histoire d'une découverte

la naissance de la théorie des capacités réflexion sur une expérience personnelle(1)

par Gustave Choquet
membre de l'Académie des Sciences

L'épistémologie contemporaine a consacré beaucoup d'attention aux processus mentaux de la découverte. Des historiens des sciences ont analysé le passé avec l'espoir de trouver la pierre philosophale des grandes découvertes ; c'est par elles en effet que progresse la science.

Le témoignage direct des découvreurs, même s'il ne constitue pas cette pierre philosophale est toujours fascinant, bien qu'il repose souvent sur des souvenirs anciens, et qu'il soit bien difficile d'être à la fois observateur et acteur ; mais d'avoir été soi-même acteur crée pourtant le devoir d'essayer avec la conscience de la difficulté.

Il s'agira ici de mathématiques ; bien que la découverte dans les sciences expérimentales, dans l'art, la poésie, la philosophie, présente d'étonnantes ressemblances avec la découverte en mathématiques, celle-ci a des aspects spécifiques, et c'est d'ailleurs la seule que je connaisse un peu, à la fois par l'observation de jeunes chercheurs et par mon expérience personnelle.

---

(1) Cet article est la rédaction d'un exposé fait au séminaire Loi de l'E.N.S. le 22 novembre 1976 sous le titre "*La naissance de la théorie des capacités, aspects psychologiques et mathématiques*".

Quand un étudiant commence la recherche, c'est son premier résultat personnel qui lui apporte la révélation éblouissante de ce qu'est découvrir du neuf et comment le faire. Ce premier pas est décisif ; certains ne le franchissent jamais.

Il n'existe en effet pas de méthode infaillible pour apprendre à découvrir ; chacun doit en trouver seul le secret. Mais certaines conditions minima doivent être satisfaites pour commencer la recherche dans un certain domaine : bien connaître d'abord les êtres mathématiques qui l'habitent, en avoir rencontré une grande variété, au point de prévoir leurs réactions, de pénétrer leur vie intime. On commence alors à se poser des questions : dans telle circonstance, comment se comportent ces êtres ? Autrement dit on en arrive à se poser un problème personnel, qu'on l'ait formulé seul, ou que d'autres, du présent ou du passé l'aient déjà posé.

C'est alors que le tempérament personnel du chercheur va intervenir. Il se trouve dans une situation analogue à celle de l'alpiniste qui, de la base de la montagne, veut atteindre le sommet : certains alpinistes vont s'adapter à la montagne, en chercher les voies les plus faciles ou les plus élégantes ; d'autres, au contraire, vont, sans hésiter, utiliser la méthode bulldozer ; créer une large rampe d'accès de faible pente qui pourra sans danger être réutilisée par tous ceux qui viendront ensuite : c'est, disait Dieudonné, la méthode préférée de Grothendieck, méthode qui l'a effectivement conduit à créer la géométrie algébrique moderne. Il n'existe donc pas une méthode unique pour résoudre un problème ou commencer une recherche.

Personnellement, je donne la préférence à la méthode suivante : le premier pas est une "amplification du cadre" : on énonce le problème dans le cadre le plus général dans lequel ses termes conservent un sens précis ; puis on étudie des cas particuliers bien choisis de ce cas général ; si on peut les résoudre par une méthode qui ait un sens dans le cas général, il reste à adapter cette méthode au problème initial. C'est une méthode analogue qui a été utilisée par certains algébristes pour attaquer la conjecture de Riemann sur la localisation des zéros complexes de la fonction analytique

$\zeta(z) = \sum_{1}^{\infty} 1/n^z$: on introduit des fonctions ζ sur des corps de nombres algébriques qui remplacent le corps classique $\mathbf{C}$ des nombres complexes ; on donne un sens au problème et on essaie de le résoudre en profitant des particularités du nouveau cadre.

Quand un problème réputé difficile est résolu et que sa démonstration est clarifiée, on s'étonne souvent que l'on n'ait pas plus tôt trouvé sa solution. C'est que l'esprit humain est faible ; il ne plane pas comme un aigle ; au contraire, il a constamment besoin de béquilles, souvent constituées par l'étude approfondie de cas particuliers bien choisis.

Le comportement du chercheur, que ce soit en mathématiques ou en sciences expérimentales, est souvent analogue à celui d'un prospecteur en forêt, à la recherche d'une source ou d'une espèce rare d'insectes : il marche sur une piste étroite, l'esprit en éveil, ouvert aux suggestions ; il va explorer les sentiers latéraux, inlassablement. Et parfois, le miracle a lieu : il partait à la recherche d'un papillon et il découvre un ruisseau qui roule des pépites d'or.

Le départ est donc modeste ; la marche est progressive ; une trop grande hâte, une ambition mal mesurée risquent de faire échouer l'entreprise.

J'ai connu un excellent mathématicien qui, un jour, a décidé de changer d'orientation et se consacrer à la recherche d'une grande idée en physique mathématique : malheureusement, les grandes idées fécondes sont rares ; ce mathématicien s'est fermé aux suggestions journalières qu'une démarche modeste mais obstinée lui aurait apportées ; finalement il ne trouva, ni grande, ni petite idée dans son nouveau domaine de recherches.

*

* *

Mais je veux maintenant apporter mon témoignage personnel en contant la naissance d'une théorie que j'ai créée vers 1950, la théorie des capacités.

Les circonstances entourant cette création favorisèrent mon observation de ses diverses étapes ; elle se fit en effet au cours d'une période de plusieurs mois de travail soutenu, pendant lesquels je ne cessai d'être conscient de mes motivations, des méthodes que j'utilisais, de l'évolution de la théorie. Je crois donc que cet exemple peut intéresser à la fois les philosophes mathématiciens et les mathématiciens philosophes.

Le problème initial concernait la capacité électrostatique ; mais, comme je l'expliquerai bientôt, je fus rapidement conduit à l'étude d'une vaste classe de fonctions d'ensemble non additives que je continuai d'appeler capacités. Or, en 1950, à l'époque de ce travail, s'il existait de nombreux livres et travaux consacrés aux fonctions d'ensemble non-additives, je ne pus rien en tirer car la préoccupation de leurs auteurs était de tirer d'une situation non-additive tout ce qu'il y avait dedans d'additif ; par exemple, partant de la fonction obtenue en associant à toute partie de l'espace euclidien E_3 son diamètre, ils définissaient les fonctions additives usuelles : longueur, aire, volume.

Or, dans le cas qui m'intéressait, surtout celui de la capacité électrostatique, la seule fonction additive qu'on pouvait lui associer par ces méthodes, était une fonction à valeur 0 ou $+\infty$, c'est-à-dire absolument sans intérêt. Il s'agissait donc de briser un cadre devenu trop étroit.

Voici d'ailleurs un exemple élémentaire, assez analogue à celui de la capacité électrostatique et qui, lui aussi, est très loin de l'additivité : dans le plan $\mathbf{R}^2$, notons $p(X)$ la projection de l'ensemble X sur l'axe horizontal ; $p(X)$ a, pour la mesure de Lebesgue de cet axe, une mesure extérieure $m^*(p(X))$ que je noterai $f(X)$. Cette fonction est loin d'être additive puisque si X_1, X_2 sont deux segments horizontaux dans $\mathbf{R}^2$, de projections $p(X_1)$, $p(X_2)$ identiques, on a $f(X_1 \quad X_2) = f(X_1) = f(X_2)$ et non pas $f(X_1 \quad X_2) = f(X_1) + f(X_2)$. Notons que dans ce cadre simple se posent déjà des problèmes difficiles, qui préfigurent ceux posés par la capacité électrostatique.

Pour en donner un exemple, convenons d'abord de dire qu'une partie A de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^n$ est un compact si A est l'intersection d'une suite d'ensembles élémentaires (c'est-à-dire réunions finies de pavés fermés), et que A est borélien si A s'obtient à partir d'ensembles élémentaires par des suites de réunions ou d'intersections dénombrables ; les compacts sont, après les ensembles élémentaires, les plus simples des ensembles boréliens.

Voici alors un de ces problèmes difficiles : si X est borélien et borné dans $\mathbf{R}^2$, existe-t-il pour tout $\epsilon > 0$, un compact $K \subset X$ tel que $|f(X) - f(K)| < \epsilon$?

Des exemples tels que celui-ci m'aidèrent beaucoup à comprendre le problème auquel je m'étais attaqué. J'en arrive donc à ce problème.

Si, dans notre espace usuel, celui des expérimentateurs, on réunit un conducteur K (par exemple une sphère métallique) à une machine électrostatique, ce conducteur se charge d'une certaine quantité Q d'électricité, et atteint un potentiel V ; on vérifie expérimentalement que Q est proportionnel à V : $Q = kV$; et on appelle cette constante k la capacité électrostatique de K.

C'est une définition de physicien ; pour le mathématicien, il y a là trop de termes mal définis : espace usuel, conducteur, potentiel, et même électricité. Je vais donc donner la définition mathématique de la capacité électrostatique, non plus d'ailleurs seulement d'une sphère ou d'un conducteur, mais d'un compact quelconque de l'espace euclidien E_3 de dimension 3 qui constitue le modèle mathématique de notre espace usuel (après choix d'un point origine et d'une base orthonormale, on identifie E_3 à l'espace $\mathbf{R}^3$ des triplets de nombres réels, muni du produit scalaire $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ et de la distance associée).

Rappelons d'abord que dans cet espace, de nombreuses lois physiques sont des lois attractives en $1/r^2$: forces électriques, magnétiques, gravitationnelles. La chose à retenir est qu'une telle force dérive d'un potentiel ; autrement dit, le champ de force créé par un centre attractif n'est autre que le gradient de $1/r$ où r désigne la distance au centre attractif : ce fait fondamental permet de remplacer l'étude de ces champs de force par l'étude d'une fonction numérique appelée potentiel.

De façon plus précise, si l'on désigne par μ une mesure, c'est-à-dire une distribution de masse positive sur un compact K de l'espace, on appelle potentiel de μ la somme P_μ des potentiels élémentaires créés par les éléments de μ ; plus précisément, la valeur de la fonction P_μ au point x est $P_\mu(x) = \int [1/r(x,y)]\, d\mu(y)$ où $r(x,y)$ est la distance de x au point variable y de K. P_μ est une fonction à valeurs dans $[0;+\infty]$; je n'insiste pas sur ses propriétés.

Si le compact K n'est pas trop mince, par exemple si K est une boule, il existe des μ non nulles sur K telles que $P_\mu \leqslant 1$ partout ; appelons pour un instant "bonne mesure" sur K toute μ sur K telle que $P_\mu(x) \leqslant 1$ pour tout x, et notons $\|\mu\|$ la masse totale de μ.

On appellera *capacité électrostatique* de K la borne supérieure des masses de toutes les bonnes mesures sur K :

$$\mathrm{cap}(K) = \sup \{\|\mu\| : \mu \text{ est bonne et portée par } K\}$$

On démontre qu'il existe une bonne mesure μ sur K dont le potentiel est, pour l'essentiel, partout égal à 1 sur K ; cette mesure est d'ailleurs unique et portée par la frontière extérieure de K ; on l'appelle la mesure d'équilibre de K(1). Il est donc assez clair que lorsque K est un conducteur usuel, par exemple une boule pleine ou une sphère creuse, cette mesure μ_0 coïncide avec la distribution d'équilibre électrostatique des physiciens sur ce conducteur porté au potentiel électrique 1 (pour un potentiel électrique c, ce serait la mesure $c\mu_0$).

Revenons pour un instant à la comparaison de cap(K) avec la mesure de Lebesgue $m(K)$. Les deux fonctions d'ensemble m et cap sont extrêmement différentes : si K_1, K_2 sont deux compacts disjoints, on a $m(K_1 \cup K_2) = m(K_1) + m(K_2)$; c'est presque l'opposé qui se produit pour la capacité : par exemple, si K_1, K_2 sont deux sphères creuses concentriques distinctes, donc disjointes (où K_2 est la plus grande), on a :

$$\mathrm{cap}\,(K_1 \cup K_2) = \mathrm{cap}\, K_2 .$$

(1) L'identité des potentiels électriques et gravitationnels impose d'évoquer ici Newton et son calcul de la pesanteur à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre (supposée homogène pour simplifier). Les énoncés qu'on vient de rappeler entraînent assez facilement qu'en tout point à la distance r du centre de la Terre, la pesanteur coïncide avec l'attraction newtonienne d'une masse concentrée au centre et égale à la masse de la portion de Terre contenue dans la boule concentrique de rayon r ; par exemple, à l'extérieur de la Terre, l'intensité de la pesanteur est proportionnelle à $1/r^2$, tandis qu'à l'intérieur, elle est proportionnelle à r^3/r^2, donc à r. Certains historiens ont soutenu que si Newton avait attendu 20 ans avant de publier ses Principia, c'est qu'il n'avait pas de bonne démonstration de ces propriétés, aujourd'hui considérées comme élémentaires.

Plus précisément, la capacité à l'étonnante propriété de *dichotomie*, c'est-à-dire que tout ensemble X assez régulier (par exemple tout borélien) peut être partagé en deux ensembles réguliers qui ont même capacité que X ; cette propriété est exactement à l'opposé de l'additivité ; il est donc exclu d'étudier cette capacité par les méthodes traditionnelles en théorie de la mesure.

On va cependant reprendre l'idée qu'Eudoxe utilisait voici plus de 2000 ans pour mesurer l'aire d'un domaine plan A : si pour tout $\epsilon > 0$ (Eudoxe ne disait pas cela, mais le pensait certainement), on peut trouver deux aires polygonales, l'une contenant A, l'autre contenue dans A, dont la différence des aires soit inférieure à ϵ, on dit que A est quarrable, et son aire est par définition la borne inférieure des aires des polygones contenant A, qui est aussi égale à la borne supérieure des aires des polygones contenus dans A.

Ce procédé s'appelle encore "procédé d'exhaustion d'Eudoxe" ; les bonnes idées sont les plus résistantes et les plus utiles, même après plusieurs millénaires ; et dans la théorie de la mesure de Lebesgue le procédé d'Eudoxe a été popularisé par Denjoy qui définissait la mesure intérieure $m_*(X)$ comme borne supérieure des mesures des compacts K contenus dans X, et la mesure extérieure $m^*(X)$ comme borne inférieure des mesures des ouverts ω contenant X, la mesurabilité d'un X étant définie par l'égalité de ces deux nombres.

Sur ce modèle d'Eudoxe-Denjoy, on associe à tout $X \subset E_3$ sa capacité intérieure et sa capacité extérieure :

$$\mathrm{cap}_*(X) = \sup \{\mathrm{cap}\, K : K \text{ compact } \subset X\}$$
$$\mathrm{cap}^*(X) = \inf \{\mathrm{cap}\, \omega : \omega \text{ ouvert } \supset X\}$$

Dans cette dernière formule, $\mathrm{cap}\omega$ est mis pour $\mathrm{cap}_*\omega$; le processus est donc clair : on part de la capacité des compacts ; on passe aux ouverts ; puis à partir des compacts et des ouverts, on définit cap_* et cap^* ; autrement dit, on prolonge une fonction définie sur l'ensemble des compacts par deux fonctions définies sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de E_3.

Il est clair que $\mathrm{cap}_* \leqslant \mathrm{cap}^*$; il devient donc naturel de dire :

Définition :
Un ensemble X est dit capacitable si $\mathrm{cap}_*(X) = \mathrm{cap}^*(X)$. La valeur commune de ces deux nombres est notée cap X.

Cette définition est satisfaisante car le calcul de la capacité électrostatique d'un ensemble capacitable X de E_3 peut se faire sans introduire de "bonnes mesures" associées à X ; par un jeu d'approximations, celles associées aux compacts suffisent.

Mais elle pose la question de savoir si, en dehors des compacts et des ouverts qui, de façon presque évidente, sont capacitables, il existe d'autres ensembles capacitables.

Ce problème est intéressant même pour les ensembles de capacité d'intérieure nulle : on sait le rôle que jouent en théorie de l'intégration de Lebesgue les ensembles de mesure nulle, et la notion de presque-partout qui leur est associée. En théorie du potentiel, la notion de base n'est pas celle de mesure, mais celle de capacité ; le presque-partout est remplacé par le quasi-partout : on dit qu'une propriété a lieu quasi-partout si elle a lieu partout, sauf aux points d'un ensemble X de capacité nulle.

Mais ici, se pose une question : s'agit-il dans cette définition de la capacité intérieure ou de la capacité extérieure ? Certes la question ne se pose pas pour les compacts, puisque tout compact est capacitable. Malheureusement, les ensembles X qui se présentent naturellement ne sont pas en général compacts. Deux attitudes sont alors possibles : ou bien on démontre (assez facilement) que $\mathrm{cap}_*(X)=0$, d'où un théorème que j'appellerai faible, ou bien on travaille beaucoup plus pour montrer que $\mathrm{cap}^*(X)=0$, d'où un théorème plus fort. Vaut-il mieux démontrer facilement un théorème faible que difficilement un théorème fort ? Ce dilemne ne se poserait pas si X était capacitable ; *car on aurait alors des démonstrations faciles de théorèmes forts.*

De façon précise, voici un problème concret posé par la notion de quasi-partout : si un ensemble X de type usuel (disons borélien) vérifie $\mathrm{cap}_*(X)=0$, a-t-on aussi $\mathrm{cap}^*(X)=0$?

Plus généralement, se pose la question de savoir si tout ensemble borélien de E_3 est capacitable.

Voilà le problème que Marcel Brelot et Henri Cartan signalaient vers 1950 comme un problème difficile (et important) et pour lequel je finis par me passionner en me persuadant que sa réponse devait être positive (pourquoi cette passion ? c'est là le mystère des atomes crochus).

Or je ne connaissais alors pratiquement rien de la théorie du potentiel ; à la réflexion, *je pense maintenant que ce fut cette raison qui me permit de résoudre un problème qui arrêtait les spécialistes.* C'est là un point intéressant pour les philosophes ; aussi vais-je y insister un peu.

Mon ignorance m'évitait en effet les préjugés : elle m'écartait d'outils potentialistes trop sophistiqués, et m'obligeait à oublier les aspects contingents du problème.

Voici quel était alors l'état de mes connaissances :

Je connaissais bien la construction de la mesure de Lebesgue préconisée par Denjoy, basée sur l'idée d'Eudoxe, telle que je l'ai exposée voici un instant.

Je ne voyais pas du tout comment faire intervenir le fait que l'espace de base était E_3, pas plus que la définition, déjà un peu trop technique à mon goût, de la capacité associée au noyau newtonien $1/r$.

J'ai donc choisi le cadre le plus général possible dans lequel les notions indispensables aient un sens. Certes un cadre trop vaste peut avoir le danger qu'on n'y dispose d'aucun outil et qu'on n'aboutisse donc qu'à des trivialités ; mais je me sentais libre de restreindre la généralité au fur et à mesure des nécessités.

Je remplaçai donc E_3 par un espace topologique séparé(1) E quelconque (séparé pour permettre une manipulation commode des compacts) et je remplaçai la capacité électrostatique cap(X) par une application croissante f de $\mathcal{K}$ (E) dans $\mathbf{R}^+$ (où $\mathcal{K}$ (E) désigne l'ensemble des compacts de E).

Dans ce cadre fort primitif, les notions de base et le problème posé pouvaient cependant s'exprimer.

Pour tout $X \subset E$, on pose $f_*(X) = \sup \{f(K) : K \text{ compact} \subset X\}$ et $f^*(X) = \inf \{f_*(\omega) : \omega \text{ ouvert contenant } X\}$; et on dit que X est f-capacitable si $f_*(X) = f^*(X)$.

Il est tentant de noter $f(X)$ la valeur commune $f_*(X) = f^*(X)$ pour tout X capacitable ; or ceci est bien le cas pour tout X ouvert, mais ce n'est vrai pour X compact que si f est "continue à droite" au sens suivant : $\forall$K compact, $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ ω ouvert contenant K tel que

$$f_*(\omega) \leqslant f(K) + \epsilon$$

(autrement dit, si on agrandit un peu un compact, sa capacité augmente peu).

Cette propriété est classique pour la mesure de Lebesgue et pour toute mesure de Radon : et les potentialistes la connaissaient pour la capacité newtonienne, sans d'ailleurs l'avoir jusque là nettement formulée.

Je décidai donc de supposer désormais f croissante et continue à droite et d'appeler une telle f une *capacité*.

Dans ce cadre très général, de nombreux exemples montraient que E pouvait contenir des boréliens non capacitables ; il y avait à cela au moins une première bonne raison : les fonctions f_* et f^* sont définies à partir des compacts, alors que les boréliens de E et même ses fermés peuvent ne contenir que de très petits compacts ; en particulier, alors qu'un compact

(1) Le lecteur non mathématicien, qui ignore ce qu'est un espace topologique séparé, un compact ou, *a fortiori* un borélien de cet espace, ne perd qu'une partie de ce qui suit en restant dans un espace euclidien. Il doit savoir cependant que le remplacement de E_3 par un espace beaucoup plus général a été un facteur décisif pour le cheminement de ma pensée dans le labyrinthe où nul fil d'Ariane ne me guidait vers la sortie.

de E est un excellent ensemble, son complémentaire peut contenir d'horribles fermés.

Il fallait donc restreindre le problème de capacitabilité aux boréliens de E construits à partir des compacts par les opérations dénombrables simples usuelles, *à l'exclusion* du passage au complémentaire.

Plus précisément, j'introduisis l'ensemble $\mathcal{B}_K$ des K-boréliens de E, c'est-à-dire le plus petit ensemble de parties de E contenant $\mathcal{K}$ et stable par réunion dénombrable et par intersection dénombrable ; il contient donc les compacts K, les K_σ (union dénombrable de compacts), les $K_{\sigma\delta}$ (intersection dénombrable d'ensembles K_σ), les $K_{\sigma\delta\sigma}$, etc... transfiniment.

Cette restriction du problème est d'autant plus raisonnable que dans $\mathbf{R}^3$ tout borélien est aussi K-borélien parce que tout ouvert est ici un K_σ) ; or cette restriction sur la régularité de X n'exige, bien sûr, aucune restriction sur E ou f ; ce n'est qu'ensuite que des restrictions, du moins sur f, pourront être *nécessaires.*

En fait, cette nécessité est rapidement apparue, car je pouvais construire sans difficulté, même pour $E = \mathbf{R}^2$ et pour des capacités f sous-additives (i.e. $f(K_1 \cup K_2) \leqslant f(K_1) + f(K_2)$) des boréliens fort simples de $\mathbf{R}^2$ (donc aussi K-boréliens) qui n'étaient pas f-capacitables.

Je me suis alors *très consciemment* demandé : quel type de restriction dois-je imposer à f ? Elle doit être telle qu'elle rende facile la preuve de la capacitabilité des ensembles K-boréliens les plus simples après les compacts, c'est-à-dire des K_σ .

Soit donc $X = \bigcup_n K_n$, où (K_n) est une suite croissante de compacts. Je dois montrer que $\forall \epsilon > 0$, il existe un ouvert ω contenant X et tel que $f(\omega) < f_*(X) + \epsilon$; il est naturel de construire cet ω comme réunion d'ouverts ω_n où ω_n contient K_n, et tels que, pour chaque n, $f(\omega_n)$ soit très voisin de $f(K_n)$, par exemple $f(\omega_n) < f(K_n) + \epsilon_n$; l'idéal serait bien sûr que $\epsilon \leqslant \Sigma\, \epsilon_n$; et comme cet idéal est réalisé lorsque f est une mesure de Radon, cette idée n'est pas déraisonnable.

Pour y voir clair, commençons par étudier une suite de deux compacts K_1, K_2 au lieu d'une suite infinie (K_n) : on cherche à exprimer que si l'on a $K_1 \subset \omega_1$, et $K_2 \subset \omega_2$ ou plus généralement $a_1 \subset A_1$ et $a_2 \subset A_2$, alors

$$f^*(A_1 \cup A_2) - f^*(a_1 \cup a_2)$$

est petit dès que

$$[f^*(A_1) - f^*(a_1)] \quad \text{et} \quad [f^*(A_2) - f^*(a_2)]$$

le sont, par exemple que

$$(1) \quad f^*(A_1 \cup A_2) - f^*(a_1 \cup a_2) \leqslant [f^*(A_1) - f^*(a_1)] + [f^*(A_2) - f^*(a_2)] \; .$$

Un passage à la limite fort simple montre d'ailleurs que si cette inégalité est vraie pour des compacts, elle est toujours vraie.

Mais avant d'aller plus loin, il s'agissait de savoir si cette inégalité très précise (et vraie pour les mesures de Radon, à savoir les capacités telles que $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ dès que les compacts A, B sont disjoints) est aussi vérifiée par la capacité électrostatique.

Je réussis, après avoir noirci, par maladresse, de nombreuses pages de calcul, à la mettre sous plusieurs formes équivalentes, et en particulier sous la suivante :

(2) $\quad f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leqslant f(X) + f(Y)$, (où X, Y compacts).

C'était une inégalité élégante, et d'autant plus souhaitable que lorsque f est une mesure de Radon, elle devient une égalité.

D'autre part, comme $f \geqslant 0$, elle est plus restrictive que la sous-additivité ordinaire ; je lui donnai le nom de *sous-additivité forte*.

Mes collègues potentialistes me dirent qu'ils ignoraient si la capacité électrostatique vérifiait cette propriété. Je dûs donc apprendre un peu de théorie du potentiel, et je finis par montrer, oh, miracle ! que la capacité newtonienne f était fortement sous-additive.

Un petit effort me montra que la sous-additivité forte entraînait l'inégalité plus générale :

(3) $$f^*(\bigcup_i A_i) - f^*(\bigcup_i a_i) \leqslant \sum_i [f^*(A_i) - f^*(a_i)] ,$$

pour toute famille finie de couples (a_i, A_i) tels que $a_i \subset A_i$. L'inégalité idéale que j'avais en vue était donc vraie ; il ne s'agissait plus que de l'appliquer à l'objectif initial, la capacitabilité des K_σ.

Mais ici, une agréable surprise m'attendait : la généralité de l'inégalité (3) me fournit l'énoncé simple et général suivant :

THÉORÈME :

Soit f une capacité fortement sous-additive. Alors pour toute suite croissante (X_n) d'ensembles quelconques, on a :

(4) $$f^*(\bigcup_n X_n) = \lim_{n \to \infty} f^*(X_n)$$

Cet énoncé était bien connu (et utilisé) en théorie de la mesure, où on l'établit en utilisant l'*additivité* de la mesure ; j'avais donc démontré que la *sous-additivité forte* suffit pour sa validité.

Un corollaire important en résultait aussitôt :

COROLLAIRE.

La réunion de toute suite d'ensembles capacitables est aussi capacitable.

En particulier tout K_σ est capacitable.

Mais mon travail était loin d'être achevé, car après les K_σ viennent les $K_{\sigma\delta}$, puis les $K_{\sigma\delta\sigma}$, etc... et toute la kyrielle des K-boréliens.

Pour les $K_{\sigma\delta}$, intersection d'une suite décroissante (X_n) d'ensembles K_σ, le théorème précédent ne s'appliquait pas directement, et une observation simple montre même qu'il n'y a pas de théorème de même type pour les suites décroissantes (X_n) et leur intersection. En effet, toute partie X bornée de E_3, aussi mauvaise soit-elle, est intersection d'une suite décroissante d'ensembles f-capacitables pour la capacité électrostatique f (si (C_n) est une suite décroissante de couronnes ouvertes sphériques concentriques de rayons k, $k+1/n$ et entourant X, la suite des $(C_n \cup X)$ fournit un tel exemple).

Heureusement, une démonstration technique, un peu cachée, mais courte, me fournit cependant, en utilisant le théorème, la réponse attendue pour les $K_{\sigma\delta}$; la réponse pour les $K_{\sigma\delta\sigma}$ s'en suivait aussitôt, d'après son corollaire.

Inutile de dire que ce premier succès m'encourageait fortement à prouver la validité du théorème général.

Or le stade suivant concernait les $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$; la méthode suivie pour les $K_{\sigma\delta}$ ne s'applique plus à ces ensembles qui sont déjà beaucoup plus complexes que les compacts. Je me suis alors fait *très consciemment* le raisonnement suivant : puisque j'ai pu démontrer la capacitabilité des $K_{\sigma\delta}$ en utilisant l'inégalité de sous-additivité forte, peut-être pourrais-je démontrer celle des $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ à partir d'inégalités du même type, mais plus fortes. Dans quelle direction les chercher ?

Je dûs noircir beaucoup de papier avant de les trouver ; et elles se manifestèrent par une écriture un peu modifiée de l'inégalité (1), la faisant apparaître comme le second terme d'une suite infinie d'inégalités construites à partir de f par le procédé classique des différences successives, utilisé autrefois dans le "calcul des différences", et parfois dans l'étude des dérivées des fonctions d'une variable ; expliquons-nous :

Soit f une fonction d'ensemble $X \to f(X)$ à valeurs réelles ; si l'on donne à X un "accroissement" A_1, f prend un accroissement qu'on notera

$$\Delta_1 (X ; A_1) = f(X \cup A_1) - f(X)$$

Par exemple, dire que f est une fonction croissante se traduit par $\Delta_1 \geqslant 0$. On définit ensuite :

$$\begin{aligned}\Delta_2(X;A_1,A_2) &= \Delta_1(X \cup A_2;A_1) - \Delta_1(X;A_1)\\ &= f(X \cup A_1 \cup A_2) - f(X \cup A_1) - f(X \cup A_2) + f(X)\end{aligned}$$

Et de façon générale, la suite (Δ_n) se définit par récurrence en utilisant des accroissements successifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par la relation

(5) $\Delta_{n+1}(X\,;A_1,\ldots A_{n+1}) =$

$$\Delta_n(X \cup A_{n+1}\,;A_1,\ldots,A_n) - \Delta_n(X\,;A_1,\ldots A_n)$$

Avec ces notations, le fait que f est croissante et fortement sous-additive se traduit(1) par :

(6) $$\Delta_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2 \leqslant 0\,.$$

Cette formulation m'incitait à chercher si, peut-être, les différences successives Δ associées à la capacité électrostatique ne seraient pas alternativement positives et négatives, autrement dit si l'on a toujours $(-1)^n\,\Delta_n \leqslant 0$. Et voici qu'un nouveau miracle se produisit : une démonstration analogue à celle qui m'avait donné la sous-additivité forte me montra que, pour la capacité électrostatique f, on a bien pour tout entier n : $(-1)^n\,\Delta_n \leqslant 0$.

La capacité électrostatique ressemblait donc à ces fonctions f d'une variable réelle dont les dérivées successives sont alternativement positives et négatives, qu'on appelle *complètement monotones,* et qui sont en fait identiques aux fonctions de Bernstein, de la forme $\int (1-e^{-tx})\,d\mu(t)$ où μ est une mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}_+^* =]0,\infty[$.

J'appelai ces fonctions d'ensemble les fonctions *alternées d'ordre infini.* Leur ressemblance avec les fonctions de Bernstein me conduisit à penser qu'elles possédaient également une représentation intégrale exprimable au moyen de fonctions $g(X)$ analogues à des exponentielles, c'est-à-dire vérifiant la relation $g(X \cup Y) = g(X)\,g(Y)$, obtenue en remplaçant l'addition sur les nombres réels par l'opération de réunion d'ensembles.

Ce rapprochement valait un détour et, abandonnant pour quelque temps la capacitabilité, j'étudiai de plus près la formule de Bernstein. L'unicité bien connue de la mesure μ qui y figure entraînait évidemment que, pour tout t fixe, la fonction $(1-e^{-tx})$ est un élément minimal — ou encore extrémal — du cône convexe des fonctions complètement monotones. Il devenait extrêmement tentant de mettre en évidence des phénomènes analogues pour le cône des capacités alternées d'ordre infini. Tout cela se révéla parfaitement exact, et même relativement facile à établir ;

---

(1) Pour ne pas trop rester dans le vague, montrons que si f est croissante et fortement sous-additive, ses Δ_2 sont négatifs. En effet, $\Delta_2 \leqslant 0$ s'écrit

$$f(X \cup A_1 \cup A_2) + f(X) \leqslant f(X \cup A_1) + f(X \cup A_2)\,;$$

or, si on pose $Y_1 = X \cup A_1$, $Y_2 = X \cup A_2$, la sous-additivité forte donne, compte tenu que $Y_1 \cup Y_2 = X \quad A_1 \cup A_2$:

$$f(X \cup A_1 \cup A_2) + f(Y_1 \cap Y_2) \leqslant f(X \cup A_1) + f(X \cup A_2)\,,$$

d'où $\Delta_2 \leqslant 0$ puisque $X \subset Y_1 \cap Y_2$ et que f est croissante.

en particulier les capacités "exponentielles décroissantes" g se caractérisaient aisément puisque, de la relation $g(X \cup Y) = g(X)\, g(Y)$ résulte, en faisant $X = Y$, que g ne prend que des valeurs 0 ou 1.

J'en déduisis, par une application facile de la théorie de la convexité une représentation simple de toute capacité f alternée d'ordre infini. De façon précise, supposons, pour simplifier, que E soit compact avec $f(E) = 1$; alors il existe sur l'ensemble $\mathcal{K}$ (E), lui-même compact, des sous-compacts de E, une mesure de probabilité μ telle que, pour tout compact K de E, $f(K)$ soit égale à la μ-probabilité de rencontre de K avec un sous-compact variable de E. En particulier lorsque f est la capacité électrostatique dans $E = E_3$, on a un énoncé analogue avec une mesure μ portée par l'ensemble des trajectoires browniennes ; et ceci établit un lien étroit entre théorie du potentiel et théorie des probabilités, lien qui n'a cessé de se confirmer.

Mais surtout, ce détour me mit en contact pour la première fois avec les problèmes de représentation intégrale dans les convexes compacts et dans les cônes convexes.

Et de fait, mes recherches ultérieures sur la représentation intégrale eurent pour motivations initiales à la fois cette étude des capacités et le théorème — dû à R.S. Martin — de représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine de $\mathbf{R}^n$, sans oublier le désir de répondre au besoin plus général, bien formulé par R. Godement dans un travail sur la représentation des opérateurs positifs sur un Hilbert, d'un énoncé qui économise une fois pour toutes des monceaux de papier.

Mais ceci est une autre histoire ; revenons donc au problème initial de capacitabilité ; c'est pour démontrer la capacitabilité des $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$, etc... que j'étais parti à la recherche d'inégalités supplémentaires ; j'avais effectivement trouvé que $\Delta_3 \geqslant 0$, $\Delta_4 \leqslant 0$ etc... On pouvait donc espérer que $\Delta_3 \geqslant 0$ fournirait le résultat pour $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$, que $\Delta_4 \leqslant 0$ le fournirait pour les $K_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma\delta}$, etc... Je me mis au travail, mais me heurtai à un mur ; était-ce manque d'imagination et de technique, ou bien était-ce dans la nature des choses ? Je me dis très consciemment ceci : imaginons qu'à force de travail j'arrive à montrer grâce à $\Delta_3 \geqslant 0$ que les $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ sont capacitables, et ainsi de suite avec $\Delta_4 \leqslant 0$, etc... ; mon travail ne serait pas fini pour cela car après ces boréliens en viennent d'autres plus complexes : les K_ω par exemple qui sont des intersections dénombrables de boréliens de classe finie, puis les $K_{\omega\sigma}$, $K_{\omega\sigma\delta}$, etc.

Il me faudrait pour les aborder de nouvelles inégalités ; y en avait-il ? Un nouveau problème était ainsi posé : y a-t-il, en dehors des inégalités $(-1)^n \Delta_n \leqslant 0$ d'autres inégalités vérifiées par la capacité électrostatique ? Je parvins à démontrer qu'il n'y en avait pas, en ce sens que toute relation entre les capacités d'une famille finie arbitraire d'ensembles est une conséquence des relations déjà trouvées $(-1)^n \Delta_n \leqslant 0$.

C'était intéressant, mais j'étais dans une impasse. C'est alors que mon subconscient, déjà inquiet sans doute depuis quelque temps, monta au niveau de ma conscience ; et je me souvins que, du moins dans le cadre des ensembles boréliens de l'espace euclidien, il y a d'autres façons de construire les boréliens que de procéder par petits pas indéfiniment répétés, consistant à appliquer à des boréliens déjà construits des intersections ou des réunions dénombrables : les mathématiciens polonais avaient depuis longtemps en effet montré que tout ensemble borélien de $\mathbf{R}^n$ est l'image, par une application continue, d'un G_δ de $\mathbf{R}$, i.e. une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbf{R}$, et même une image continue du G_δ constitué par les nombres irrationnels de $\mathbf{R}$.

Ce n'était pas une façon très raffinée de construire les boréliens, sans compter que ce même procédé s'appliquait aussi à des ensembles plus généraux que les boréliens, à savoir les analytiques ; mais ça valait la peine d'essayer.

Je démontrai d'abord que tout K-borélien est une image continue d'un $K_{\sigma\delta}$ et j'appelai plus généralement K-analytique toute image continue d'un $K_{\sigma\delta}$. Je tenais donc là une relation solide entre les $K_{\sigma\delta}$ et les K-boréliens quelconques, et même les K-analytiques.

Restait à trouver comment passer de la capacitabilité des $K_{\sigma\delta}$, déjà bien établie, à celle de leurs images continues.

Soit donc X un $K_{\sigma\delta}$ d'un espace E, et φ une application continue de X dans un espace F sur lequel est définie une capacité f fortement sous-additive ; on veut montrer que $Y=\varphi(X)$ est f-capacitable. J'essayai de définir sur E une capacité auxiliaire e associée à f, en posant $e(A)=f(\varphi(A))$ pour tout compact A de E, et d'utiliser la e-capacitabilité de X dans E ; mais assez vite je compris que pour faire marcher cette idée, il fallait remplacer le couple (E,X) par le couple $(E\times F,\Gamma)$, où Γ est le graphe de l'application φ, et utiliser ensuite au lieu de φ l'application projection de $E\times F$ dans F, donc poser $g(C)=f(\mathrm{pr.}_F C)$ pour tout compact C de $E\times F$.

Si l'on remarque alors que g est une bonne capacité, que Γ est comme X un $K_{\sigma\delta}$, et que pour tout ensemble g-capacitable de $E\times F$, sa projection dans F est f-capacitable, avec même capacité, la preuve est terminée puisque Y est la projection de Γ.

*

* *

Le chemin pour obtenir cette preuve avait été bien long, et après coup la preuve pouvait être exposée en quelques pages. Mais c'est là un fait général : quand un tableau est terminé, on en efface les esquisses successives, on encadre le tableau et personne ne peut plus voir le long chemin qui a conduit à sa réalisation. J'ai voulu ici reconstituer dans la mesure du possible, rendre à la vie pour un instant, les longs détours que j'ai dû parcourir.

Et ces détours, après coup, n'ont pas été inutiles puisque au cours de mon cheminement j'avais trouvé de nouvelles vérités, parfois inutiles pour le but fixé initialement, mais intéressantes pour elles-mêmes ou par leurs prolongements : la suite infinie des inégalités $(-1)^n \Delta_n \leqslant 0$; la classe des ensembles K-boréliens et K-analytiques ; une première incursion dans le domaine des représentations intégrales ; grâce à la représentation intégrale des capacités alternées d'ordre infini, un lien solide entre ces fonctions et la théorie des probabilités, et une technique d'utilisation de produits d'espaces.