étude

polygones convexes à n (fixé) côtés, inscrits dans un cercle, de périmètre maximum

par Jean-Philippe Cortier
Lycée Marie de Champagne, Troyes

Cette étude nécessite un résultat sur les fonctions convexes que l'on rappelle.

I. Une condition suffisante de convexité

Théorème 1 : Soit f une application d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}$, deux fois dérivable sur I.

Si $\begin{cases} f'' \geqslant 0 \text{ sur I} \\ f'' > 0 \text{ sur I} \end{cases}$ alors f est strictement convexe sur I.

Pour une démonstration, voir par exemple [1].

Pour une application f satisfaisant aux hypothèses du théorème 1, on aura donc pour tout $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathrm{I}^n$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in (\mathbf{R}^{+*})^n$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 1\,, \qquad f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, f(x_i)$$

l'inégalité étant stricte dès que deux x_i sont distincts.

Par exemple : $\begin{aligned} f : [0,\pi] &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto -\sin x \end{aligned}$

est strictement convexe sur $\mathrm{I} = [0, \pi]$.

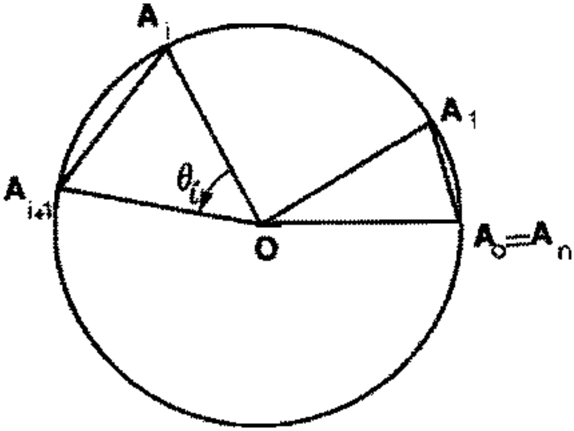
II. Polygones convexes à n (fixé) côtés inscrits dans un cercle de périmètre maximum

Théorème 2 : Les polygones convexes à n (fixé) côtés, inscrits dans un cercle de périmètre maximum, sont les polygones convexes réguliers à n côtés.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0,r)$ le cercle de centre 0 et de rayon r, du plan euclidien $\mathcal{P}$ orienté, on note $(A_0, A_1, \ldots A_n = A_0)$ un polygone à n côtés inscrit dans $\mathcal{C}$.

- mes $(\widehat{\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OA_{i+1}}}) = \theta_i$ $\theta_i \in]0,2\pi[$ $i = 0, \ldots, n-1$
- P_n le périmètre de $(A_0, \ldots, A_n)$; $n \geqslant 3$.

On a les égalités : $\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi$ $A_i A_{i+1} = 2r \sin \frac{\theta_i}{2}$ *en orientant le* polygone dans le sens positif



$$P_n = 2r \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{\theta_i}{2}$$

Remarque :
pour un polygone $(A_0, \ldots, A_n)$ régulier, on a :

$$P'_n = 2r \sin \frac{2\pi}{n}$$

car pour tout i,

$$\theta_i = \frac{2\pi}{n}$$

Comme $\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi$, on obtient $\theta_{n-1} = 2\pi - \sum_{i=0}^{n-2} \theta_i$

Donc $P_n = 2r[\sum_{i=0}^{n-2} \sin \frac{\theta_i}{2} + \sin \frac{\theta_{n-1}}{2}] = 2r[\sum_{i=0}^{n-2} \sin \frac{\theta_i}{2} + \sin(\pi - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2})]$

$$P_n = 2r[\sum_{i=0}^{n-2} \sin \frac{\theta_i}{2} + \sin \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2}] \qquad (1)$$

Comme $\frac{\theta_i}{2} \in [0,\pi]$ pour $i=0, \ldots, n-1$ (et $\sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2} = \pi - \frac{\theta_{n-1}}{2} \in]0,\pi[$).

On applique le théorème 1 avec $f(x) = -\sin x$

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{1}{n-1} \text{ pour } i=0, \ldots, n-2 \ \left(\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i = 1\right) \\ x_i = \dfrac{\theta_i}{2} \end{cases}$$

ce qui assure : $-\sin\left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n-1} \ \frac{\theta_i}{2}\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n-1} \ \left(-\sin \frac{\theta_i}{2}\right)$, l'inégalité étant stricte dès que deux des θ_i sont différents.

Soit $$\sum_{i=0}^{n-2} \sin \frac{\theta_i}{2} \leqslant (n-1) \sin\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2}\right)$$

D'où la majoration de P_n :

$$P_n \leqslant 2t \left[(n-1) \sin\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2}\right) + \sin\left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2}\right)\right]$$

d'après (1) et l'inégalité étant stricte dès que deux des θ_i sont distincts (*).

On pose alors $g(x) = (n-1) \sin \frac{x}{n-1} + \sin x$ sur $[0,\pi]$ et l'on voit que :

$$P_n \leqslant 2t \ g\left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2}\right) \text{ avec } \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\theta_i}{2} \in]0, \pi[$$

avec la propriété (*).

Etude de g sur [0,π] :

$$g'(x) = \cos\left(\frac{x}{n-1}\right) + \cos x = 2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n-1} + x\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n-1} - x\right)\right)$$

$$= 2 \cos \frac{nx}{2(n-1)} \cos \frac{(n-2)x}{2(n-1)}$$

or : $0 \leqslant \frac{n-2}{2(n-1)} \ x < \frac{x}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour tout x de $[0,\pi]$;

$\cos \frac{n-2}{2(n-1)} \ x > 0$ sur $[0,\pi]$.

[1] Traité de spéciales (Tome 2) Cagnac, Ramis, Commeau (Masson).

$$\begin{cases} \cos \dfrac{nx}{2(n-1)} = 0 \\ x \in [0,\pi] \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \dfrac{nx}{2(n-1)} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} x = \dfrac{n-1}{n}(2k+1)\pi \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

De $0 \leqslant \dfrac{n-1}{n}(2k+1)\pi \leqslant \pi$, on tire :

$$0 \leqslant 2k+1 \leqslant \frac{n}{n-1}$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \left(\frac{n}{n-1} - 1\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right) < \frac{1}{2}$$

d'où $k = 0$.

Ce qui assure $g'(x) = 0 \iff x = \dfrac{n-1}{n}\pi$; d'où les variations de g

x	0		$\frac{n-1}{n}\pi$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi$	$\searrow$	

car pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{n-1}{n}\pi$, $0 \leqslant \dfrac{nx}{2(n-1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ d'où

$$\cos \frac{nx}{2(n-1)} \geqslant 0 .$$

Conclusion : $\forall x \in [0, \pi] \quad g(x) \leqslant g\left(\dfrac{n-1}{n}\pi\right)$

or $\quad g\left(\dfrac{n-1}{n}\pi\right) = (n-1)\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{n}\right) = n \sin \dfrac{\pi}{n}$

On a donc démontré : $P_n \leqslant 2rg\left(\sum_{i=0}^{n-2} \dfrac{\theta_i}{2}\right) \leqslant 2rn \sin \dfrac{\pi}{n} = P'_n$.

L'inégalité $P_n \leqslant 2rg\left(\sum_{i=0}^{n-2} \dfrac{\theta_i}{2}\right)$ étant stricte dès que deux θ_i sont distincts. Ce qui assure le résultat.

Les polygones convexes à n (fixé) côtés, inscrits dans un cercle, de périmètre maximum sont les polygones convexes réguliers à n côtés inscrits dans ce cercle.