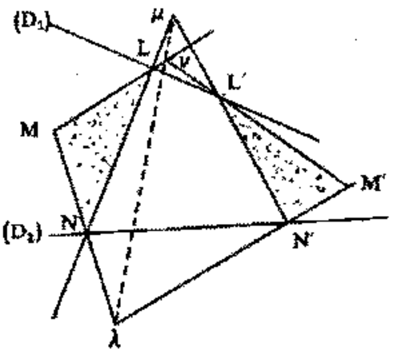
à propos d'un problème de géométrie

Dans le numéro de septembre 1985 (p. 672) du Bulletin A.P.M.E.P., chacun d'entre nous a pu lire l'excellent article signé de François Padilla et Jean Aymes, joliment intitulé : "*Le plaisir de chercher... la joie de trouver*".

La lecture des diverses solutions au problème posé (rappelons qu'il s'agissait de joindre un point M donné au point d'intersection de deux droites (D_1) et (D_2) se coupant en dehors de la feuille) ont suscité en moi un certain nombre de réflexions que je vous livre en vrac, les unes concernant le problème lui-même, les autres concernant la façon dont nous "conditionons" les élèves.

Ce qui m'a d'abord le plus frappé, c'est que sur les 11 solutions proposées, pourtant très variées, aucune ne correspond à la véritable nature géométrique du problème (seule la 11e s'en rapproche un peu, mais elle est à marginaliser selon les auteurs), car enfin, mener d'un point M une droite passant par l'intersection de deux autres, c'est de toute évidence un problème de *géométrie projective* qui doit se traiter *de préférence* en utilisant seulement une règle plate.

Voilà la solution que j'avais personnellement imaginée (et chacun bien sûr est libre d'en inventer d'autres). Elle s'appuie sur la figure "classique" des triangles homologiques et aurait sans doute plu à Gérard DESARGUES (1593-1661), ce grand méconnu de l'enseignement français. Il suffit de choisir arbitrairement les points L,N,L',N' en veillant à ce que les lignes indiquées se coupent dans les limites de la feuille et on trouve successivement les points μ, λ, puis ν et enfin M', ce qui achève la construction avec la droite (MM').



Je vois bien l'objection que l'on pourrait me faire : la géométrie projective n'est au programme d'aucune classe de lycée. A quoi je répondrai que l'enseignement de la géométrie doit *aussi* avoir pour but d'apprendre aux élèves à voir dans l'espace et il suffit de dire que la figure représente une pyramide de sommet O ayant pour base le triangle LMN et que l'on coupe cette pyramide par le plan (L'M'N') pour que le dernier des élèves de Seconde soit obligé de convenir que les points λ, μ, ν sont alignés sur la droite d'intersection des deux plans (en fait, ici, c'est la réciproque qui est utilisée).

D'ailleurs on notera la ressemblance avec la solution n° 5 (fig. 5), qui utilise deux triangles homothétiques, ce qui n'est autre chose que la forme affine du théorème de Desargues (la droite $\lambda\mu\nu$ étant rejetée à l'infini). Cette solution n° 5 avait immédiatement eu mes faveurs pour deux raisons : d'abord son élégance (en plus de la règle, une simple équerre, même fausse, suffit pour tracer les parallèles), et surtout pour l'avantage immense sur les autres, à savoir que pour une disposition absolument quelconque des données $(D_1)(D_2)$ et M, on peut toujours se débrouiller pour construire effectivement la figure et même dans de bonnes conditions.

De là dérivent toutes les solutions utilisant l'homothétie, soit une homothétie de centre O (solutions n^{os} 4, 5 et 6), soit une homothétie centrée sur (D_1) (solution n° 3), soit une homothétie de centre M (solution n° 8), voire la translation (solution n° 1) ou la symétrie (solution n° 2 où il est évident qu'une symétrie oblique, voire une affinité, font aussi bien l'affaire qu'une symétrie droite).

Si les solutions n° 9 (quadrangle orthocentrique) et n° 7 (cas Mazet) nous semblent tirées par les cheveux, voire farfelues malgré l'astuce déployée, c'est sans doute tout simplement qu'elles s'écartent de la nature profonde de la question. Quant à la solution n° 10 (dite numérique), elle est évidemment assez peu géométrique puisqu'elle nécessite, outre un double-décimètre et un bon rapporteur, une calculette, mais ce n'est certes pas une raison pour la rejeter. Cela constitue d'ailleurs un bon sujet de réflexion : pourquoi acceptons-nous généralement dans les constructions géométriques la règle et le compas (éventuellement une équerre) et rejetons-nous comme impur l'usage d'un appareil mesurant longueurs ou angles ? Est-ce uniquement par tradition ? Remarquez comme la figure 4 serait simplifiée si l'on se donnait le droit de mesurer avec un double-décimètre les 4 segments qui interviennent pour déterminer la position de M' (en supprimant également les angles droits qui n'ont rien à voir avec le problème) !

Et si on compliquait le problème en interdisant l'usage de tout instrument autre que la feuille de papier elle-même ! Voici une solution qui m'est venue à l'esprit : on replie la feuille pour amener (D_1) en coïncidence avec D_2 . La trace du pli donne "la" bissectrice de D_1OD_2 , soit D_3. Si M est "entre" (D_2) et (D_3), on recommence...
Il est certain qu'au bout de 5 ou 6 pliages au maximum, la position de la droite MO sera connue à mieux qu'au millimètre près. Cette solution par dichotomie me paraît très instructive et prépare à maint raisonnement utilisé en Analyse, mais serait-elle admise par tout le monde ?

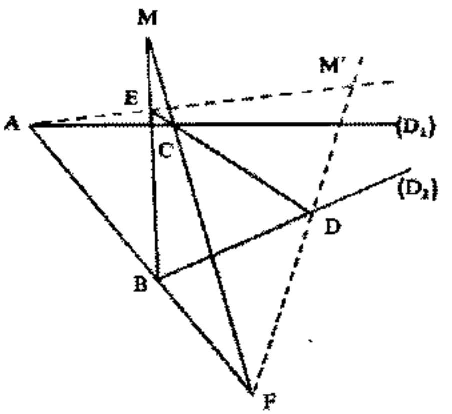
Ces remarques me conduisent tout naturellement à une réflexion plus large sur l'enseignement que nous donnons à nos élèves et particulièrement sur son aspect abstrait et théorique. Quand l'énoncé dit : "On donne deux droites D_1 et D_2", chacun comprend qu'en réalité ce sont deux segments de droite qui sont "donnés" sans doute par leurs intersections avec les bords de la feuille. Quand il demande "construire la droite OM", il est évident que personne n'est capable de cet exploit, une droite étant par essence de longueur infinie et d'épaisseur nulle. Si on posait le problème à un non-mathématicien (c'est-à-dire l'immense majorité des gens), il aurait vite fait de trouver une solution pratique, ne serait-ce qu'en rajoutant une seconde feuille de papier qui permettrait d'accéder au point O en deux coups de règle (si celle-ci est assez longue), d'où le tracé de OM. Cela rappelle le problème des 17 chameaux à partager dans les rapports $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{9}$. Non, en fait le mathématicien ne s'intéresse pas à une solution concrète mais seulement à une réponse qui permettrait de tracer théoriquement la droite sans sortir des limites de la feuille. Est-il entièrement satisfaisant de déformer ainsi l'esprit des élèves en leur interdisant tout contact avec la réalité concrète, voire avec le bon sens ? D'un autre côté, si le but de l'enseignement des mathématiques est de forger des méthodes de raisonnement logique et rigoureux, le résultat est-il atteint ? Il ne le semble pas à la lecture des 11 solutions dont pratiquement aucune n'a un caractère projectif et dont la plupart sont entâchées de nullité pour la simple raison qu'elles ne valent que dans des cas particuliers et tombent en défaut pour d'autres configurations de départ (seules résistent à l'examen les solutions n^{os} 3, 5 et 8 — encore faudrait-il "corriger" la solution n° 3 en utilisant un point A de D_1, autre que le pied de la perpendiculaire issue de M, mais l'idée de l'homothétie réductrice de centre A est excellente). Il est à noter que les trois solutions font appel à des homothéties (de centre A, de centre O, de centre M), ce qui tend à prouver l'importance des *transformations* en géométrie (mais qui en doute encore ?).

En résumé, chacun doit prendre conscience du caractère "conventionnel" de ce que nous enseignons ; mais après tout dans la vie, tout ce qui relève des institutions, des règlements..., n'a-t-il pas également un caractère conventionnel ? A vous de préciser, dans chaque cas, les règles du jeu, les instruments autorisés, etc... et de faire comprendre, par exemple, qu'il n'y a pas une géométrie mais *des* géométries... en somme, de privilégier tout ce qui permet une réflexion personnelle (autant dire qu'à ce point de vue le problème posé est une réussite).

Pour terminer, j'aimerais citer encore deux solutions au problème posé pour leur caractère "historique" car il s'agit évidemment d'un problème "classique" dont l'origine remonte sans doute à plusieurs siècles. Ces deux solutions ont le défaut d'exiger des sécantes communes à D_1 et à D_2 passant par M, mais elles ont l'avantage de respecter le caractère projectif de l'énoncé en n'utilisant que la règle seule.

La solution donnée par LAMBERT (1728-1777) est très voisine de la solution n° 11 qui utilise les faisceaux harmoniques de droites. Les notions de conjugaison harmonique, pôles et polaires, ont disparu des programmes, mais les collègues proches de la retraite se souviennent certainement en avoir été nourris dès la classe de seconde et ils acceptent sans doute cette solution comme très "naturelle".

La deuxième, sans doute la plus élégante, et qui n'exige que six coups de règle pour trouver un second point M' de la droite MO recherchée, est due à Maurice d'OCAGNE, normographe distingué et auteur d'une Histoire abrégée des sciences mathématiques, achevée en 1952 par René DUGAS.



On choisit arbitrairement les quatre points A et C sur D_1, B et D sur D_2.
MC coupe (AB) en F.
MB coupe (CD) en E.
L'intersection de (AE) et de (DF) est le point cherché M'.
Il suffit pour comprendre cette construction de considérer que la droite (MM') est la ligne d'horizon (il est curieux que la perspective, partie "utile" de la géométrie, ne soit jamais enseignée en dehors, sans doute, des écoles de dessin ou d'architecture).

La figure ABCD est alors un trapèze et les droites (BE) et (CF) deviennent parallèles. Autant dire que le théorème de Thalès suffit pour achever la démonstration.

En conclusion, que retenir ? Que *la* géométrie est une discipline idéale pour exciter l'imagination, que les transformations y jouent un rôle de premier plan, qu'un "joli" problème est propre à inciter à la réflexion, qu'il est toujours urgent de remettre en question son enseignement, que chacun d'entre nous peut faire profiter les autres de sa propre expérience en écrivant un article sans prétention pour le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

Henri FRAYSSE