les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions.

Cette rubrique accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Les énoncés et les solutions sont à envoyer à l'adresse suivante : (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.).

M. Dominique ROUX
85 bis rue Aristide BRIAND
87100 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 107 (Concours général 1985)

p et q étant deux entiers positifs donnés, calculer :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{C_{p+k}^{k}}{2^{p+k}} + \sum_{k=0}^{p} \frac{C_{q+k}^{k}}{2^{q+k}}$$

ÉNONCÉ N° 108 (L. GUERBER, Clermont-Ferrand)

Quel est le plus grand nombre de points à coordonnées toutes entières que l'on peut placer dans le plan de façon à ce qu'aucun des centres de gravité des triangles qu'ils permettent de former (en les prenant par trois) n'ait ses coordonnées toutes entières ?

ÉNONCÉ N° 109 (D. ROUX, Limoges)

Définissons une application P de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ ainsi : $P(k)$ est le nombre des coefficients binômiaux pairs appartenant à la $k^{ième}$ ligne du triangle arithmétique de Pascal. q étant un entier donné, quel est le nombre des éléments de $P(\mathbb{N}^*)$ plus petits que 2^q ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 92 (LEMAIRE, Lille)

Soit $E \subset \mathbb{N}^*$ l'ensemble des naturels dont l'écriture dans le système décimal utilise uniquement un chiffre, quelconque, une ou plusieurs fois.

Quels sont les éléments de E, carrés d'entiers ?
* Quels sont les éléments de E, cubes d'entiers ?

SOLUTION (D. ROUX, Limoges)

Notons $(a)_k$ l'élément de E qui s'écrit avec le chiffre a répété k fois. Pour $k = 1$, les carrés sont : 1, 4, 9. Supposons $k > 1$. L'examen, par exemple dans une table numérique, des carrés des 50 premiers entiers (ou même seulement des 25 premiers) montre, en raisonnant modulo 100, que les deux derniers chiffres à droite d'un carré écrit en base 10 ne peuvent être que les suivants :

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.

On observe que seul 44 est du type $(a)_2$. Donc pour que $(a)_k$, avec $k > 1$, soit un carré il faut $a = 4$. Comme $(4)_k = 4 \times (1)_k$, l'hypothèse $(4)_k$ est un carré implique que $(1)_k$ en est un aussi, ce qui est impossible puisque la liste ci-dessus ne contient pas 11.

Conclusion : les seuls carrés éléments de E sont : 1, 4, 9.

Quant à savoir si $(a)_k$, pour $k > 1$, peut être un cube (pour $k = 1$, il n'y a que les solutions 1 et 8), même lorsqu'on se restreint au cas $a = 1$, cette question reste ouverte : cf. RICHARD Guy, *Unsolved problems in number theory*, (Springer 1981), page 7 :

"... Repunits > 1 are known never to be squares. Are they ever cubes ? When are they squarefree ?..."

Autre solution : LEMAIRE (Lille) qui ajoute ceci : si $(1)_k$ est un cube, nécessairement k est impair, en prouvant que $(1)_{2n}$ n'est jamais un cube, en substance de la façon suivante :

Si $(1)_{2n}$ est un cube, comme $(1)_{2n} = (1)_n \times (10^n + 1)$ et que $(1)_n$ et $10^n + 1$ sont deux entiers premiers entre eux (car $(10^n + 1) - 9 \times (1)_n = 2$), ces deux entiers sont eux-mêmes des cubes. En particulier $10^n + 1 = x^3$ où x est un entier, dont le chiffre des unités est nécessairement 1, car il en est ainsi pour son cube.

On peut donc écrire $x = 10^p k + 1$ où k est un entier non divisible par 10, et où p est un entier non nul et plus petit que n ; en effet : si $p \geqslant n$, alors $x \geqslant 10^n k + 1 \geqslant 10^n + 1 = x^3$, ce qui est impossible car x est plus grand que 1.

De $10^n + 1 = x^3$ on déduit : $10^n = 10^{3p}\ k^3 + 3.10^{2p}\ k^2 + 3.10^p k$ d'où : $10^{n-p} = 10^{2p}\ k^3 + 3.10^p\ k^2 + 3k$.

Ce qui, puisque $0 < p < n$, entraine que 10 divise $3k$, donc que k est divisible par 10 : contradiction.

ÉNONCÉ N° 93 (J. FULGENCE, Dijon)

Soit S_n le sup des déterminants des matrices carrées d'ordre n dont tous les termes sont majorés par 1 en valeur absolue. S_n est un entier multiple de 2^{n-1}.

Donner une expression de S_n, ou à défaut, un encadrement.

ÉLÉMENTS DE SOLUTION, de l'auteur :

Proposition : S_n est un entier multiple de 2^{n-1} tel que :

$$(n-2)2^{n-1} \leqslant S_n \leqslant (\sqrt{n})^n \quad , \quad \text{si } n > 2 .$$

Conséquence : Outre les résultats immédiats $S_1 = 1$ et $S_2 = 2$, cette proposition résout le problème dans les cas $n = 3, 4, 5$:

$$S_3 = 4 \quad , \quad S_4 = 16 \quad , \quad S_5 = 48 .$$

Démonstration :

Justifions successivement que :

1) S_n est atteint.

2) S_n est atteint pour une matrice (a_{ij}) dont tous les termes sont égaux à 1 en valeur absolue, donc S_n est entier.

3) Pour $n > 2$, S_n est encadré par $(n-2)2^{n-1}$ et $(\sqrt{n})^n$.

4) S_n est divisible par 2^{n-1}.

Preuves :

1) L'application $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}) \mapsto |\det(a_{ij})|$ est continue sur le compact $[-1, 1]^{(n^2)}$, donc atteint sa borne supérieure.

Remarque : si l'on veut éviter cet argument de compacité, on peut poser le problème sous la forme plus simple :

(a_{ij}) parcourant l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n dont tous les termes sont *égaux* à 1 en valeur absolue, déterminer le nombre $S_n = \sup |\det(a_{ij})|$.

2) Soit (a_{ij}) une matrice carrée d'ordre n telle que :

$$\forall i\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ;\ \forall j\,,\ 1 \leqslant j \leqslant n\ ;\ |a_{ij}| \leqslant 1.$$

Fixons i_0 et j_0 et développons $\det(a_{ij})$ suivant la ligne i_0 en notant $A_{i_0j_0}$ le cofacteur, supposé non nul, de $a_{i_0j_0}$; $\det(a_{ij}) = a_{i_0j_0} A_{i_0j_0} + R$.

Si $|a_{i_0j_0}| < 1$, la valeur absolue de ce déterminant est strictement inférieure à celle du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans (a_{ij}) le coefficient $a_{i_0j_0}$ par 1 ou -1 selon que $A_{i_0j_0}$ est du signe de R ou du signe contraire. (Si $R = 0$ les deux substitutions conviennent).

Ainsi, si la matrice (a_{ij}) réalise le $\sup|\det(a_{ij})|$, tout terme à cofacteur non nul est nécessairement égal à 1 ou à -1. Un terme à cofacteur nul pouvant d'autre part être remplacé par 1 ou -1 sans modifier le déterminant, l'assertion annoncée est démontrée.

3) Rappelons l'inégalité d'Hadamard :

$$|\det(a_{ij})| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|^2\right)^{1/2} \dots \dots \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|^2\right)^{1/2}$$

Elle fournit la majoration : $|\det(a_{ij})| \leqslant (\sqrt{n})^n$.

D'autre part considérons la matrice carrée d'ordre n, A_n, dont tous les coefficients sont égaux à 1, sauf ceux de la diagonale que l'on prend égaux à -1. Un calcul simple montre que :

$$\det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-2)\,2^{n-1}\text{, d'où le résultat.}$$

4) Toute matrice (a_{ij}) pour laquelle chaque coefficient a_{ij} vaut 1 ou -1 a un déterminant divisible par 2^{n-1}. En effet, on peut, sans modifier $\det(a_{ij})$ changer les signes dans certaines colonnes de façon à ce que la première ligne ne soit composée que de 1. Retranchons alors la première colonne à toutes les autres et développons le déterminant suivant la première ligne. L'unique cofacteur est un déterminant d'ordre $n-1$ ne contenant que des 0, des 2, ou des -2, donc est divisible par 2^{n-1}. c.q.f.d.

Autres réponses : VIDIANI (Dijon) et G. BOURGEOIS (Marseille) qui ajoute la précision suivante : Si $n = 2^p$ alors $S_n = (\sqrt{n})^n$; ce qu'il prouve en construisant par récurrence une suite de matrices U_p ainsi :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\text{, puis pour } p > 1\ \ U_p = \begin{pmatrix} U_{p-1} & -U_{p-1} \\ U_{p-1} & U_{p-1} \end{pmatrix}$$

On constate par récurrence que U_p est une matrice carrée d'ordre $n = 2^p$ et que son déterminant vaut $(\sqrt{n})^n$ car U_p est formée de 4 blocs qui commutent, donc :

$$\det(U_p) = \det(2\,U_{p-1}^2) = 2^{n/2}\det(U_{p-1}^2) = 2^{n/2}(\det U_{p-1})^2$$
$$= 2^{n/2}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{n/4}\right]^2 = n^{n/2}\,.$$

G. BOURGEOIS prouve également que lorsque n tend vers l'infini, $\mathrm{Log}(S_n)$ est équivalent à $\frac{n}{2}\mathrm{Log}n$.

ÉNONCÉ N° 94 (A. ADLER, Paris)

Soit n un entier. Quel est le nombre des suites de n entiers dont chaque terme est égal au nombre de ceux qui le précèdent et qui lui sont strictement inférieurs ?

SOLUTION de COLLET et VIDIANI, de Dijon.

Soit E_n l'ensemble des $(n+1)$ – uplets d'entiers $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ où pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $a_p = \mathrm{Card}\{a_i / i \leqslant p\ ,\ a_i < a_p\}$.
Posons : $u_{n+1} = \mathrm{Card}\,E_n$.
Nous avons : $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 5$; $u_4 = 14$; $u_5 = 42$.
Il est immédiat que pour tout p, $0 \leqslant p \leqslant n$, $0 \leqslant a_p \leqslant p$ donc $a_0 = 0$ et que si $a_n = p$, $a_p = p$ et pour $0 \leqslant k \leqslant n-p$, $a_{p+k} \geqslant p$.

Il est également immédiat que si :
$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = (0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est dans E_{n-1}
alors : $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 0) = (0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$ est dans E_n
ainsi que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, n) = (0, a_1, \ldots, a_{n-1}, n)$ est dans E_n.

Par suite, dans E_n, il y a *exactement* u_n $(n+1)$ – uplets se terminant par 0, et exactement u_n $(n+1)$ – uplets se terminant par n.

Soit alors, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Si $a_n = p$, $a_p = p$ et il existe *exactement* u_p $(p+1)$ – uplets $(0, a_1, \ldots, a_{p-1}, p)$.

Considérons les $(n-p+1)$ – uplets du type :
$(p, a_{p+1}, \ldots, a_{n-1}, p) = (0+p, b_1+p, \ldots, b_{n-(p+1)}+p, 0+p)$
où $(0, b_1, \ldots, b_{n-(p+1)}, 0)$ est dans E_{n-p}

Il en existe *exactement* u_{n-p} , et donc, dans E_n, il existe *exactement* $u_p u_{n-p}$ $(n+1)$ – uplets se terminant par p. D'où :

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{p=1}^{n-1} u_p u_{n-p} + u_n$$

Posant $u_0 = 1$:

$$u_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} u_p u_{n-p}$$

Applications numériques :

$n=0 \qquad u_1 = u_0u_0 = 1$

$n=1 \qquad u_2 = u_0u_1 + u_1u_0 = 2$

$n=2 \qquad u_3 = u_0u_2 + u_1u_1 + u_2u_0 = 5$

$n=3 \qquad u_4 = u_0u_3 + u_1u_2 + u_2u_1 + u_3u_0 = 14$

$n=4 \qquad u_5 = u_0u_4 + u_1u_3 + u_2u_2 + u_3u_1 + u_4u_0 = 42$

$n=5 \qquad u_6 = u_0u_5 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_3u_2 + u_4u_1 + u_5u_0 = 132$

$n=6 \qquad u_7 = u_0u_6 + u_1u_5 + u_2u_4 + u_3u_3 + u_4u_2 + u_5u_1 + u_6u_0 = 429$

La suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} u_p u_{n-p}$ nous suggère d'introduire la série entière formelle : $y = \mathrm{f}(t) = u_0t + u_1t^2 + \ldots + u_nt^{n+1} + \ldots$.

La règle de multiplication des séries donne alors :

$y^2 = u_0^2t^2 + (u_0u_1 + u_1u_0)t^3 + \ldots + (u_0u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}u_0)t^{n+1} + \ldots$

soit : $y^2 = u_1t^2 + u_2t^3 + \ldots + u_nt^{n+1} + \ldots$

$y^2 = y - u_0t = y - t$.

De l'égalité $y^2 - y + t = 0$, nous obtenons $y = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4t}$

et comme $y = \mathrm{f}(t)$ avec $\mathrm{f}(0) = 0$, il vient :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4t}$$

Mais : $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.(2n+2)}\, x^{n+1}$

et : $\dfrac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.(2n+2)} = \dfrac{(2n)\,!}{2^{n+1}\,(n!)(n+1)\,!}$

$$\sqrt{1-4t} = 1 - 2t - 2\sum_{n \geqslant 1} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\, t^{n+1}$$

soit $u_n = \dfrac{(2n)\,!}{(n\,!)(n+1)\,!} = \dfrac{C_{2n}^{n-1}}{n} = \dfrac{C_{2n}^{n}}{n+1}$.

Ce sont les nombres de CATALAN.

Remarque :

Le calcul numérique des u_n se fait plus facilement en remarquant que : $u_n = \dfrac{4n-2}{n+1} u_{n-1}$ ce qui se programme très facilement.

Pour une suite des valeurs jusqu'à $n = 16$ voir *Analyse combinatoire* de COMTET PUF tome 1, page 67, ouvrage dans lequel le lecteur pourra trouver une définition des nombres de Catalan par les parenthésages.

AUTRES SOLUTIONS : R. CHADARD (Les Ulis), R. CUCULIERE (Paris) qui donne deux méthodes, J. LEMAIRE (Lille), A. TISSIER (Montfermeil), et une solution partielle de P. MANAC'H (Lorient).

Commentaire : l'origine de ce problème est liée à l'énoncé N° 42 posé par A. ADLER (Paris) : voir le Bulletin 301 page 746. Dans le même bulletin on remarquera la présence de l'énoncé N° 43 posé par C. AUQUE (Clermont-Ferrand) qui permit à J. CHONÉ (Thiers) de présenter (pages 747 et 748) une autre construction des nombres de CATALAN, en dénombrant les triangulations de polygones convexes.

COURRIER DE LECTEUR

Monsieur Jean CORNUEJOLS, professeur au Lycée FRESNEL (Paris 15e) nous dit avoir fait vérifier par des élèves de première (il s'agissait d'exercices de calculs sur les intersections de droites, les points étant donnés par des coordonnées), la propriété suivante :

Théorème : Soient A, B, C, D, 4 points d'un cercle de centre O ; A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport à O ; et a, b, c les points d'intersections de (DA'), (DB'), (DC'), avec respectivement (BC), (CA), (AB). Alors les points a, b, c, O sont alignés. (voir figure 1).

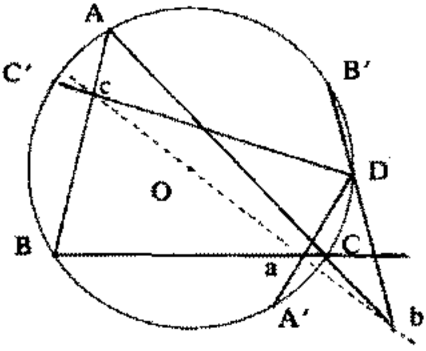

Figure 1

Et M. CORNUEJOLS écrit :

"En Terminale, la démonstration analytique générale donne lieu à un intéressant maniement des formules trigonométriques, en considérant le cercle comme "trigonométrique". Peut-être "mon théorème" est-il connu depuis 2000 ans. Dans ce cas je vous serais reconnaissant si vous pouviez me fournir des références d'ouvrages où trouver une solution "géométrique pure". Sinon les solutions données par les collègues m'intéresseront fortement".

Ici j'invite le lecteur à faire une pause, et à prendre la peine de chercher un peu, avant de lire la suite.

Comme premier élément de réponse je propose ceci : en vertu du théorème de Pascal (ou de "l'hexagramme mystique"), dans l'hexagone ABB'DC'C les intersections des cotés "opposés" : c de (AB) avec (DC'), b de (AC) avec (DB'), et O de (BB') avec (CC') sont alignées. De même a, b, O sont alignés. D'où le résultat.

De plus on remarque que la propriété se généralise à toute conique à centre.

Mais le théorème de Pascal ne faisant pas partie des programmes des classes des Lycées ; il serait souhaitable de rechercher des démonstrations plus élémentaires de cette belle propriété géométrique. Ici, je cède la place à d'éventuels lecteurs ayant d'autres réponses à proposer aux questions de M. CORNUEJOLS.

*

* *

*

Je tiens à remercier les amis lecteurs qui m'ont adressé des mots d'encouragement ou de remerciement. J'accueillerai aussi, avec intérêt et gratitude, toute critique ou suggestion de nature à améliorer cette rubrique et à mieux répondre aux aspirations des lecteurs. Plusieurs correspondants ont exprimé le désir de voir la collection des problèmes réunie dans une publication A.P.M.E.P.. Il faudrait d'autres avis dans ce sens pour que ce projet puisse prendre corps.

Enfin et surtout, pour continuer à alimenter la rubrique, il est indispensable que vous soyez nombreux à envoyer de nouvelles propositions d'énoncés.

ERRATA pour la rubrique des problèmes du BULLETIN n° 351

— page 901, 3ème ligne du bas, et page 902, 2ème ligne : dans $(m-q-1+\in)!$ remplacer le symbole $\in$ par ε

— page 905, dans le diagramme de la solution N, pousser le pion en haut à droite d'une case à droite.

— page 909, écrire (II) à côté de l'équation en 4ème ligne.