ici et ailleurs

mathématique comme discipline de service*

par Jean-Pierre Kahane,
Université Paris-Sud

C'est le sujet d'une étude menée actuellement par la CIEM. Invité à ces Journées comme président de la CIEM, j'ai pensé intéressant de vous en parler.

D'abord, qu'est-ce que la CIEM, et de quoi s'occupe-t-elle ?

La CIEM est la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, fondée en 1908 par Henri Fehr et Felix Klein — qui en fut longtemps le président —. La *figure 1* dépeint sa structure actuelle et sa relation à l'UMI (Union Mathématique Internationale). Le comité exécutif (président, secrétaire, vice-présidents + 3 membres) est élu par l'assemblée générale de l'UMI. Les délégués nationaux sont de deux sortes. Pour les pays membres de l'UMI, il existe des "comités nationaux" (en France, le comité national est une émanation de l'Académie des Sciences, du CNRS et de la Société Mathématique de France) ; c'est le comité national qui désigne le délégué national à la CIEM. Dans certains cas, le délégué national préside la sous-commission nationale de la CIEM ; il en est ainsi en France, et la SCFCIEM (sous-commission française de la CIEM) comprend des représentants de l'A.P.M.E.P., des IREM, de l'Inspection Générale. Pour les pays qui ne sont pas membres de l'UMI,

(*) Conférence du 25.10.85 aux Journées Nationales de Port-Barcarès.

c'est le comité exécutif de la CIEM qui étudie les propositions et agrée les candidatures. Comme la recherche mathématique n'est active que dans certains pays, mais que l'enseignement mathématique existe partout, le spectre de la CIEM est, en principe, beaucoup plus ouvert que celui de l'UMI.

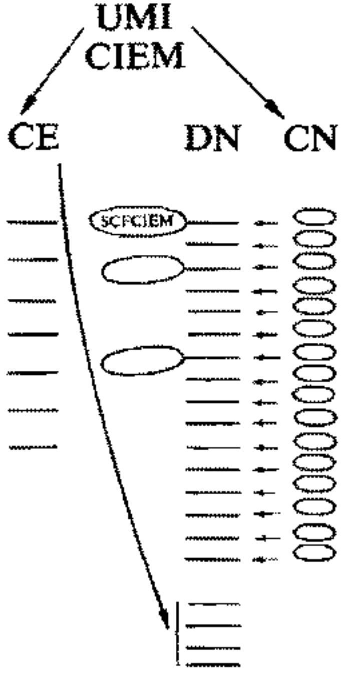


fig. 1

Les principales manifestations de la CIEM sont les congrès (*figure 2*). Les congrès internationaux de l'enseignement mathématique ont débuté à Lyon en 1969 ; le dernier (1984) était en Australie, le prochain (1988) en Hongrie. La CIEM patronne également des congrès régionaux, correspondant aux grandes régions du globe (Sud-Est Asiatique ; Amérique...). Les groupes affiliés à la CIEM ont aussi des congrès périodiques ; ainsi PME (psychologie et enseignement mathématique) tient un congrès annuel. Le bulletin de la CIEM (adressé aux délégués nationaux et éventuellement reproduit et diffusé par eux) rend compte de ces manifestations, et contient quelques informations sur des activités nationales.

Depuis peu, la CIEM a décidé de mettre à l'étude des sujets d'intérêt général arrivés à maturité. Il s'agit, dans chaque cas, de faire le point pour permettre de nouvelles initiatives et de nouvelles réflexions ; en aucun cas il ne s'agit de donner des solutions — garanties — CIEM aux

CONGRÈS

INTERN^x	LYON	1969
	EXETER	1972
	KARLSRUHE	1976
	BERKELEY	1980
	ADELAIDE	1984
	BUDAPEST	1988
REGION^x	TOKYO	1983
	BANGKOK	1984
	GUADALAHARA	1985

GROUPES AFFILIÉS : PME...
ETUDES

fig. 2

problèmes qui se posent. La *figure 3* indique où nous en sommes pour la première étude (achevée), la seconde (en cours), et la troisième (amorcée). Cette troisième étude est justement sur le thème : mathématiques et discipline de service.

Avant de vous dire où nous en sommes, une question : pourquoi avoir choisi de vous parler de *ce* sujet ? Voici ma motivation. Les professeurs de mathématiques ont appris les mathématiques qu'on enseigne aux mathématiciens, dans lesquelles l'accent est mis sur l'enchaînement des théories, les démonstrations, les définitions rigoureuses, les concepts abstraits. Mais la moitié des services d'enseignement des mathématiques de l'enseignement supérieur est fait d'autre chose, à savoir l'enseignement aux non-mathématiciens : ingénieurs, physiciens, biologistes, économistes, médecins et ainsi de suite. Or les objectifs et les méthodes ne sont pas les mêmes ; pour les non-mathématiciens, il faut cibler ce qu'on veut faire en fonction des intérêts majeurs des étudiants ; cela peut aller largement au-delà de ce qu'on enseigne couramment aux mathématiciens ; et il faut aller vite. Il se trouve y avoir là un élément de renouvellement de l'enseignement, au niveau universitaire et sans doute à tous les niveaux.

ETUDES

1. L'influence de l'informatique et des ordinateurs sur les mathématiques et leur enseignement

   Document de discussion — CIEM / Gazette SMF / L'Enseignement Mathématique 30 (1984)

   Contributions — 1er livre jaune
   Colloque : Strasbourg mars 1985
   2e livre jaune (Supporting papers)
   Actes (Proceedings, Cambridge U.P.)

2. Les mathématiques scolaires en 1990
   Document de discussion CIEM
   Colloque : Koweit février 1986

3. Les mathématiques comme discipline de service.
   Document en préparation

fig. 3

Cependant il est trop tôt pour dresser un bilan de l'étude ; en fait, elle ne fait que commencer. Je me bornerai à quelques aspects.

1. Extrême *diversité* selon les pays, les disciplines, les établissements. Exemple : dans la plupart des pays étrangers, les ingénieurs sont formés à l'université. En Angleterre, les mathématiques appliquées ont une tradition ancienne. En France, les approches sont différentes, à Orsay (physique, biologie) et à Dauphine (économie). Au départ, un recensement critique est établi à Orsay, Southampton, Cardiff, Eindhoven, Budapest, Jadanpur.

2. L'enseignement à des non-mathématiciens est un *ferment* pour l'introduction de nouveaux sujets ou de nouvelles méthodes. Ainsi, la statistique s'impose comme sujet d'enseignement pour biologistes. Ce sont les nécessités de l'enseignement qui ont été à l'origine de l'équipe de statistique à Orsay (très active en recherche aujourd'hui).

L'an dernier à Orsay toujours, c'est à des étudiants en PC — et non en MP — qu'on a enseigné les méthodes numériques de résolution des équations différentielles.

3. Il fournit différentes *portes d'entrées* dans les mathématiques. La vision ordinaire des élèves est que la mathématique est une longue théorie linéaire, parcourue au fil des ans, et qu'on ne peut pas accéder au niveau $n+1$ si on n'est passé par le niveau n. C'est aussi la vision héritée de Bour-

baki : la théorie s'établit à partir d'un fondement solide, la théorie des ensembles, et nul ne peut s'introduire s'il n'est passé par les étapes de son développement. Or, heureusement, cette vision est fausse. La structure des mathématiques est une structure de graphe très compliquée, où les branches communiquent et on peut en saisir un morceau à partir de points de départ très divers. En particulier, les probabilités, qu'il faut bien enseigner aux futurs biologistes, sont pour les étudiants du DEUG B l'occasion d'une nouvelle chance de faire des mathématiques ; on voit des étudiants, très faibles au début de l'année, se réveiller brusquement lorsque les probabilités apparaissent, et rattraper rapidement leur retard.

4. L'enseignement pour non-mathématiciens n'est pas un sous-enseignement ou un enseignement de mathématiques appauvries. Au contraire, il s'agit de bien cibler ce qu'on veut, et d'y aller vite, comme je l'ai dit. Pour cela, il faut préférer les méthodes *puissantes et modernes* aux méthodes traditionnelles. Par exemple, pour les physiciens, il y a moins besoin d'analyse classique que des gros outils techniques et conceptuels que sont les espaces de Hilbert, l'intégrale de Lebesgue, les distributions de Schwartz. Pour les probabilités, il ne faut pas hésiter devant l'axiomatique de Kolmogorov, et même devant les modèles non classiques qui permettent — quitte à abandonner l'axiome du choix — de considérer comme mesurables toutes les parties d'un ensemble. Cela veut dire que l'enseignement des mathématiques aux non-mathématiciens est un travail de mathématicien, même s'il suppose la collaboration avec des enseignants d'autres disciplines.

5. L'étude de la CIEM va concerner, d'abord, des enseignements de niveau universitaire. Cependant la question commence à se poser *au niveau du second degré*. En Hollande, le projet HEWET a dégagé un nouveau programme préuniversitaire (16 - 18 ans), à l'intention des utilisateurs des mathématiques dans les sciences sociales et humaines. Le spectre de ce programme doit être étendu, parce que les étudiants peuvent rencontrer dans la suite de leurs études des applications variées. Il s'agit à la fois de familiariser les étudiants avec différentes notions, et de les habituer à la modélisation mathématique. Le projet en est au niveau expérimental. Une équipe a été constituée, avec pour tâche d'explorer quatre domaines : calcul des dérivées et intégrales ("elementary calculus"), matrices avec applications, probabilités et statistiques, informatique (traitement automatique des données). Je tiens à la disposition de l'A.P.M.E.P. le livre remarquable que Jan de Lange a écrit sur le thème des matrices (*figures 4* et *5*), en partant d'exemples très concrets : matrices de distances, matrices de connectivité d'un graphe,... pour aboutir aux notions que le programme prescrit (dans ce cas, sommes et produits de matrices). La *figure 6* est un graphe qui n'est pas dans le livre, mais qui aurait pu y être ; il représente une carte géographique ; laquelle ? (*) Le

(*) Le lecteur aura, bien sûr, reconnu la carte de l'Europe.

projet HEWET a quatre ans ; il a débuté en 1981 avec deux écoles, et poursuivi avec 10 autres, soit 12 en 1983, 40 autres, soit 52, en 1984, et maintenant il est expérimenté à l'échelle de tout le pays. C'est sûrement une expérience à suivre, et j'y reviendrai dans la suite de cet exposé.

Je n'en dirai pas plus sur l'étude de la CIEM. Mais je voudrais continuer à réfléchir avec vous autour du thème à double face, qui déborde de l'enseignement :

— quelle sorte de service les mathématiques apportent-elles aux autres sciences ?

— quelle sorte de stimulation les autres sciences apportent-elles aux mathématiques ?

Au niveau de la recherche, il me semble y avoir une tendance très nette, depuis une dizaine d'années, à des relations plus étroites entre mathématiciens et chercheurs d'autres disciplines — surtout physiciens, mais aussi chimistes, biologistes, ingénieurs, économistes, psychologues, linguistes, etc. —. On en a heureusement terminé avec l'idée — dominante il y a vingt ans — que les structures mathématiques étaient une sorte de clé universelle, un "Sésame-ouvre-toi" de la science universelle. Au lieu d'honorer la mathématique, de se mettre à genoux devant elle, on s'en sert — ce qui est bien —, on en fait — ce qui est mieux —, on en fait faire — ce qui est encore mieux —. Du coup les mathématiciens, dans leurs exposés, cherchent à être compris par des non-mathématiciens, ce qui est une bonne garantie pour être compris par les mathématiciens eux-mêmes.

L'informatique joue un rôle important dans ces nouveaux contacts. En tant que discipline bien sûr : informatique et mathématique ont la parenté la plus étroite. Mais plus encore, me semble-t-il, en tant que technique utilisée par toutes les disciplines. A côté de l'observation et de l'expérimentation, les physiciens utilisent maintenant la simulation. Par exemple, ils ne vont plus étudier la turbulence en soufflerie, mais, à partir des équations de la mécanique des fluides, sur ordinateurs. Et les mathématiciens vont faire la même chose. De sorte que l'activité du mathématicien et celle du physicien, faisant de l'expérimentation sur ordinateur, découvrant et testant des modèles ou des théories, ne vont différer que par le point de vue. L'exemple le plus remarquable est l'immense vogue de tout ce qui a trait à l'itération : systèmes dynamiques, étude des orbites, phénomènes critiques ; il arrive qu'entre physiciens de Saclay et mathématiciens d'Orsay — pour rester dans mon champ de compétence géographique — ce soient exactement les mêmes objets mathématiques qui soient étudiés.

Dans mon champ de compétence mathématique, qui est considéré comme de la mathématique pure quoique son origine, avec Fourier, soit évidemment la physique, il se trouve que les travaux qui me frappent le plus, parmi ceux dont j'ai connaissance depuis 2 mois, sont liés aux applications.

1

GRAPHS AND MATRICES

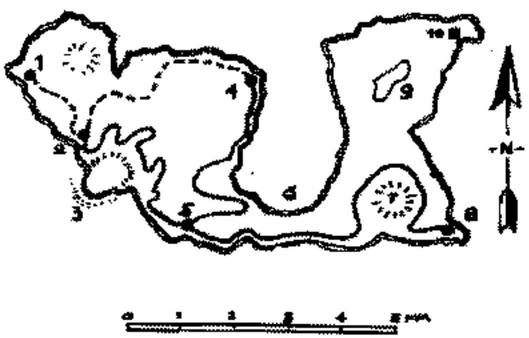


fig. 1

On the map you see the - imaginary - island of Hau, situated in the Pacific Ocean and, as many islands overthere, vulcanic in origin and partly covered with a tropical rain forest.
You only see three main roads, from the 'capital' St. Haula to Moau and from St. Haula to Lalou; and from St. Haula to Kota Hua; the lengths of these roads are 4, 7 and 9 kilometers respectively.
There are also roads from Lalou to Moau and Point Hau, 6 and 3 km respectively.
A school can be built as the result of a development aid project.
It is decided that this school will be built in one of the five villages situated on the roads.

➤ 1. Which factors will be important in determining the 'right' location of this school?

fig. 5

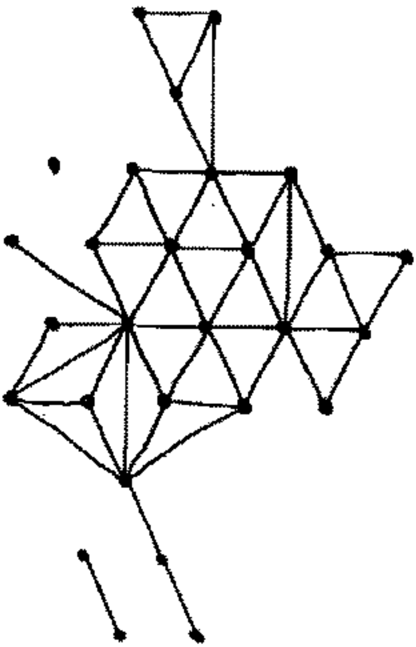


fig. 6

Il y a d'abord la découverte d'une nouvelle fonction, par Yves Meyer, qui jouit de propriétés remarquables. Si on prend toutes ses translatées par des entiers, et les dilatées de ces fonctions dans un rapport qui est une puissance de 2, on obtient un système orthogonal complet dans l'espace $L^2(R)$ (*figure 7* : l'"ondelette" d'Yves Meyer). Si on développe une fonction selon ce système, les coefficients décrivent les propriétés de la fonction beaucoup mieux que ne le font les coefficients de Fourier, ou les coefficients selon d'autres systèmes connus. Le développement lui-même est ce que les mathématiciens de l'école de Zygmund à Chicago ont appelé une décomposition atomique, et de telles décompositions sont apparues en liaison avec les nouvelles classes de fonctions qui se sont imposées à l'attention depuis une quinzaine d'années. L'inspiration d'Yves Meyer vient pour une part de là. Mais pour une part aussi d'une équipe d'ingénieurs d'Elf Aquitaine, qui, depuis des années, pratique des décompositions atomiques sans le savoir, pour l'étude des signaux sismiques, et en vue de l'exploration des gisements de pétrole. Ainsi la découverte d'Yves Meyer, avant même d'être connue du monde mathématique, est déjà utilisée par des ingénieurs : sa fonction est tabulée, des développements sont calculés, la machine tourne.

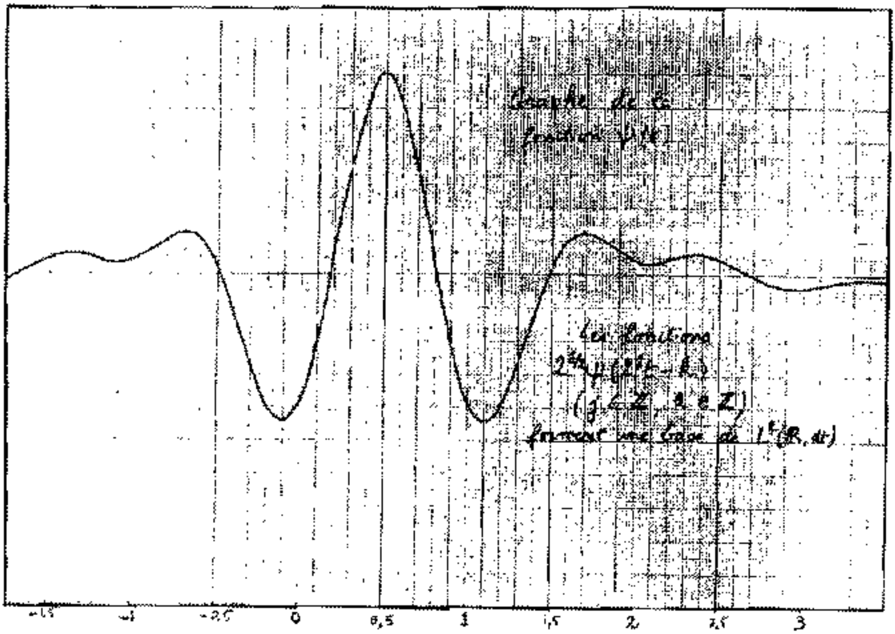


fig. 7

Il y a une série de découvertes sur les pavages de Penrose — une triangulation du plan découverte il y a 10 ans par le mathématicien américain Penrose, hors de tout souci d'application (*), et qui devient brusquement populaire chez les chimistes et les physiciens à la suite de la découverte en 1984 de symétries d'ordre 5 dans le spectre de diffraction de certaines substances (alliage brusquement refroidi de manganèse et d'aluminium) — contrairement à tous les principes de la cristallographie —. Je viens d'entendre deux exposés sur le sujet, l'un par un physicien, M. Duneau, et l'autre par un mathématicien, Jacques Peyrière. Le physicien faisant de très bonnes mathématiques — y compris en redécouvrant une partie de la théorie des modèles, élaborée par Yves Meyer il y a 15 ans — et le mathématicien établissait des résultats sur la fréquence des motifs qu'on rencontre dans les pavages de Penrose, à l'intention des physiciens (*figure 8*).

Je pourrais évoquer aussi le renouveau de la théorie des polynômes orthogonaux, largement due à l'intérêt manifesté par les physiciens, ou mon propre travail sur le chaos multiplicatif, qui est inspiré par le modèle de turbulence de B. Mandelbrot.

(*) Cf l'exposition "Horizons mathématiques".

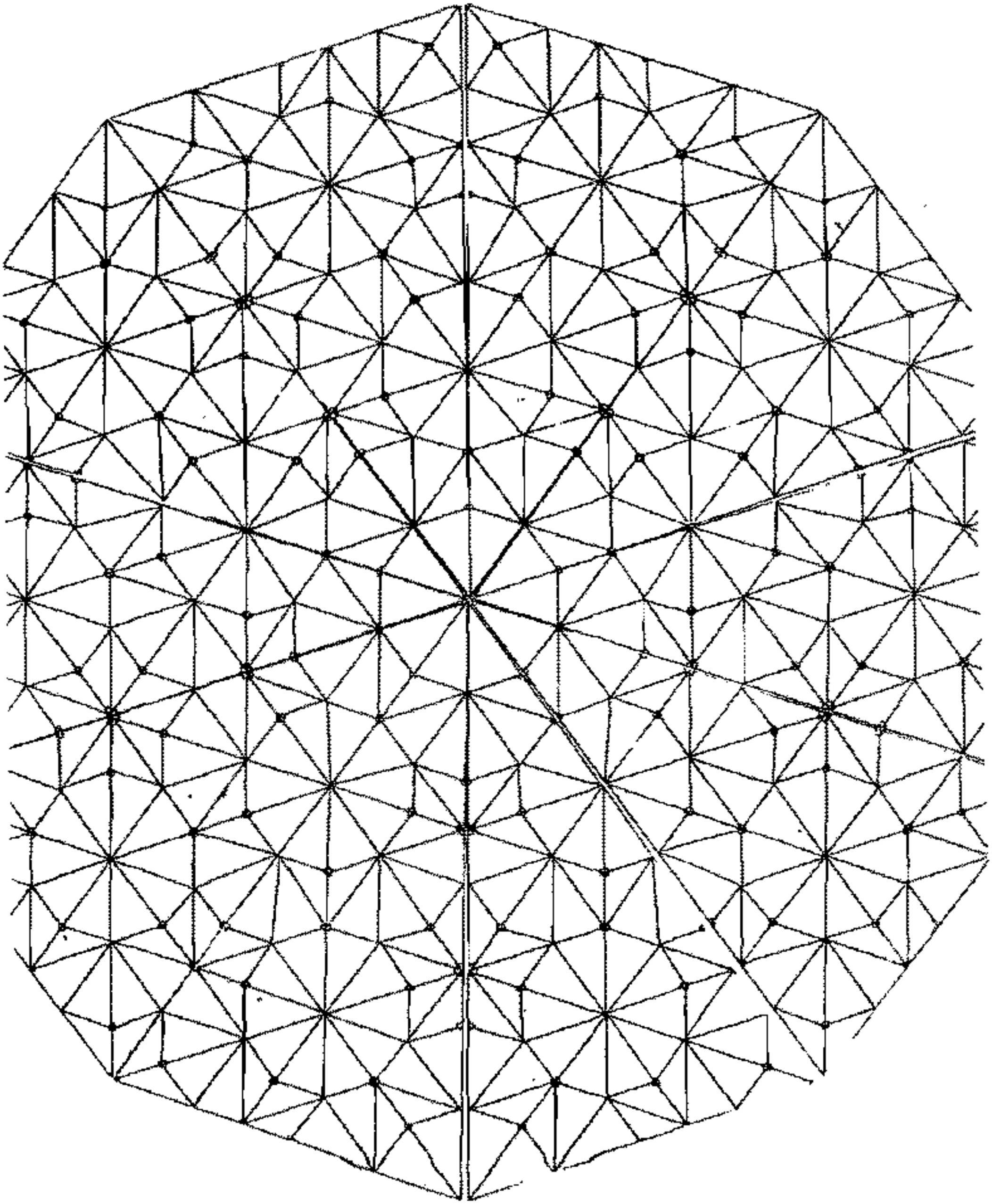
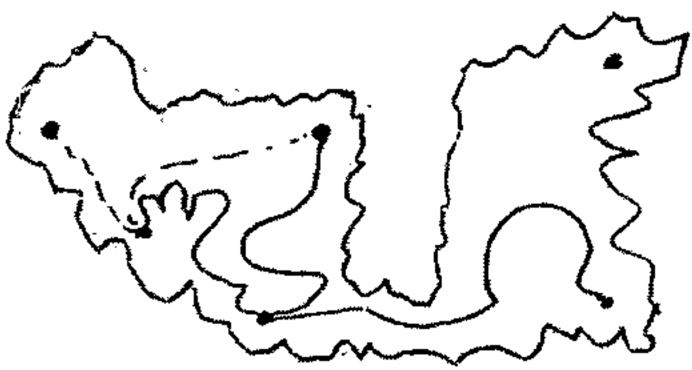


fig. 8

C'est assez, je pense, à l'appui de la thèse que je voulais présenter : dans les mathématiques qui se font, les autres sciences sont présentes, et, inversement, il y a beaucoup de mathématique dans toute la science qui se fait.

Je voudrais consacrer toute la suite de cet exposé à la géographie, ou plutôt à la géographie vue par un mathématicien.

Une première observation. La géographie produit en masse des nombres et des figures, c'est-à-dire ce dont s'occupent les mathématiciens. Un livre de géographie, c'est une mine de problèmes, et je crois que c'est vrai pour l'enseignement élémentaire comme c'est vrai pour le chercheur mathématicien. Pour l'enseignement, je crois qu'il y aurait grand intérêt à explorer et à exploiter cette mine. C'est d'ailleurs ce que font les collègues hollandais qui particient au projet HEWET. Le livre sur les matrices commence par la description d'une île imaginaire dans le Pacifique, avec le réseau des routes existantes, et le problème d'implanter une école ; c'est l'occasion de tracer un graphe métrique, et de poser un problème de maximax (*figure 9*). Ils ont, à l'intention des enfants de 12 à 14 ans, un livre d'exercices qui se présente comme une bande dessinée avec des cartes géographiques, et qui n'est autre que le tour du monde en 80 jours, de Jules



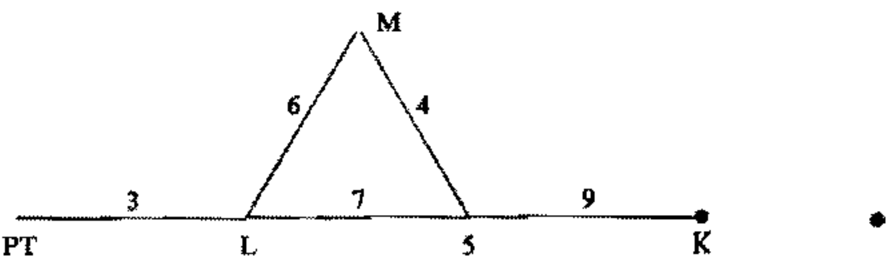


fig. 9

Verne (*figure 10*). Naturellement, ils utilisent systématiquement les cartes avec lignes de niveau pour l'introduction des notions concernant les fonctions de plusieurs variables : gradient, lignes de plus grande pente, sommets, cuvettes, cols. Les cartes météorologiques sont un aliment de choix ; exemple de question : quels sont les points où le temps est le plus tranquille ? Réponse : les points cols pour la pression (*figure 11* et *12*).

De façon générale, les données numériques qui abondaient autrefois dans les livres de géographie — elles sont un peu moins nombreuses peut-être maintenant, et c'est dommage — ne sont intéressantes que si on les traite, on les organise, on en tire des relations. Par exemple, quelles relations y a-t-il entre les populations, les productions intérieures brutes, les surfaces, les dimensions linéaires et les longueurs des fleuves de pays comparables ? C'est l'occasion de vérifier des proportionnalités, et de découvrir des relations plus compliquées. La relation entre la longueur des rivières et la surface de leurs bassins est un sujet très intéressant ; j'y reviendrai. Dans l'excellente brochure de l'A.P.M.E.P. sur l'analyse des données, des thèmes géographiques sont largement exploités, et c'est l'occasion d'introduire différentes méthodes (Th. Hatt, *Introduction des méthodes d'analyses des données en géographie au lycée*, pp. 55-96, Publication A.P.M.E.P. n° 28).

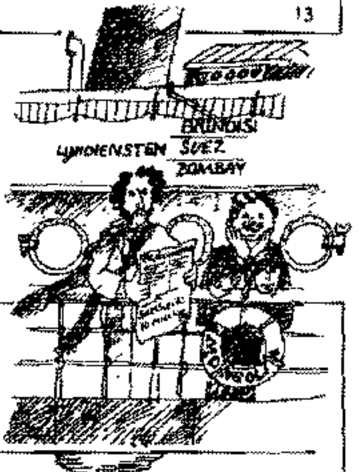
Les figures de la géographie sont les figures de base de notre géométrie. Le rôle éminent du triangle chez Euclide, c'est le rôle éminent de la triangulation en géographie. Le rôle particulier des triangles rectangles chez Platon (*figure 13*), (ils composent les faces des polyèdres qui représentent les quatre éléments) c'est le rôle des triangles rectangles dans la mesure des champs ; et je dirai un mot tout à l'heure des polyèdres réguliers tels qu'ils apparaissent chez Platon d'une part, et chez le géologue Elie de Beaumont d'autre part.

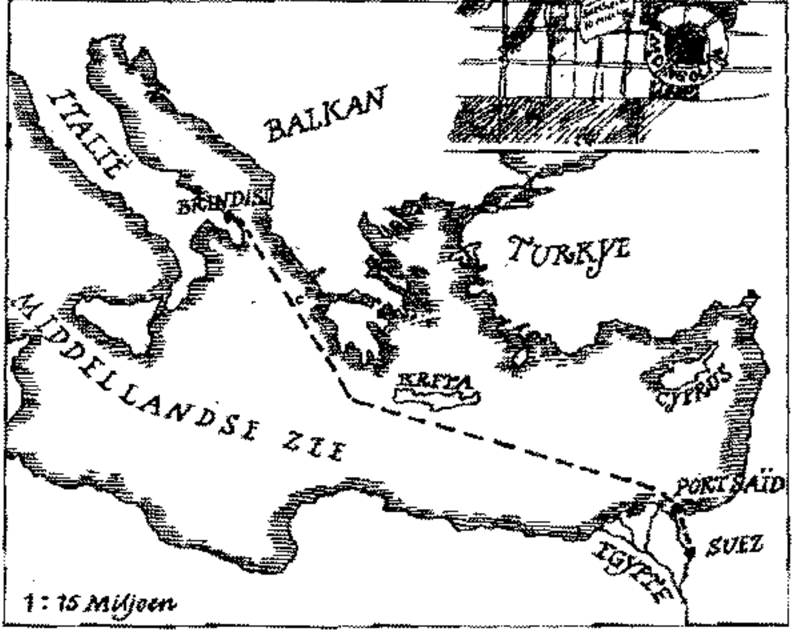
A vrai dire, la géographie fournit des figures sphériques. C'est sans doute une lacune de notre enseignement que d'ignorer la géométrie sphérique. Il est pourtant intéressant et hygiénique d'avoir vu des triangles dont la somme des angles dépasse 180° : par exemple le triangle rectangle dont les angles sont 90°, 60° et 36°. Dans un livre assez récent de M. J. Wenninger, *Spherical models* (1979) on trouve des figures bien intéressantes (*figure 14*). La figure reproduite représente la décomposition de la sphère en 120 triangles rectangles du type que je viens de dire. En les groupant convenablement, on obtient 20 triangles équilatéraux décomposés "à la Platon" ; en les groupant d'autre façon, 12 pentagones réguliers décomposés chacun en 10 triangles. Ces triangles équilatéraux et pentagones sphériques sont les projections sur la sphère des faces d'un icosaèdre régulier et d'un dodécaèdre régulier ayant pour centre le centre de la sphère, et qui sont en dualité : chaque face de l'un correspond à un sommet de l'autre. Pour obtenir cette décomposition de la sphère en 120 triangles, il suffit de 15 grands cercles (qui peuvent être définis à partir du dodécaèdre, ou de la décomposition pentagonale de la sphère qui lui correspond : ce sont les plans passant par le centre et une des arêtes).

Over de Middellandse zee

Opdracht 5

De "Mongolia", het schip dat Fogg en Passepartout eerst in Suez en vervolgens in Bombay brengt, is een van de snelste schepen van de maatschappij (de P & O Company).
De vastgestelde snelheid van 10 mijl per uur (1 zeemijl = 1852 meter) heeft het schip op het traject Brindisi-Suez altijd ruimschoots gehaald.





De Mongolia is zaterdag om 5 uur 's morgens uit Brindisi vertrokken.

a. Op welke dag en hoe laat ongeveer verwachten inspecteur Fix en de Engelse consul de aankomst van de Mongolia in Suez?
Schrijf je berekening op.

fig. 10

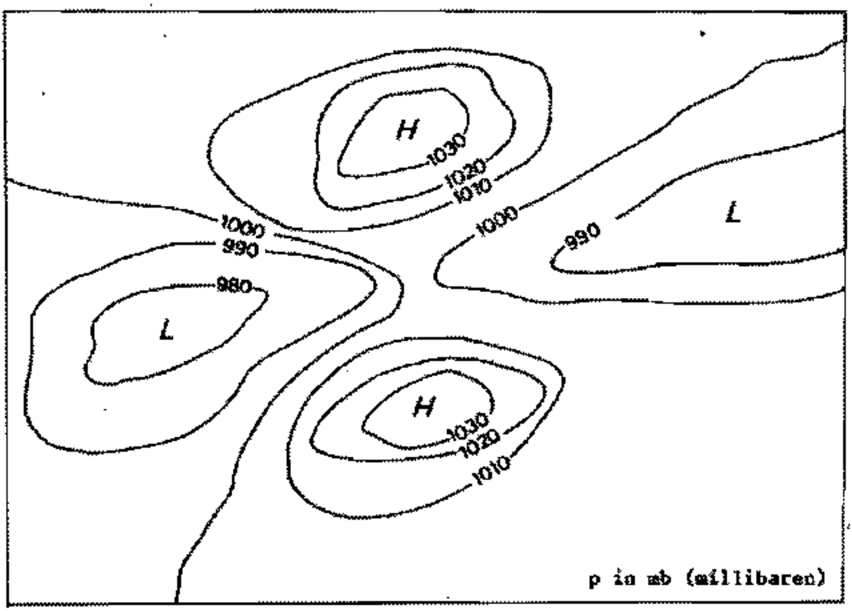
➢ 94. Je ziet met een stippellijn de route naar de top aangegeven. Hoe steil loopt die route het laatste gedeelte, d.w.z. vanaf 13.100 voet tot de top?

➢ 95. Teken de dwarsdoorsnede die door St. John's Peak en Lows Peak gaat. Wat is het laagste punt tussen die twee pieken?

➢ 96. Teken de dwarsdoorsnede die van A naar B gaat. Wat is het hoogste punt tussen A en B? Noem dit punt Z.

Zo'n punt als Z, dat enerzijds een maximum en anderzijds een minimum is, noemen we een *zadelpunt*. Kun je dat zadelpunt op de foto terugvinden?

Ook in de meteorologie spelen zadelpunten een belangrijke rol.
Wijs het zadelpunt aan op het volgende kaartje:



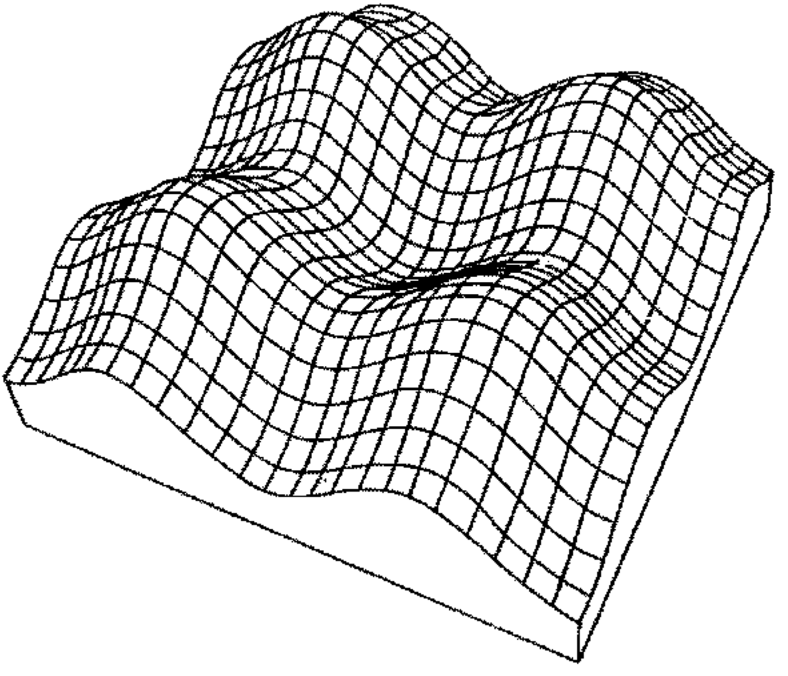
In een zadelgebied heerst meestal rustig weer.

➢ 97. Zou je kunnen verklaren waarom?

fig. II

Verder overheerst het drukgebied waarvan de isobaren het sterkst gekromd zijn langs het zadelgebied.

➢ 98. Overheerst hier een hoge- of lagedrukgebied?



Hierboven zie je een plaatje van een model van een heuvelachtig landschap.

➢ 99. a. Hoeveel zadelpunten staan erop? Waar?

b. Hoeveel maxima staan erop? Waar?

c. Hoeveel minima staan erop? Waar?

d. Hoe zal dit model eruit zien als wij er loodrecht boven vliegen?

e. Als verder gegeven is dat de maxima op 400 m, de zadelpunten op 200 m en de minima op 0 m liggen, probeer dan een kaartje met niveaulijnen te maken van bovenstaand model.

fig. 12

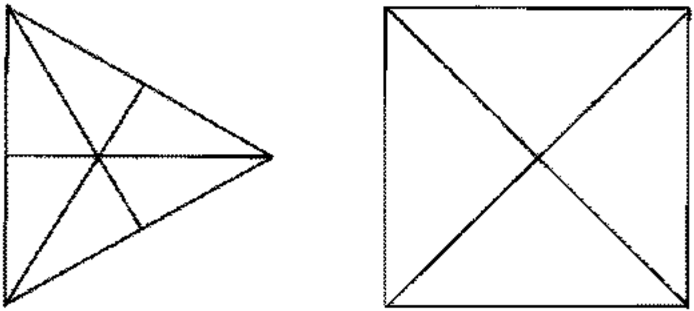


fig. 13

Plate 4. Spherical icosahedron

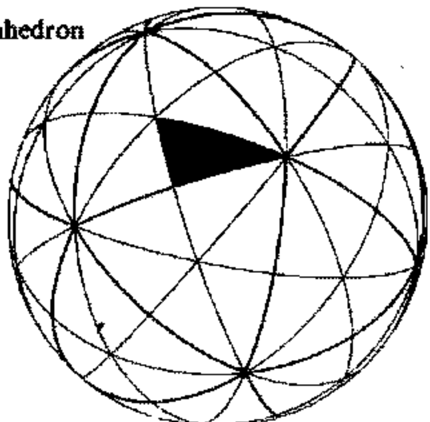
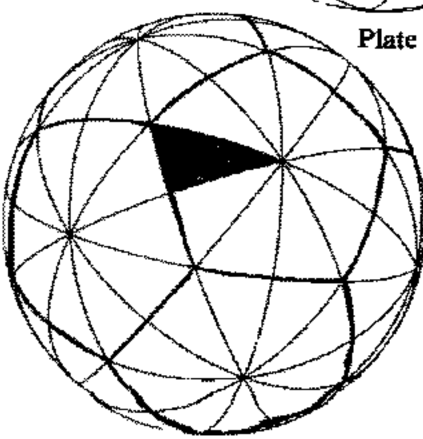


Plate 5. Spherical dodecahedron



WENNINGER

SPHERICAL MODELS

CUP 1979

fig. 14

Si j'insiste sur cette figure, c'est parce que, avant de la voir — tout récemment à vrai dire — dans le livre de Wenninger, je la connaissais par une note aux Comptes Rendus du géologue Elie de Beaumont, datée de septembre 1850. Dans cette longue note (14 pages) Elie de Beaumont explique sa théorie des plissements montagneux. Il a découvert que les plissements montagneux (définis schématiquement par un élément de contact — point et tangente — sur la sphère terrestre) se groupent en systèmes d'éléments "parallèles", c'est-à-dire dont la direction est contenue dans une même direction de plan. Ainsi chaque système correspond à un plan équatorial de la sphère, et à un grand cercle. Pour l'Europe, il existe 21 systèmes bien connus en 1850. Elie de Beaumont a l'idée de calculer les angles des plans équatoriaux correspondants, soit 210 angles, et de les classer. Il apparaît des lacunes, et des bandes étroites où les angles s'accumulent. Elie de Beaumont décrit éloquemment ses états d'âme, ses essais, son premier succès : le "réseau pentagonal" formé par les quinze grands cercles de la *figure 14*. A vrai dire, ce réseau ne suffit pas. Il faut lui adjoindre d'autres grands cercles. De Beaumont est très clair, je le cite.

"Pour procéder méthodiquement à cette adjonction, j'ai considéré que les grands cercles primitifs du réseau pentagonal, par suite de leurs intersections sous l'angle de 90 degrés, constituent cinq systèmes tri-rectangulaires coordonnés entre eux avec une parfaite régularité. J'ai remarqué, en outre, que les plans de chacun des systèmes tri-rectangulaires peuvent être considérés comme respectivement parallèles aux six faces d'un cube ayant son centre au centre de la sphère. J'ai reconnu que ces cinq cubes ne sont autre chose que les cinq positions d'un même cube placé d'abord dans une situation quelconque, et tournant séparément de 180 degrés autour de chacune de ses quatre diagonales. Je me suis enfin représenté le cube dans chacune de ses cinq positions comme le noyau d'un système cristallin régulier, composé des faces de l'octaèdre, du dodécaèdre rhomboïdal, et de tous les dodécaèdres pentagonaux, trapézoèdres, etc., que le système cristallin régulier comprend en nombre illimité. Imaginant ensuite par le centre de la sphère des plans indéfinis parallèles aux diverses faces de ces types cristallins, j'ai eu sur la sphère un nombre infini de grands cercles coordonnés entre eux avec une régularité parfaite, suivant le genre de symétrie propre au réseau pentagonal primitif. C'est l'ensemble de ce nombre infini de cercles que j'appelle le Réseau pentagonal complet.

"C'est là sans doute un système de plans fort complexe, mais il est certain qu'il divise tout l'espace angulaire autour du point central avec une symétrie et une régularité singulières. Les propriétés curieuses de ce système ne peuvent avoir échappé à l'attention des géomètres...".

Et c'est le succès !

> "Or, aussitôt que j'ai eu mis la main à l'œuvre, j'ai eu la satisfaction de voir sortir en majorité des Tables de logarithmes, les angles que l'observation m'avait fournis ; *le secret de ces angles était dès lors dévoilé*".

Suivent dix pages d'explications, et une conclusion où l'on voit la mathématique guider le géologue :

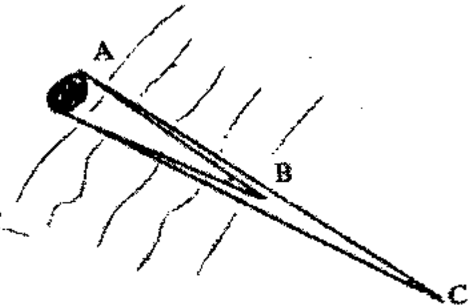
> "Les quinze cercles qui divisent la sphère en douze pentagones réguliers jouissent d'une propriété de contour minimum, qui en fait le système de lignes *de plus faible écrasement.* Si tous les ridements de l'écorce terrestre s'étaient produits simultanément, ces quinze cercles se seraient peut-être dessinés seuls. Mais comme la production de ces différents systèmes de montagnes a été successive, les cercles octaédriques, dodécaédriques, et autres, ont été probablement des intermédiaires nécessaires pour passer de l'un à l'autre des cercles fondamentaux. Tous ensemble constituent peut-être comme une espèce de *clavier* sur lequel la nature toujours en action exécute, depuis que le globe terrestre a commencé de se refroidir, une sorte d'harmonie séculaire."

Ce beau texte évoque Platon. Chez Platon (Timée) les polyèdres réguliers qui représentent les quatre éléments sont le cube (terre), le tétraèdre (feu), l'octaèdre (air) et l'icosaèdre (eau). Reste le dodécaèdre : "c'est à l'Univers", dit Platon (traduction Robin), "que Dieu en fit l'application, pour en dessiner l'épure" (Timée, 55, c). D'ailleurs, au soir de sa mort, Socrate, décrivant la Terre telle qu'on la verrait d'en haut, la décrit ainsi : "elle aurait l'aspect d'un ballon bigarré, dans le genre des balles à douze pièces, et dont les divisions seraient marquées par des couleurs" (Phédon, 110, b). Cette dernière citation montre qu'en tous cas le dodécaèdre servait déjà de modèle aux fabricants de ballons !

Entre Platon et Elie de Beaumont, le dodécaèdre sphérique a attiré l'attention de J. Neper, de C.F. Gauss, de J.F. Lambert et d'autres, sous le nom merveilleux de *Pentagramma mirificum* (cf. H.G. Bigalke, Mathematisch Physikalische Semesterberichte 25 (1978), pp. 272-289). Mais il n'est pas évident que le "réseau pentagonal complet" ait jamais été considéré avant 1850. Personnellement, j'ai connu la théorie d'Elie de Beaumont grâce à l'*Astronomie populaire* d'Arago. Comme le bicentenaire de la naissance d'Arago tombe en 1986, j'en profite pour inviter à la lecture de cet ouvrage : c'est une mine d'idées, d'informations et de documents.

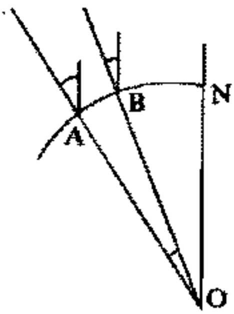
La *figure 15* dit une petite partie de ce que j'y ai trouvé. Arago a pour principe de *tout* expliquer, et de ne supposer aucune connaissance préalable du lecteur. Ainsi l'ouvrage commence par des notions de géométrie, et le volume concernant la Terre par les preuves de sa rotondité. Pour illustrer les propriétés des petits angles, Arago montre comment évaluer, à partir d'un point B, un objet A inaccessible : on recule jusqu'au point C d'où l'on voit A sous un angle moitié ; alors BC = BA. La première

ARAGAO
Astronomie populaire
Notions de géométrie



Géologie : Elie de Beaumont

Géodésie : triangulation et mesure du méridien



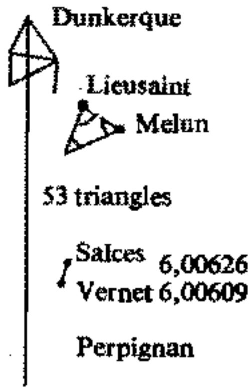


fig. 15

preuve de la rotondité de la Terre, c'est la manière dont un bateau disparaît à l'horizon (coque d'abord, voiles ensuite). Le début de la carrière scientifique d'Arago — qui lui valut d'être élu à l'Académie des Sciences à l'âge de 22 ans — c'est l'aventure de la géodésie en Espagne, et la mesure du méridien. Du long développement qu'il consacre à ce sujet j'ai extrait une figure : le principe de la mesure des arcs de méridien au moyen des visées, en A et B, d'une étoile circompolaire au moment de son passage au méridien (l'angle en O est la différence des angles en A et en B ; la précision des mesures permet l'évaluation de l'aplatissement de la terre en N, environ 1/300) ; et quelques données sur la triangulation du méridien de Paris entre Dunkerque et Perpignan, qu'il me faut commenter. On choisit une *base* : un segment dont on puisse assez facilement mesurer la longueur au moyen du mètre étalon ("assez" est tout relatif : la mesure du segment Melun-Lieusaint, près de Paris, environ 10 Km (6,07590 lieues), a nécessité 45 jours ; celle du segment Salces-Vernet, près de Perpignan, 51 jours). Puis on triangule, en n'utilisant que des mesures angulaires. Il faut ainsi 53 triangles pour relier les deux bases. Le triomphe de la géodésie, c'est la remarquable coïncidence de la mesure de la seconde base (6,00625 lieues) et son calcul à partir de la première et des triangles (6,00609) : la différence (environ 30 cm) est à peine supérieure à l'erreur probable sur la mesure. Par parenthèse, le théorème central limite de

Laplace (approximation par la "loi de Gauss") avait pour objet principal l'évaluation des erreurs probables dans ce type de mesures.

J'ai annoncé quelques remarques sur les fleuves et les bassins. C'est un sujet intéressant. On trouve généralement dans les livres de géographie la *longueur* des rivières. Est-ce une bonne notion ? H. Steinhaus l'avait critiquée, dans un texte où il fractalisait avant la lettre : "The left bank of the Vistula, when measured with increased precision, would furnish lengths 10, 100 and even 1000 times as great as the length read off a school map. A stately nearly adequate of reality would be to call most arcs encountered in nature not rectifiable". D'un autre côté, un bateau qui remonte une rivière a une idée assez claire de la distance qu'il parcourt ; un bateau très petit décrirait la ligne la plus courte joignant deux points dans le lit de la rivière (qui n'est pas une courbe, mais une surface !). La critique principale est alors que c'est une notion instable : si le lit grossit (inondations) la longueur peut diminuer brusquement. Une donnée beaucoup plus fiable est celle de *surface du bassin*. Sur le tableau joint (*figure 16*) figurent la longueur et la surface du bassin des principaux cours d'eau du bassin Seine-Normandie ; c'est M. Jean-Claude Dupuis chef du service de cartographie à l'I.G.N., qui m'a obligeamment fourni une carte d'où j'ai extrait ces données. En première approximation, la

Bassin Seine-Normandie
Surfaces des bassins (km²) et longueurs des cours d'eau (km)

			Fleuves côtiers	
Seine	73 700	762		
Aube	4 670	247	1 020	68
Yonne	10 900	281	2 220	129
Loing	4 170	173	1 300	99
Essonne	1 950	98	1 790	110
Yvette	945	51	2 240	172
Marne	12 700	518	432	61
Oise	16 900	518	1 240	120
Eure	6 060	211	1 480	76
Affluents	1 310	114	580	82
	1 370	175	460	55
Yonne	3 090	195	1 010	71
	980	57		
Essonne	745	54		
Marne	2 140	150		
	1 190	119		
	295	34		
	1 730	91		
	1 220	90		
Oise	1 040	127		
	1 480	128		
(Aisne)	7 950	238		
Eure	1 320	128		

fig. 16

surface s varie comme le carré de la longueur ℓ. Cependant, si l'on considère l'ensemble des points ($\log s$, $\log \ell$) (*figure 17*) les droites de régression (pour la Seine et ses affluents d'une part, l'ensemble de tous les cours d'eau d'autre part) ont des pentes qui s'écartent sensiblement de 0,5, et avoisinent 0,6. C'est dire que, si l'on peut donner un sens à la dimension des rivières de ce bassin, elle avoisine 1,2 (car à coup sûr la dimension des bassins est 2). L'image qu'on peut se faire du trajet d'une rivière ressemble plus à la courbe de Von Koch (*figure 18*) qu'à une ligne droite. Ainsi, la comparaison entre la "longueur" des fleuves et la surface des bassins fluviaux amène de nouveau à considérer comme modèle naturel du cours des fleuves des courbes non rectifiables. La formule $\ell = s^{0,6}$ est une estimation passable de la longueur usuelle (en km) en fonction de la surface du bassin (en km²) ; elle donne l'ordre de grandeur convenable aussi bien pour les petits fleuves côtiers que pour les plus grands fleuves du monde.

La courbe de Von Koch intervient en mathématiques sous des noms et pour des propos divers ("quasi-cercles", "quasi-hélices"). Voici l'usage que H. Withney fit d'une telle courbe en 1934. Il s'agissait de construire une fonction $f(x,y)$ paradoxale : elle est pourvue d'un gradient en chaque point, ce gradient est continu, il s'annule sur une courbe, et les valeurs de f aux extrémités de la courbe sont différentes ! Autrement dit, si $f(x,y)$ représente une altitude, et la courbe une route, c'est une route qui permet de passer d'une altitude h_0 à une altitude $h_1 > h_0$ sans jamais monter de façon sensible. La solution consiste à prendre pour plan de la route une courbe de Von Koch, de considérer comme altitude le paramètre naturel, variant entre 0 et 1, et d'étendre convenablement la fonction altitude, ainsi définie sur la courbe, à tout un carré. La manière de faire cela, c'est le prototype du fameux "théorème de prolongement de Whitney". On pourrait poursuivre, et donner d'autres exemples d'intervention de ces courbes "fractales" en mathématiques et en géographie, mais il est temps de conclure.

J'ai pris quelques exemples en géographie. Mais, en regardant bien, toutes les disciplines scolaires fournissent des sujets de réflexion au mathématicien. Dans bien des cas, il est abusif de dire que la mathématique est discipline de service : ce sont plutôt les autres disciplines qui servent de pourvoyeuses de problèmes pour les mathématiciens.

J'ai rappelé les liens étroits entre mathématique, informatique, physique. En biologie, le livre de Changeux, *l'Homme Neuronal*, est une mine de réflexions pour le mathématicien. Le traité de Tesnières (mort à Montpellier en 1954) est une sorte de traitement mathématique de la linguistique ; c'est sans doute faute d'attention de la part des mathématiciens que son nom est ignoré alors que celui de Chomsky est célèbre. Sa décomposition des phrases en arbres - stemmas - (ou son équivalent) est le prolégomène à toute tentative de traduction automatique.

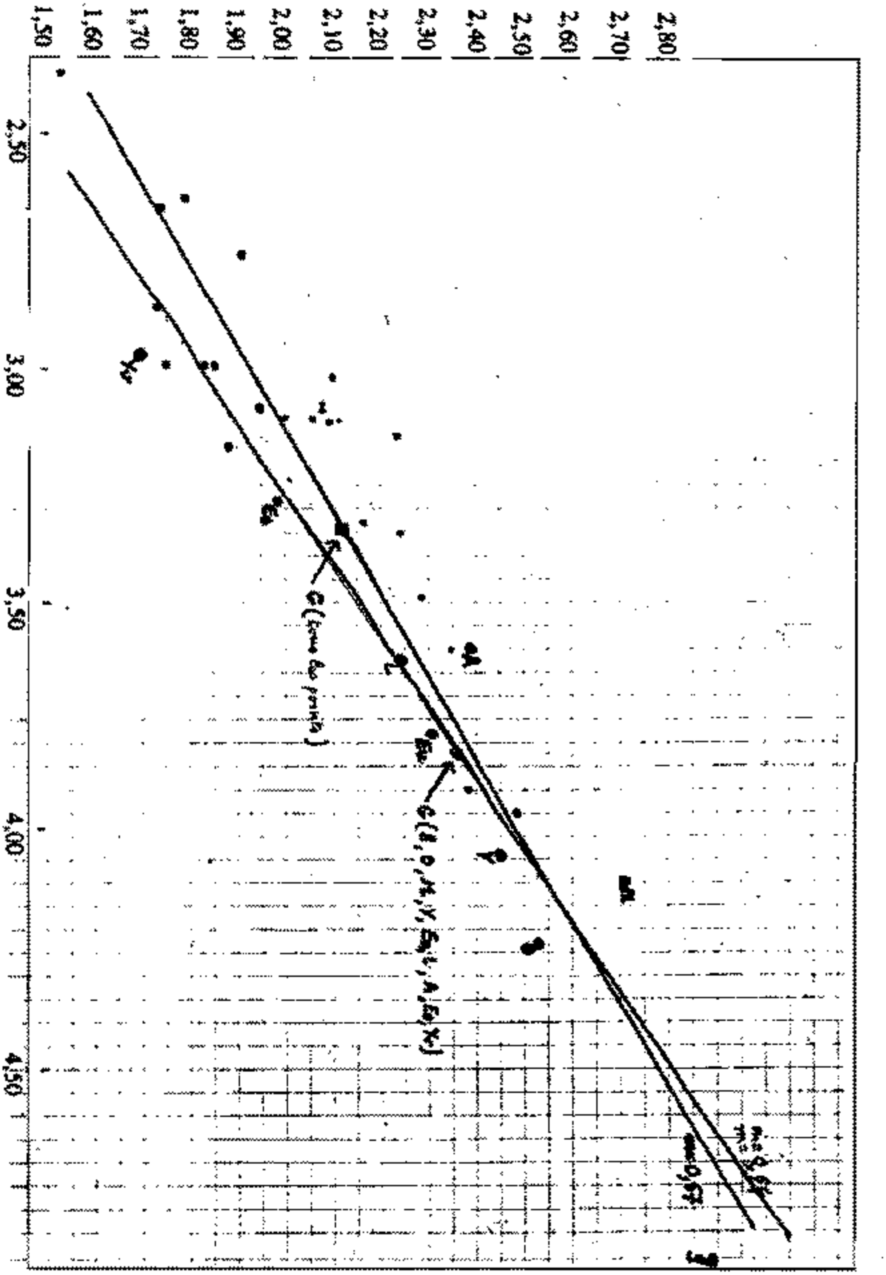
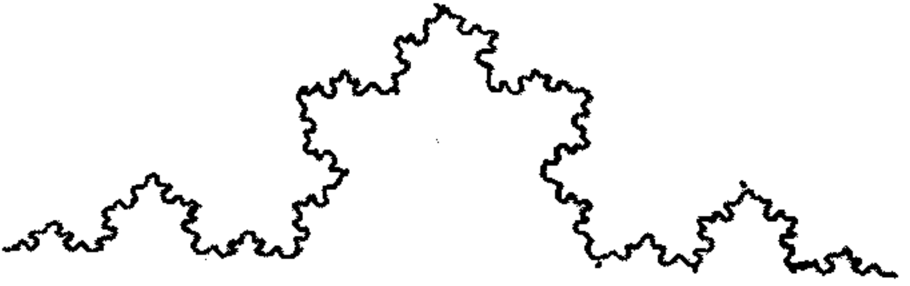

1,50
1,60
1,70
1,80
1,90
2,00
2,10
2,20
2,30
2,40
2,50
2,60
2,70
2,80
2,50
3,00
3,50
4,00
4,50

fig. 17

Bull. APM
1970



Courbe de VON KOCH (1904)

Dimension $\frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}26\ldots$

Hassley WHITNEY 1934

fig. 18

L'idée, c'est que, en se mêlant aux autres sciences et en se mêlant des autres sciences, les mathématiques d'aujourd'hui renouent avec la meilleure tradition scientifique, en se révélant plus utiles, plus puissantes, plus belles que jamais.

L'étude de la C.I.E.M. à laquelle J.P. KAHANE fait allusion au début de sa conférence et qui porte le même titre, fait l'objet d'un document de discussion destiné à une large consultation internationale et publié dans le numéro d'Avril 86 de la "Gazette des Mathématiciens" disponible dans tous les départements universitaires de mathématiques.

Le comité de programme souhaite recevoir des contributions sur un ou plusieurs thèmes abordés. Les textes, individuels ou collectifs doivent être dactylographiés en moins de 16 pages et communiqués à J.P. KAHANE avant le 30 Octobre 1986.