Bulletin de l'APMEP n°356 - Décembre 1986

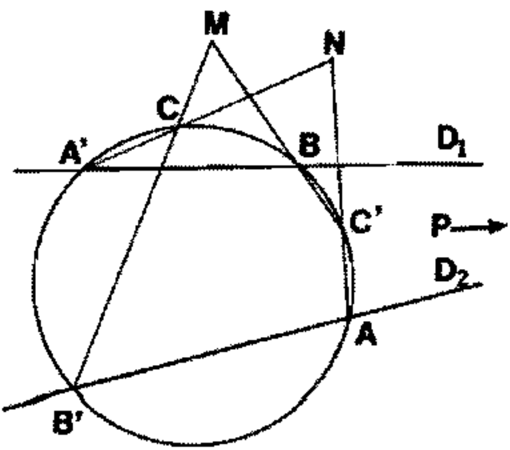
courrier des lecteurs

la 16^e solution...

par Claude Tisseron
E.N.S. Bizerte

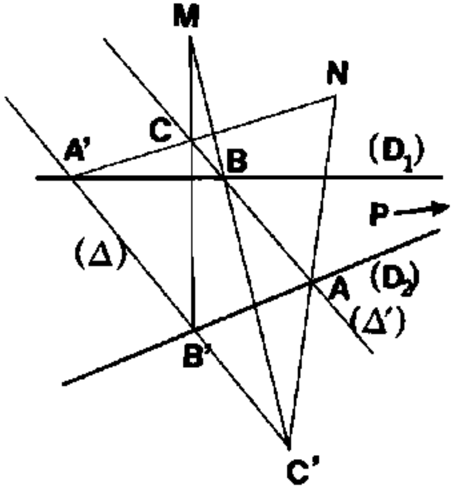
Il a déjà été donné quinze solutions au problème qui consiste à "joindre un point M au point d'intersection P de deux droites (D_1) et (D_2) se coupant en dehors de la feuille" (cf. les Bulletins A.P.M.E.P. antérieurs, notamment ceux de septembre 85 (p. 672 avec ses 11 solutions) et de février 86 (p. 110 avec 3 solutions)).

Quinze solutions ! "c'est beaucoup, ce n'est pas trop !" comme dirait Bobby Lapointe ! Aussi je ne résiste pas au plaisir de proposer une seizième solution au demeurant très sophistiquée mais qui utilise seulement cinq lignes ; quatre droites et un cercle ! La voici :



1. Tracer un cercle ($\mathcal{C}$) qui coupe (D_1) et (D_2) en A', B, B', A comme ci-contre.
2. MB' coupe ($\mathcal{C}$) en C ;
   MB coupe ($\mathcal{C}$) en C'.
3. Les droites (CA') et (AC') se coupent en un point N aligné avec M et P (la raison sera donnée ci-dessous).

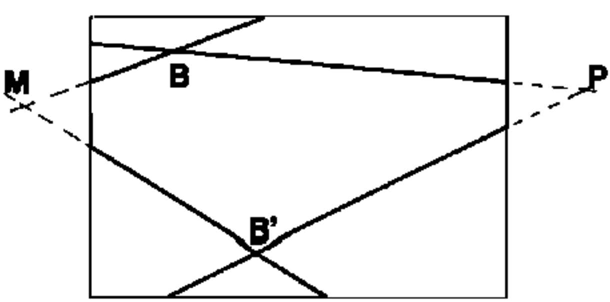
Si on remplace le cercle par deux sécantes à (D_1) et (D_2), on retrouve la 3[e] construction proposée par Henri Fraysse dans le Bulletin de février 86. La voici rappelée ici avec des notations différentes :



1. (Δ) et (Δ') coupent (D_1) et (D_2) en A', B, B', A comme ci-contre..
2. MB' coupe (Δ') en C ;
   MB coupe (Δ) en C'.
3. Les droites (CA') et (AC') se coupent en un point N aligné avec M et P.

Le piquant de l'affaire est qu'on peut remplacer le cercle par une conique (évidemment moins facile à tracer !). La justification de ces constructions est le "théorème de l'hexagone de Pascal", qui dit que pour six points A, B, C, A', B', C' d'une conique décomposée ou non (donc en particulier pour un cercle ou deux droites !) les points d'intersections M, N, P des couples de droites (BC') et (CB'), (CA') et (AC'), (AB') et (BA') sont alignés. (Le cas où la conique est constituée de deux droites est aussi appelé le théorème de Pappus).

On peut considérer que ces constructions ne sont peut être pas dans l'esprit du problème initial ! Elles me semblent quand même intéressantes. D'autant plus qu'elles restent possibles même si la donnée du point M est remplacée par celle de deux sécantes MB et MB' avec $B \in (D_1)$ et $B' \in (D_2)$, avec éventuellement M "en dehors de la feuille". Ce qui permet de résoudre le problème suivant :

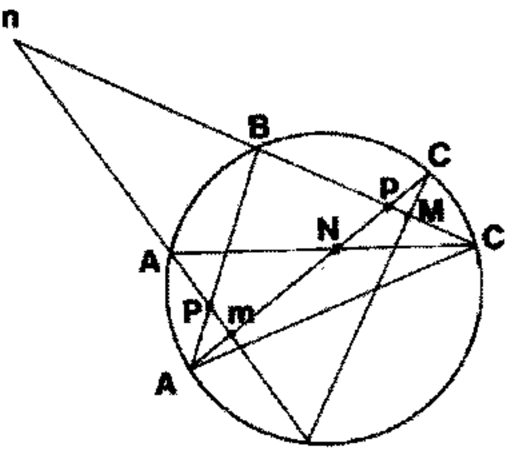


En restant sur la feuille, construire la trace de la droite (MP).

En fait la première construction (utilisant le théorème de Desargues), proposée par Henri Fraysse, s'applique aussi sans modification pour ce nouveau problème. Des constructions utilisant une homothétie sont aussi possibles évidemment.

Les diverses constructions utilisant les propriétés de Pappus ou de Desargues expriment des propriétés très profondes de la géométrie d'incidence. Elles doivent être prises comme axiomes si on veut fonder axiomatiquement la géométrie projective *plane.* A ce sujet on peut lire avec intérêt ce que dit J. Cavaillès ([2] p. 66 à 75) à propos du travail d'Hilbert [4] sur ce sujet. (Cf. aussi [5] p. 197 à 203). Pour des démonstrations des théorèmes de Desargues et/ou de Pascal, on peut consulter [1], [3], [5] ou [6].

Comme il a été question du théorème de Pascal (pour le cercle) dans le Bulletin de février (p. 108), j'en propose une démonstration relativement simple due à Rouché (cf. [1] p. 240). Elle utilise le théorème de Ménélaüs et le fait que quand une corde (AB) d'un cercle $\mathcal{C}$ (O,R) passe par un point fixe M, le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est constant (de valeur $MO^2 - R^2$). On imagine les points A, B', C, A', B, C', dans cet ordre, comme les sommets d'un hexagone ; alors les paires considérées (AB'),(BA'); (BC'),(CB') ; (CA'),(AC') sont des paires "de côtés opposés". On prend aussi les points d'intersection m,n,p des côtés prix de deux en deux ; c'est-à-dire des droites (AB'), (BC'), (CA').



Utilisons trois fois le théorème de Ménélaüs pour le triangle mnp avec les points alignés A,N,C' ; B,P,A' ; C,M,B'.
On obtient :

$$\overline{mA}.\overline{pN}.\overline{nC'} = \overline{nA}.\overline{nM}.\overline{pC'}$$
$$\overline{nB}.\overline{mP}.\overline{pA'} = \overline{pB}.\overline{nP}.\overline{mA'}$$
$$\overline{pC}.\overline{nM}.\overline{mB'} = \overline{mC}.\overline{pM}.\overline{nB'}$$

On multiplie ces relations membre à membre et on simplifie avec :

$$\overline{mA}.\overline{mB'} = \overline{mC}.\overline{mA'}$$
$$\overline{nB}.\overline{nC'} = \overline{nA}.\overline{nB'}$$
$$\overline{pC}.\overline{pA'} = \overline{pB}.\overline{pC'}$$

Il reste $\overline{pN}.\overline{mP}.\overline{nM} = \overline{mN}.\overline{mP}.\overline{pM}$ et N,P,M sont alignés.

Ceci est la démonstration proposée par Callendreau. Elle ne s'attarde pas aux cas particuliers où certains points d'intersection seraient "à l'infini'' du fait du parallélisme de certaines droites. Cela tient probablement à ce que Callendreau adopte implicitement souvent un point de vue projectif. Quoi qu'il en soit la lecture de son livre montre une évolution de la notion de rigueur depuis 1949. Pour cela et aussi pour son contenu, c'est un livre à redécouvrir.

Bibliographie

[1] Callendreau E., *Célèbres problèmes mathématiques,* Albin Michel, 1949.

[2] Cavaillès J., *Axiomatique et formalisme,* Hermann, 1981.

[3] Berger M., *Géométrie,* vol. 1 à 5, Cedic, Nathan, 1977.

[4] Hilbert D., *Les fondements de la géométrie,* Dunod, 1971.

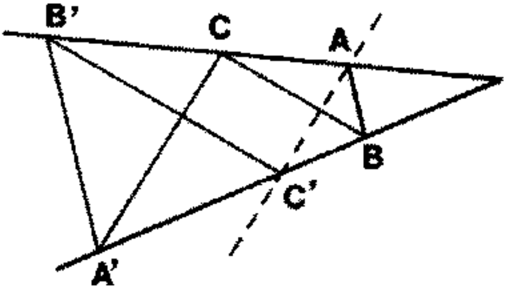
[5] Lelong-Ferrand J., *Les fondements de la géométrie,* PUF, 1985.

[6] Tisseron C., *Géométrie affine, projective et euclidienne,* Hermann, 1983.

On pourra lire aussi :
E. Artin, *Algèbre géométrique,* Gauthier-Villars, 1962.

Note d'Henri Fraysse

Remarque 1 : En prenant la droite de Pascal MNP comme droite de l'infini, on obtient la forme ci-contre du théorème de Pappus :



si (AB)//(A'B')
et (BC)//(B'C')
alors (A'C)//(C'A) .

Il est remarquable que ce théorème soit équivalent à la commutativité du corps de base K sur lequel est construite la géométrie. En particulier, il est valable si K est un corps fini à p^α éléments.

Remarque 2 : Il est amusant de chercher combien de droites de Pascal correspondent à 6 points donnés sur une conique et d'étudier la configuration qu'elles forment.