les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Cette rubrique accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Les énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante : (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
85 bis rue Aristide BRIAND
87100 LIMOGES

ENONCÉS

ÉNONCÉ N° 110 (Olympiades 1984)

Quelles sont les valeurs extrêmes prises par l'expression : $ab+bc+ca-2abc$; a, b,c étant des réels positifs de somme 1 ?

ÉNONCÉ N° 111 (J. CHONE, Thiers)

Entre les carrés de deux nombres triangulaires distincts non nuls existe-t-il toujours un cube d'entier ?

ÉNONCÉ N° 112 (D. ROUX, Limoges)

Un anneau, dans lequel tout élément x vérifie $x^4=x$, est-il nécessairement commutatif ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 95 (ENGEL, R.F.A.)

Soient a, b, c trois entiers premiers entre eux deux à deux. Quel est le plus grand entier qui ne peut pas s'écrire sous la forme $bcx + cay + abz$ où x,y,z sont trois entiers ?

SOLUTION d'un candidat anglais

La réponse est $N = 2abc - ab - bc - ca$, en effet :

1) Si on avait $N = bcx + cay + abz$,
alors $(x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab = 2abc$; comme bc est premier avec a, il résulterait (théorème de Gauss) que a divise $x+1$; soit $x+1 = \alpha a$ où $\alpha \in \mathbf{N}^*$, de même $y+1 = \beta b$, $\beta \in \mathbf{N}^*$ et $z+1 = \gamma c$, $\gamma \in \mathbf{N}^*$.

Alors $(x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab = (\alpha + \beta + \gamma)abc \geqslant 3abc$. Contradiction. Donc N ne peut pas s'écrire sous la forme $bcx + cay + abz$.

2) Inversement, soit m un entier tel que $m > N$.

Lorsque x parcourt l'ensemble des entiers de 1 à a, y celui des entiers de 1 à b, z celui des entiers de 1 à c, l'expression $xbc + yca + zab$ ne prend que des valeurs distinctes modulo(abc), car :
si $\quad xbx + yca + zab \equiv x'bc + y'ca + z'ab \quad \mathrm{mod}(abc)$,
alors : $\quad 0 \equiv (x-x')bc + (y-y')ca + (z-z')ab \quad \mathrm{mod}(abc)$;
puisque bc est premier avec a il résulte du théorème de Gauss que a divise $x-x'$. Comme x et x' sont entre 1 et a cela entraine $x = x'$. De même $y = y'$ et $z = z'$.

Donc le nombre des valeurs prises, modulo(abc), par l'expression $xbc + yca + zab$ est abc, ce qui entraine que toutes les valeurs modulo(abc) sont prises, en particulier la valeur $-m$(modulo abc).

Donc : il existe x_0, y_0, z_0 ; $1 \leqslant x_0 \leqslant a$; $1 \leqslant y_0 \leqslant b$; $1 \leqslant z_0 \leqslant c$, et $n \in \mathbf{N}$ tels que $m = nabc - x_0bc - y_0ca - z_0ab$
ce qui est égal à $(a-x_0)bc + (b-y_0)ca + ((n-2)c - z_0)ab$

Si $n \leqslant 2$, alors $m \leqslant 2abc - bc - ca - ab = N$. Donc $n > 2$.

Par suite $x = a - x_0 \geqslant 0$, $y = b - y_0 \geqslant 0$ et $z = (n-2)c - z_0 \geqslant c - z_0 \geqslant 0$ sont trois entiers tels que $m = xbc + yca + zab$. cqfd.

AUTRE SOLUTION : BOUTELOUP (Rouen), R. CHADARD (Les Ulis), J. LEMAIRE (Lille), P. MANAC'H (Lorient), C. NOTARI (Noé), et une réponse fausse.

Remarques :

1) Le résultat démontré généralise le suivant :
Si a et b sont deux entiers premiers entre eux, le plus grand entier qui ne peut pas s'écrire sous la forme $xa + yb$, avec x et y entiers naturels est

$ab-a-b$. Référence : *Joyaux mathématiques* de ROSS HONSBERGER (CEDIC) volume 2, chapitre 13.

2) Cet énoncé a été posé (sous une forme modifiée) aux *Olympiades internationales de Mathématiques* qui se sont déroulées du 1er au 12 juillet 1983 au Lycée LOUIS LE GRAND à PARIS. Parmi les nombreuses bonnes solutions recueillies, nous avons pu admirer celle d'un candidat polonais qui a démontré la généralisation suivante :

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers premiers entre eux deux à deux. Le plus grand entier qui n'est pas de la forme

$x_1a_2\ldots a_n + a_1x_2\ldots a_n + \ldots + a_1a_2\ldots x_n$ où $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des entiers naturels

est $N = a_1a_2\ldots a_n\left(n-1-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$.

3) J'ai posé (en anglais) à Monsieur ENGEL, qui conduisait la délégation de R.F.A., la question suivante :

Si a, b, c sont trois entiers premiers entre eux deux à deux, quel est le plus grand entier qui ne peut pas s'écrire sous la forme $xa+yb+zc$ avec x, y, z entiers ? Sa réponse fut :

"It's an open question !"

ÉNONCÉ N° 96 (D. ROUX)

Combien existe-t-il d'entiers n pour lesquels n^3 est égal à une somme de plusieurs carrés d'entiers consécutifs ?

SOLUTION de Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE (Paris) et l'auteur.

Ce problème s'écrit : $n^3 = (x+1)^2 + \ldots + (x+y)^2$, $n \geqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 2$, soit : $6n^3 = 6yx^2 + 6y(y+1)x + y(y+1)(2y+1)$.

On a là l'équation d'une surface cubique S sur laquelle on cherche des points à coordonnées entières. On observe que S contient la droite D($n=y=0$). L'idée va être de fibrer la surface S en coniques au moyen de plans passant par D, pour se ramener à la recherche de points entiers sur des coniques, c'est-à-dire essentiellement à la résolution d'équations de PELL-FERMAT.

Le plus simple est d'utiliser le plan d'équation $y=n$, c'est-à-dire de se poser le problème plus restrictif suivant :

Quels sont les entiers n pour lesquels n^3 est la somme de n carrés consécutifs ?

La conique $6y^2 = x^2 + 6x(y+1) + (y+1)(2y+1)$ s'écrit aussi : $3(2x+y+1)^2 - 11y^2 = 1$; soit en posant $Y=y$ et $X=6x+3y+3$: $X^2 - 33Y^2 = 3$. La solution minimale est $(X_0 ; Y_0) = (6;1)$.
Celle de l'équation associée $X^2 - 33Y^2 = 1$ est (23 ; 4). On en déduit la solution générale, donnée par $X_n + Y_n\sqrt{33} = \pm(23 \pm 4\sqrt{33})^n(6 \pm \sqrt{33})$. On

en déduit les relations de récurrence suivantes, ne donnant que des coordonnées possibles :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 23X_n + 132Y_n \\ Y_{n+1} = 4X_n + 23Y_n. \end{cases}$$ Revenant aux coordonnées initiales cela équivaut à : $\begin{cases} x_{n+1} = 11x_n + 16y_n + 5 \\ y_{n+1} = 24x_n + 35y_n + 12 \end{cases}$ avec $(x_0 ; y_0) = (0 ; 1)$.

Il y a donc une infinité de solutions, les premières sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 47 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 988 \\ 2161 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 45\,449 \\ 99\,359 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\,089\,688 \\ 4\,568\,853 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 96\,080\,221 \\ 210\,044\,879 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\,417\,600\,500 \\ 9\,657\,496\,081 \end{pmatrix}, \ldots \text{ (avec } n = y).$$

UNE SEULE AUTRE SOLUTION, de Marie-Nicole GRAS (Besançon) qui obtient l'identité suivante :

$(48k^6 - k^2)^2 = (48k^9 - 3k^3 - 24k^6 + 1)^2 + \ldots + (48k^9 - 3k^3 + 24k^6 - 1)^2$ contenant $48k^6 - 1$ carrés consécutifs (où $k \in \mathbb{N}^*$).

Henri CAMOUS (Marseille) fait remarquer que la question : "Combien existe-t-il de naturels dont le carré est égal à une somme de cubes consécutifs ?" est plus facile en raison de l'identité :

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

qui fait l'objet du jeu-problème n° III 3 de son ouvrage *"Jouer avec les maths"* (Editions d'Organisation).

Commentaires :

1) La question suivante : *Quel est le plus petit entier $n > 1$ dont le cube est une somme de carrés consécutifs ?*, se résoud aisément à l'aide d'un petit programme pour calculatrice programmable, on obtient : $n = 47$, et avec un ordinateur on peut pousser le calcul plus loin. C'est ainsi que j'ai obtenu le résultat suivant :

Les seuls entiers inférieurs à dix milliards qui sont chacun à la fois un cube d'entier et une somme de carrés consécutifs sont :

$103\,823 = 47^3 = 22^2 + 23^2 + \ldots + 68^2$ (47 carrés)

$274\,625 = 65^3 = 90^2 + 91^2 + \ldots + 115^2$ (26 carrés)

$781\,229\,961 = 921^3 = 2115^2 + 2116^2 + \ldots + 2276^2$ (162 carrés)

2) Par contre, je ne connais pas la réponse à la question suivante : *quel est le plus petit entier $n > 1$ tel qu'une somme de n carrés consécutifs puisse être un cube ?*

D'après ce qui précède la réponse à cette question est inférieure ou égale à 26.

— Ce n'est pas 2 : ceci a fait l'objet du problème 167 dans le *Petit Archimède* (voir solution dans le *Nouvel Archimède* n° 101, page 33).

— Ce n'est pas 3, car si $a^3=(x-1)^2+x^2+(x+1)^2$ alors $a^3=3x^2+2$, modulo 3 ; ceci entraine $a=2+3p$ d'où $8+36p+54p^2+27p^3=3x^2+2$, par suite $9p^3+18p^2+12p=x^2-2$; ce qui entraine $x^2\equiv 2 \pmod 3$, impossible.

— Ce n'est pas 4, car si $a^3=(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 = 4x^2+4x+6$ alors a est pair : $a=2p$ d'où $4p^3=2x^2+2x+3$; ce qui est impossible modulo 2.

— Ce n'est pas 5, car si $a^3=(x-2)^2+\ldots+(x+2)^2=5x^2+10$ alors $a=5p$ d'où $25p^3=x^2+2$, ce qui entraine $x^2\equiv 3 \pmod 5$, impossible.

Par des calculs analogues il est facile d'éliminer les entiers 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25.

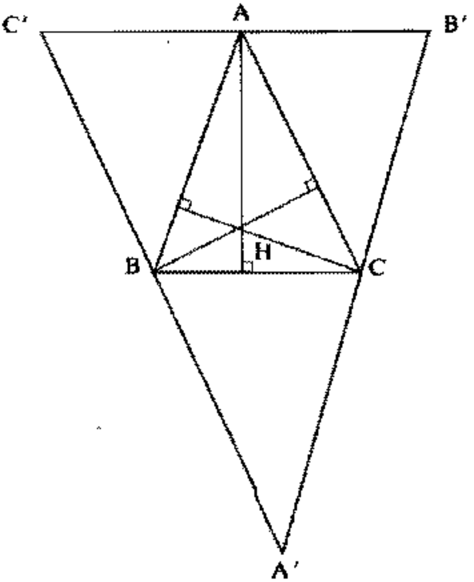
Donc la réponse à la question ci-dessus ne peut être que l'une des sept suivantes : 6, 11, 13, 16, 22, 23, 26.

Mais l'étude de l'équation de BACHET-BAKER, du type $y^3=x^2+k$, associée à chacun de ces cas semble délicate.

ÉNONCÉ N° 97 (CONCOURS GÉNÉRAL, 1984)

Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Quelle est la plus petite valeur de f(M) = AM.BC + BM.CA + CM.AB, M décrivant son plan ?

SOLUTION de Gabriel FRAISSE (Ferrals les Corbières) :



Soient A', B', C' les images respectives de A, B, C dans l'homothétie de centre G, l'isobarycentre de (A, B, C), et de rapport -2.

A, B, C sont les milieux respectifs de (B', C'), (C', A') et (A', B').

Désignons par x, y, z les distances respectives de M aux droites $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$.

L'aire du triangle $MB'C'$ est xBC ; celle du triangle $MC'A'$ est yCA ; celle du triangle $MA'B'$ est zAB.

Si M est intérieur au triangle $A'B'C'$, l'aire du triangle $A'B'C'$ est : $xBC + yCA + zAB$.

C'est aussi $4S$ avec S aire du triangle ABC.

Or : $x \leqslant AM$ (égalité si et seulement si M appartient à la médiatrice de (B', C')) ;
$y \leqslant BM$ (égalité si et seulement si M appartient à la médiatrice de (C', A')) ;
$z \leqslant CM$ (égalité si et seulement si M appartient à la médiatrice de (A', B')).

Ainsi : $f(M) \geqslant 4S$. Il y a égalité si et seulement si M est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$, c'est à dire l'orthocentre H du triangle ABC.

H est intérieur au triangle $A'B'C'$ si et seulement si les trois angles de ce triangle sont aigus, c'est-à-dire si et seulement si les trois angles du triangle ABC sont aigus. Cette condition est supposée réalisée.

Conclusion : la plus petite valeur de $f(M)$ est quatre fois l'aire de ABC. Elle est atteinte lorsque M est en H.

AUTRES SOLUTIONS : BOUTELOUP (Rouen), J.C. CARREGA (Lyon), R. CHADARD (Les Ulis), S. CHRETIEN (Villemonble), R. CUCULIERE (Paris), F. DE NOYELLE (Cambrai), M.N. GRAS (Besançon), M. KILANI-CHEVALORE (Tunis), J. LEGRAND (Biarritz), J. LEMAIRE (Lille), P. MANAC'H (Lorient), C. NOTARI (Noé), D. TOURNIER (St Denis de la Réunion).

Remarques :

1) Monsieur Robert CHADARD a poursuivi l'étude dans le cas ou l'un des angles (par exemple l'angle en A) est obtus. Sa conclusion est la suivante :

Dans ce cas le minimum de $f(M)$ vaut $2\,AB.AC$, et il est obtenu pour $M = A$.

2) MM. BOUTELOUP d'une part et CUCULIERE d'autre part ont envoyé d'importantes contributions, visant à généraliser le problème à des fonctions du type $f(M) = pMA + qMB + rMC$ où p, q, r sont des réels strictement positifs. Ils utilisent $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) = \vec{0}$. L'essentiel de leurs conclu-

sions peut être lu dans l'article "*Extrémisme pondéré*" de Jean Maurice CHEVALLIER (Saint Maure) ; Bulletin A.P.M.E.P. n° 330 de septembre 1981, pages 731 à 733.

Compléments

Cet énoncé 97 a intéressé un bon nombre de lecteurs. Cela m'incitera à poser d'autres problèmes extrémaux dans les triangles. En attendant voici quelques énoncés plus ou moins classiques de propriétés de ce genre :

1) Le minimum de AM + BM + CM est atteint au point de Fermat, ou centre isodynamique du triangle, point d'où l'on voit chaque côté sous un angle de 120 degrés, en supposant chaque angle A,B,C inférieur à 120 degrés.

2) Le minimum de la fonction de Leibniz $AM^2 + BM^2 + CM^2$ est atteint au centre de gravité G du triangle.

3) Le produit AM.BM.CM prend des valeurs extrémales en F et F', foyers de l'ellipse tangente aux côtés du triangle ABC en leurs milieux. (cf. exercice d'Olympiade n° 6, Bulletin n° 344, page 436).

Désignons maintenant par $d_A(M)$, $d_B(M)$, $d_C(M)$ les distances de M aux côtés (BC), (CA), (AB) respectivement.

4) Les valeurs extrêmales de $d_A(M) + d_B(M) + d_C(M)$, M parcourant l'intérieur du triangle ABC sont prises en l'un des sommets de ce triangle.

5) Le minimum de $d_A^2(M) + d_B^2(M) + d_C^2(M)$ est atteint au point de Lemoine du triangle : point de concours des symédianes.

6) Le maximum du produit $d_A(M).d_B(M).d_C(M)$, M parcourant l'intérieur du triangle ABC est atteint au centre de gravité de ce triangle.

COURRIER DE LECTEUR

Monsieur M. BALAZARD, jeune chercheur de l'équipe de théorie des nombres à l'UNIVERSITE DE LIMOGES vient de démontrer la conjecture émise par M. MORDEFROID (Lons-le-Saunier), énoncée page 746 du Bulletin n° 350 (septembre 1985), à propos de l'énoncé n° 88 (de EHRHART) :

Si n est un entier naturel, $n > 7$, il existe un entier k tel que $1 < k < n$ et $(k, 2n+1) = (k+1, 2n+1) = 1$.

Démonstration : Notons $r = \omega(2n+1)$ le nombre des diviseurs premiers de $2n+1$ et $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ la suite ordonnée de ces diviseurs.

Si $p_1 > 3$, alors $k = 2$ convient dans l'énoncé. Nous supposerons donc que $p_1 = 3$. Si $r = 1$, $2n+1$ est une puissance de 3 et $k = 4$ convient. Nous supposerons donc $r \geqslant 2$. Si $p_2 > 5$, $k = 4$ convient. Nous supposerons donc que $p_2 = 5$. Si $r = 2$ $2n+1 = 3^a 5^b$ avec $a + b \geqslant 3$ donc $n \geqslant 22$ et $k = 7$ convient. Nous supposerons donc $r \geqslant 3$.

Soit maintenant k' un entier tel que $1 \leqslant k' \leqslant 2n+1$ et $(k', 2n+1) = 1$. On a évidemment $1 \leqslant k' \leqslant 2n-1$. Si de plus $k' \neq 1, n, 2n-1$ deux cas se présentent :

— Soit, $1 < k' < n$ et $k = k'$ convient.

— Soit, $n < k' < 2n-1$ et $k = 2n - k'$ convient car tout diviseur de $2n+1$ et de $2n-k'$ divise aussi $k'+1$, donc vaut 1, et tout diviseur de $2n+1$ et de $2n-k'+1$ divise aussi k' donc vaut 1. Enfin $1 < 2n - k' < n$.

Ceci montre qu'il suffit de prouver qu'il y a au moins 4 entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$ et $(k, 2n+1) = (k+1, 2n+1) = 1$. En effet, ces entiers vérifient $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$ et au moins l'un d'entre eux sera différent de 1, de n, et de $2n-1$.

Or le théorème chinois (*) montre que le nombre des entiers k tels que : $1 \leqslant k \leqslant p_1 \ldots p_r$, $k \not\equiv 0 \pmod{p_i}$, $k \not\equiv -1 \pmod{p_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$ est exactement $(p_1-2)(p_2-2)\ldots(p_r-2) \geqslant (3-2)(5-2)(7-2) = 15 > 4$.

Comme ces entiers sont tels que $1 \leqslant k \leqslant 2n+1$ et $(k, 2n+1) = (k+1, 2n+1) = 1$, le résultat est démontré.

Rappelons la signification géométrique de cette propriété arithmétique : Dans le Bulletin n° 350 nous avions appelé *triangle propre* tout triangle qui porte comme seuls nœuds d'un quadrillage ses sommets et n points intérieurs.

Nous savons que *pour $n = 4$ ou pour $n = 7$ les points intérieurs sont nécessairement tous alignés* (sur une droite passant par l'un des sommets du triangle).

Nous sommes maintenant en mesure d'affirmer que *cette propriété n'a lieu que pour $n = 2$ et pour ces deux entiers 4 et 7*, car pour tout entier $n > 2$ autre que 4 et 7 on peut construire des triangles propres ayant n points intérieurs non tous alignés.

(*) Pour une présentation historique de ce théorème, voir : L'univers mathématique de P. DAVIS et R. HERSH (Gauthier-Villars, 1985), pages 177 à 185.