $x^2-3xy+3y^2-1=0$, le discriminant de ce trinôme en x est $\Delta=9y^2-4(3y^2-1)=4-3y^2$ ce qui est négatif si $y>1$. Donc si $A=1$ nécessairement $y=1$, et alors

$$\begin{array}{lll} x^2-3x+2=0 & \text{donne} & x=1 \quad \text{ou} \quad x=2 \\ x=1,\ y=1 & \text{donne} & x^4+27y^4 = 28 = 2^2.7 \\ x=2,\ y=1 & \text{donne} & x^4+27y^4 = 91 = 7.13 \end{array}$$

Dans ces deux cas, x^4+27y^4 n'a que deux diviseurs premiers.

En conclusion : x^4+27y^4 admet au moins trois diviseurs premiers dans les cas suivants :

1) $x=0$ et y a au moins deux diviseurs premiers autres que 3.

2) $y=0$ et x a au moins trois diviseurs premiers.

3) $xy\neq 0$ en excluant les deux éventualités suivantes : $x=y=2^a.7^b$ et $x=2y=2.7^a.13^b$, où a et b sont des entiers naturels quelconques.

Autres solutions : Robert CHADARD (Les Ulis) et Charles NOTARI (Noé).

ÉNONCÉ N° 103 (CUCULIÈRE, Paris)

Deux demi-cercles de diamètres $AC=a$ et $AE=b$ sont tangents intérieurement. On construit le cercle C_1 tangent à AC et aux deux demi-cercles, puis le cercle C_2 tangent à C_1 et aux deux demi-cercles, et ainsi de suite... Calculer la somme des aires des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$
(Voir figure page 734 du *Bulletin* n° 350).

SOLUTION de Messieurs SIPRA (de Mirepoix) et MAGION (de Foix).

Supposons par exemple $a>b$.

Le cercle de diamètre [AE] a pour centre I et pour rayon $AI=\dfrac{b}{2}$.

Le cercle de diamètre [AC] a pour centre O et pour rayon $AO=\dfrac{a}{2}$.

Considérons l'inversion f de pôle A et de puissance $K_0=AE.AC=ab$; l'image du cercle (I) est la droite Δ_I, orthogonale à (AC) en C, l'image du cercle (O) est la droite Δ_O, orthogonale à (AC) en E. L'image d'un cercle (J_n) tangent à (I) et (O) est un cercle (L_n) tangent à Δ_I et Δ_O, dont le centre L_n est sur la droite Δ_G, médiatrice de (E,C). Soit F_0 le milieu de (E,C) :

$$AF_0 = \frac{a+b}{2}$$

Le rayon R'_n de chaque (L_n) est constant : $R'_n = R = \frac{a-b}{2}$.

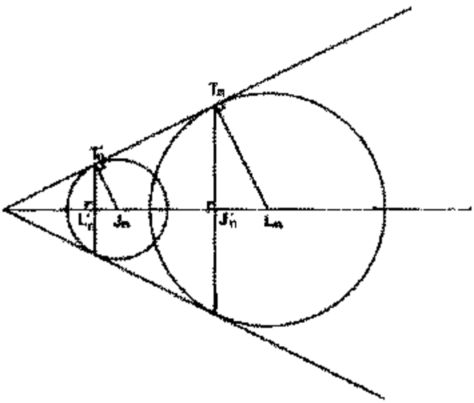


figure 1

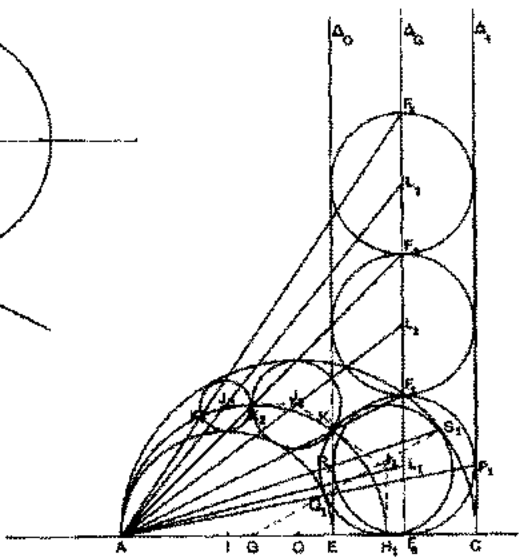


figure 2

Les cercles (J_n) et (L_n) sont inverses l'un de l'autre, mais ils sont aussi homothétiques dans une homothétie de centre A, et de rapport

$$k_n = \frac{AT'_n}{AT_n} \quad \text{avec} \quad AT_n \times AT'_n = K_0 \text{ , d'où } \quad k_n = \frac{K_0}{\overline{AT'_n}^2}$$

et enfin $R_n = k_n \times R'_n = \frac{K_0 R}{\overline{AT_n}^2}$; or $\overline{AT_n}^2$ est la puissance de A pour le cercle (L_n) et donc égale à : $\overline{AL_n}^2 - R^2$.

Les cercles (L_n) étant tous tangents deux à deux, nous avons immédiatement :

$$F_0L_n = (2n-1)R = (n-\frac{1}{2})(a-b)$$

Donc $$\overline{AL}_n^2 = \overline{AF}_0^2 + \overline{F_0L}_n^2 = \overline{AF}_0^2 + (n-\frac{1}{2})^2 (a-b)^2$$

et $$\overline{AT}_n^2 = \overline{AL}_n^2 - R^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 (a-b)^2$$

d'où $$\boxed{\overline{AT}_n^2 = F(n) = (n-\frac{1}{2})^2 (a-b)^2 + ab}$$

Et enfin $$\boxed{R_n = \frac{ab(a-b)}{2F(n)}}$$

Si nous posons $p = \dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$, alors $F(n) = (a-b)^2 [(n-\frac{1}{2})^2 + p^2]$

$$\text{et} \quad R_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{(a-b)} \cdot \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 + p^2}$$

La surface à calculer est donc

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \pi R_n^2 = \frac{\pi}{4} \frac{a^2 b^2}{(a-b)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 + p^2}\right]^2$$

La théorie des fonctions d'une variable complexe nous donne la formule :

$$f(x) = \frac{\pi \operatorname{th}(\pi x)}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 + x^2}$$

Dérivons $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{[(n-\frac{1}{2})^2 + x^2]^2}$ et nous concluons donc :

$$S = \frac{\pi}{4} \times \frac{a^2b^2}{(a-b)^2} \times \frac{f'(p)}{-2p}$$

Or $$f'(p) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi[1-\operatorname{th}^2(\pi p)]p - \operatorname{th}(\pi p)}{p^2}$$

Simplifions cette expression en posant $r = 2\pi p$

$$1 - \operatorname{th}^2(\pi p) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\pi p)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{r}{2}} = \frac{1}{1+\operatorname{ch} r}$$

et $$\frac{2\,\text{th}\,(\pi p)}{1-\text{th}^2(\pi p)} = \text{sh}\,(2\pi p) = \text{sh}\,r$$

d'où $$f'(p) = \frac{\pi}{2p^2} \times \frac{r-\text{sh}\,r}{1+\text{ch}\,r} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(a-b)^2}{ab} \times \frac{r-\text{sh}\,r}{1+\text{ch}\,r}$$

$$S = \frac{\pi}{4} \times \frac{a^2b^2}{(a-b)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(a-b)^2}{ab} \times \frac{\text{sh}\,r - r}{1+\text{ch}\,r} \times \frac{\pi}{r}$$

Conclusion

$$\boxed{S = \frac{\pi^3\, ab\, (\text{sh}\,r - r)}{8r\,(1+\text{ch}\,r)} \quad \text{avec} \quad r = \frac{2\pi\sqrt{ab}}{a-b}}$$

Autres bonnes solutions : COLLET (Lille) et VIDIANI (Dijon), J. LEGRAND (Biarritz), B. MOULIN (Aix-en-Provence), Martine PAGÈS et Jacques MOISAN (Tours), et Jean-Paul ROUX (Unieux) qui nous dit être un physicien.

Solutions partielles : Madame S. CHRÉTIEN (Villemomble), Jean-Louis GARCIN (Paris), Jean LEMAIRE (Lille), Charles NOTARI (Noé), et l'auteur.

Remarques :

1. S s'écrit aussi :

$$S = \frac{\pi^2}{16}\,(a-b)\sqrt{ab}\;\text{th}\left(\frac{\pi\sqrt{ab}}{a-b}\right) - \frac{\pi^3\, ab}{16\,\text{ch}^2\left(\frac{\pi\sqrt{ab}}{a-b}\right)}$$

2. L'aire comprise entre les deux demi-cercles donnés est $\sigma = \frac{\pi}{8}(a^2-b^2)$ on remarque aisément que $\lim\limits_{a\to b} \frac{S}{\sigma} = \frac{\pi}{4}$.

3. Si a tend vers l'infini, le demi-cercle de diamètre [AC] a pour position limite la perpendiculaire en A à (AE). On trouve alors $S = \frac{b^2\pi^5}{96}$.

4. On peut aussi reposer le problème en prenant C_1 non pas tangent à (AC), mais de diamètre [CE]. La somme des aires S' des cercles successivement tangents est alors :

$$S' = \frac{\pi^2(a-b)\sqrt{ab}}{16\,\text{th}\left(\frac{\pi\sqrt{ab}}{a-b}\right)} + \frac{\pi^3\, ab}{16\,\text{sh}^2\left(\frac{\pi\sqrt{ab}}{a-b}\right)}$$

5. On remarque que l'on a toujours $S' > S$ et que $\lim\limits_{a\to b} \frac{S'}{\sigma} = \frac{\pi}{4}$.