les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions.

Cette rubrique accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Les énoncés et les solutions sont à envoyer à l'adresse suivante : (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique *ROUX*,
85 bis rue Aristide *BRIAND*.
87100 *LIMOGES*

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ n° 113 (D. RIESZ, Dijon).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = x^n \ln(x)$. Calculer : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{n!} f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)$

(où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de f_n.

ÉNONCÉ n° 114 (E. EHRHART, Strasbourg).

Calculer le volume d'un polyèdre convexe dont les 12 faces sont des triangles équilatéraux, de côtés de même longueur a.

ÉNONCÉ n° 115 (J. DABLANC, Viroflay).

Nous dirons qu'un rectangle est "semi-entier" si au moins un de ses côtés a pour longueur un nombre entier. Si un rectangle peut être partagé en un nombre fini de rectangles semi-entiers, est-il nécessairement semi-entier ?

Note : précisons que les noms mentionnés à côté des énoncés sont ceux des collègues qui les ont communiqués à la rubrique, ce qui ne signifie pas nécessairement qu'ils en soient toujours les auteurs. Il est en effet parfois difficile de déterminer l'origine et la véritable paternité d'une idée. A cet égard, je ne manquerais pas de porter à la connaissance des lecteurs toute précision ou rectification qui viendraient à m'être signalées.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ n° 98 (J.C. CARREGA, Lyon)

Trouver le plus petit nombre réel k tel que, pour tout triangle d'aire S et de périmètre $2p$, on ait $S \leqslant kp^2$.

SOLUTION de Yvan GRIMALDI (Bertangles)

La formule de Héron permet d'écrire :

$$\frac{S}{p^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{p}\right)\left(1 - \frac{b}{p}\right)\left(1 - \frac{c}{p}\right)}$$

Observons que les réels $1 - \frac{a}{p}$, $1 - \frac{b}{p}$, $1 - \frac{c}{p}$ sont positifs et ont pour somme 1. Par suite leur produit est maximum lorsqu'ils sont égaux(*) : $1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{p} = 1 - \frac{c}{p} = \frac{1}{3}$ (d'où $a = b = c = \frac{2p}{3}$)

Donc $\frac{S}{p^2} \leqslant k = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$, l'égalité ayant lieu lorsque le triangle est équilatéral, et seulement dans ce cas.

(*) note : ce résultat classique se démontre par exemple à l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique : si x, y, z sont trois réels positifs alors :

$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x + y + z}{3}$, et l'égalité n'a lieu que si $x = y = z$.

En effet : on peut écrire $x = u^3$, $y = v^3$, $z = w^3$, où u, v, w sont des réels positifs, l'inégalité précédente équivaut à : $3uvw \leqslant u^3 + v^3 + w^3$, laquelle résulte de l'identité :

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)\,(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu)$$
$$= \frac{1}{2}(u + v + w)\,[(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2]$$

ce qui est strictement positif, sauf si $u = v = w$.

Autres solutions : BOUTELOUP (Rouen), J.C. CARREGA (Lyon), R. CHADART (les Ulis), S. CHRÉTIEN (Villemomble), J. LEMAIRE (Lille), M. KILANI-CHEVALORE (Tunis), P. LEFEBVRE (Ecully), J. LEGRAND (Biarritz), R. CUCULIERE (Paris), P. MANAC'H (Lorient), C. NOTARI (Noé).

ÉNONCÉS n° 99 et n° 100 (D. ROUX).
Quel est le volume maximum d'un octaèdre régulier contenu dans un cube de volume 1 ?
Reprendre le problème précédent en remplaçant l'octaèdre et le cube par tout couple de solides de Platon.

SOLUTION, première partie.
1) ***Résultats préliminaires***

Dressons un tableau récapitulant les principales caractéristiques des polyèdres réguliers convexes, dont nous aurons besoin par la suite :

polyèdre	F	S	A	d	V
tétraèdre	4	4	4	$a\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$a^3\dfrac{\sqrt{2}}{12}$
cube	6	8	12	$a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	a^3
octaèdre	8	6	12	$\dfrac{a}{2}$	$a^3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
dodécaèdre	12	20	30	$a\dfrac{\Phi^2}{2}$	$a^3\dfrac{\sqrt{5}}{2}\Phi^4$
icosaèdre	20	12	30	$a\dfrac{\Phi}{2}$	$a^3\dfrac{5}{6}\Phi^2$

Tableau (I)

Dans ce tableau, F désigne le nombre des faces, S celui des sommets, et A est le nombre des arêtes. La longueur d'une arête est notée a. d est la distance du centre du polyèdre à chacune de ses arêtes. Enfin V est le volume du polyèdre. $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Ces résultats, qui s'établissent sans difficulté notable, peuvent être trouvés dans le dossier PLOT consacré aux polyèdres. Pour se procurer ce dossier, ainsi que des pochettes de matériel permettant de construire aisément des polyèdres, il suffit de s'adresser à la régionale A.P.M.E.P. d'Orléans-Tours.

II) *Préambule.*

La résolution (partielle) de chacune des 20 questions posées se fera en deux temps :

1) Nous rechercherons une configuration formée d'un polyèdre régulier donné, d'arête a', et d'un autre polyèdre régulier, d'arête a, inclus dans le premier, de telle façon que a soit maximale.

2) Nous calculerons les volumes V, respectivement V', du polyèdre intérieur, respectivement extérieur. Puisque nous choisissons V' égal au volume unité, la réponse à la question est, dans chacun des cas, $\frac{V}{V'}$.

Le deuxième temps nécessite le calcul de a en fonction de a', ce qui en général n'utilisera guère que le théorème de Pythagore, puis l'application des formules contenues dans la dernière colonne du tableau (I).

Par contre le premier temps est d'une difficulté mathématique soutenue, si l'on veut traiter le problème de façon sérieuse. Préférant privilégier l'aspect récréatif de l'énoncé 100 nous nous contenterons des réponses que fournit l'intuition géométrique, obtenues en visualisant mentalement un polyèdre se déplaçant, tout en grandissant, à l'intérieur d'un autre polyèdre, jusqu'à l'obtention d'une configuration "bloquée", pour laquelle le polyèdre intérieur est coincé dans le polyèdre extérieur. Il faudra prendre garde au fait que plusieurs configurations peuvent réaliser un tel "blocage". La construction de modèles en cartons peut aider à voir ces configurations.

Il faut avoir l'honnêteté de reconnaître qu'une telle façon de procéder abandonne toute rigueur mathématique. Le mathématicien professionnel sait qu'il y aurait moyen de justifier par le calcul le fait que a atteint un extrémum relatif : par exemple on prendrait 3 coordonnées pour repérer le centre du polyèdre intérieur, 3 angles d'Euler pour repérer sa position, a serait alors une fontion de 6 variables obtenue en exprimant qu'au moins un sommet du polyèdre intérieur appartient à au moins une face du polyèdre extérieur. Il faudrait alors rechercher les extréma de cette fonction a, ce qui réclamerait des calculs dont la longueur et la complexité seraient disproportionnées par rapport à l'évidence du résultat obtenu, d'autant plus que la solution ne se présentera pas de façon unique.

Ce problème présente un caractère paradoxal qui ne devrait pas manquer d'intéresser les spécialistes d'heuristique : comment se fait-il que l'intuition géométrique permette de voir rapidement le caractère extrémal d'une configuration que la raison ne pourra justifier qu'au prix d'une démarche laborieuse?

III) *Premiers exemples.*

1) *Tétraèdre inclus dans cube.*

Le paradoxe qui vient d'être évoqué est dans ce cas particulièrement frappant, car la solution (voir figure 1) est d'une évidence criante, mais cela n'apporte pas l'ombre d'une preuve digne de ce nom.

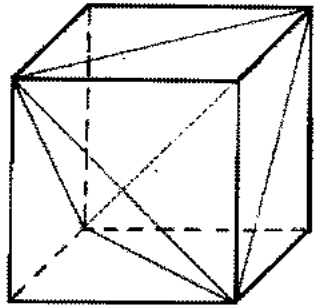

Figure 1.

Chaque arête du tétraèdre est diagonale d'une face du cube, donc (avec les notations du II) $a = a'\sqrt{2}$, par suite : $V = a'^3 2\sqrt{2}.\ \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{a'^3}{3}$.
Donc $\frac{V}{V'} = \frac{1}{3}$.

2) *Tétraèdre inclus dans octaèdre.*

Soit (figure 2) ABC A'B'C' un octaèdre régulier. Demandons nous s'il existe un tétraèdre régulier dont une face est (ABC), contenu dans l'octaèdre.
Soit I le centre de la face (A'B'C'); projetons ces points en I_1, A'_1, B'_1, C'_1 sur le plan (ABC) (figure 3).

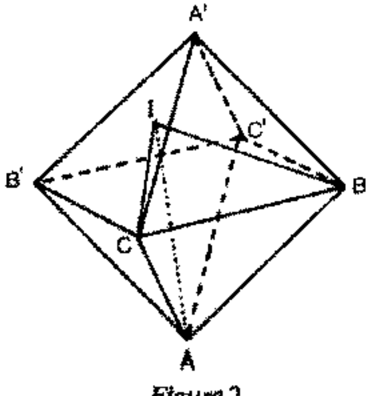

Figure 2

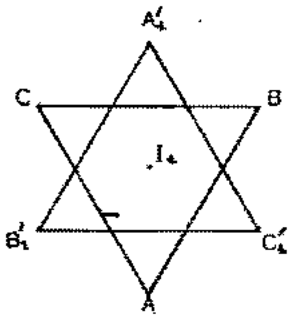

Figure 3

$AC'_1\ B\ A'_1C\ B'_1$ est un hexagone régulier de centre I_1. Donc l'angle entre $(I_1A'_1)$ et (I_1C) mesure 60 degrés et a pour cosinus $\frac{1}{2}$. Par suite (BC) est médiatrice du segment $[I_1A'_1]$. Il en résulte que la droite (BC) appartient au plan médiateur du segment [IA"].

Donc CI = CA' = CB = BA' = BI. Le tétraèdre ABCI est régulier. J'ai, à plusieurs reprises, surpris et intéressé des classes de 1° S avec ce résultat remarquable : le tétraèdre tient "tout juste", son quatrième sommet étant exactement le centre de la face opposée à (ABC) dans l'octaèdre.

En conclusion $a = a'$, $\frac{V}{V'} = \frac{1}{4}$.

Remarque : les 2 polyèdres ne sont pas de même centre !

3) *Cube inclus dans dodécaèdre.*

Comme le montre la figure 4 il est possible de sélectionner 8 des sommets d'un dodécaèdre régulier de façon à obtenir les sommets d'un cube, qui est de toute évidence un cube maximal contenu dans le dodécaèdre.

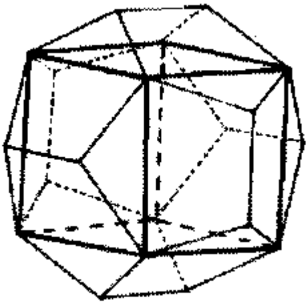

Figure 4

L'arête a du cube est diagonale d'un pentagone régulier de côté a' donc : $a = 2a'\cos\frac{\pi}{5} = 2a'\frac{1+\sqrt{5}}{4} = a'\Phi$, d'où $V = a'^3\Phi^3$

et $\frac{V}{V'} = \frac{2}{\sqrt{5}\Phi} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$

En plaçant dans le cube un tétraèdre régulier maximal on obtient du même coup le rangement d'un tétraèdre régulier dans le dodécaèdre, tous les sommets du tétraèdre étant des sommets du dodécaèdre. Pour ce rangement le rapport des volumes est :

$\frac{1}{3} \times (1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) = \frac{5-\sqrt{5}}{15}$.

4) *Cube inclus dans octaèdre*

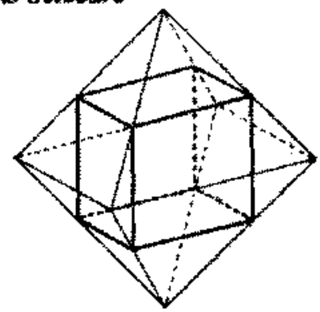

Figure 5

La figure 5 montre un cube dont deux faces parallèles ont toutes leurs arêtes situées dans des faces de l'octaèdre régulier. Toujours avec les notations du (I) on constate que $a' = a + a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $a = a'(2 - \sqrt{2})$, donc $V = a'^3(2 - \sqrt{2})^3$ d'où $\dfrac{V}{V'} = 3(10\sqrt{2} - 14)$.

5) *Octaèdre inclus dans tétraèdre.*

La figure 6 montre comment l'octaèdre peut être placé dans le tétraèdre : ses sommets sont les milieux des arêtes du tétraèdre et quatre de ses faces sont incluses dans les faces du tétraèdre.

Il est clair que $a = \dfrac{a'}{2}$, par suite $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{1}{2}$.

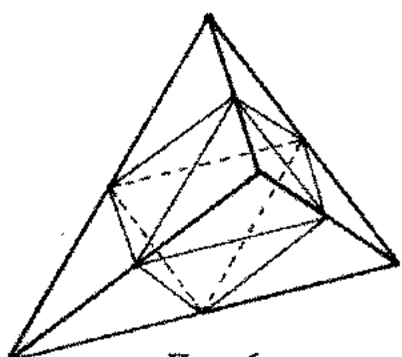

Figure 6

6) *Octaèdre inclus dans cube.*

C'est le cas de l'énoncé n° 99. Soient O et O' deux sommets opposés d'un cube d'arête a'. Plaçons sur les 3 arêtes issues de O des points A,B,C, tels que $OA = OB = OC = \dfrac{3a'}{4}$ (voir figure 7). Plaçons de

même A', B', C'. L'octaèdre ABC A'B'C' est régulier d'arête $a = a'\frac{3\sqrt{2}}{4}$
Il suffit de vérifier que :

$$\left(\frac{a'}{4}\right)^2 + a'^2 + \left(\frac{a'}{4}\right)^2 = \left(a'\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2.$$

$$V = a'^3\,\frac{27\sqrt{2}}{32}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\text{, donc } \frac{V}{V'} = \frac{9}{16}.$$

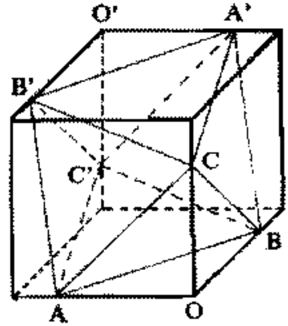

Figure 7

7) ***Dodécaèdre inclus dans cube.***

Il s'agit de ranger les plus gros dodécaèdres possibles dans une boîte cubique. Exploitant le fait que le docécaèdre possède des arêtes situées par paires dans des directions parallèles aux axes d'un trièdre trirectangle, on place ces arêtes dans les faces du cube, obtenant la figure 8.

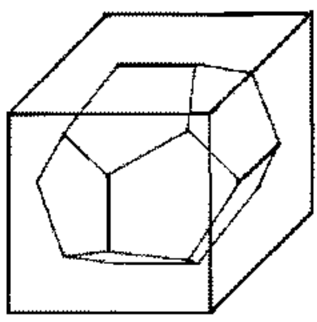

Figure 8

La distance 2d entre deux arêtes parallèles du docécaèdre est égale à l'arête du cube :
$a\Phi^2 = a'$. Donc $V = \frac{a'^3}{\Phi^6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\Phi^4$ d'où $\frac{V}{V'} = \frac{\sqrt{5}}{2\Phi^2} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

8) *Icosaèdre inclus dans le cube.*

Le principe du rangement est le même que dans le cas précédent : voir figure 9 où les arêtes de l'icosaèdre situées dans les faces du cube sont en trait fort.

$2d = a\Phi = a'$, donc : $V = \dfrac{a'^3}{\Phi^3} \cdot \dfrac{5}{6}\Phi^2$,

par suite $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{5}{6\Phi} = \dfrac{5(\sqrt{5}-1)}{12}$

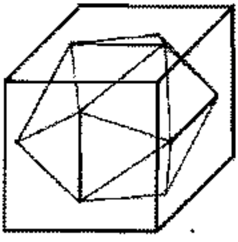

Figure 9

9) *Octaèdre inclus dans dodécaèdre.*

Dans la figure 8 considérons les milieux des arêtes de contact du dodécaèdre avec le cube, qui sont en même temps les centres des faces du cube. On obtient 6 points, sommets d'un octaèdre régulier inscrit dans le dodécaèdre : figure 10. Ici $a\sqrt{2} = 2d$ donc $a = a' \dfrac{\Phi^2}{\sqrt{2}}$

d'où $V = a'^3 \dfrac{\Phi^6}{6}$ et par suite $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\Phi^3}{3\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}+5}{30}$.

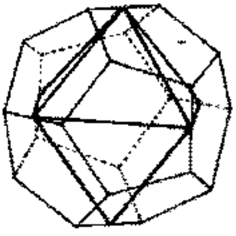

Figure 10

10) *Octaèdre inclus dans icosaèdre.*

Le principe est le même que dans le cas précédent : prenant les centres des faces du cube dans la figure 9, on obtient la figure 11 montrant un octaèdre régulier contenu dans un icosaèdre régulier.

Ici $a\sqrt{2} = 2d$ donc $a = a' \dfrac{\Phi}{\sqrt{2}}$ d'où $V = a'^3 \dfrac{\Phi^3}{6}$

et par suite $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\Phi}{5} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{10}$.

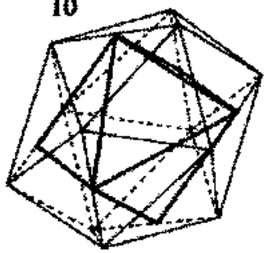

Figure 11

IV) ***Conclusion provisoire.***

Voici un tableau récapitulant les résultats qui viennent d'être obtenus :

dans	tétraèdre	cube	octaèdre	dodécaèdre	icosaèdre
tétraèdre	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{5-\sqrt{5}}{15}$ $\simeq 0,18426$	
cube		1	$3(10\sqrt{2}-14)$ $\simeq 0,42641$	$\frac{5-\sqrt{5}}{15}$ $\simeq 0,55278$	
octaèdre	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{9}{16} = 0,5625$	1	$\frac{5+3\sqrt{5}}{30}$ $\simeq 0,39027$	$\frac{1+\sqrt{5}}{10}$ $\simeq 0,32361$
dodécaèdre		$\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$ $\simeq 0,42705$		1	
icosaèdre		$\frac{5\sqrt{5}-5}{12}$ $\simeq 0,51503$			1

Tableau (II)

16 cases sur 25 sont remplies. Il reste 9 réponses à apporter. Curieusement, je n'ai reçu aucune solution à ce problème. Espérant que cette amorce incitera quelques lecteurs à proposer des solutions, je vais laisser passer quelques Bulletins avant de poursuivre le remplissage des cases du tableau (II).