étude

transformations géométriques (*)

par D. Lehmann
Université scientifique et technique de Lille

Cet article fait suite au séminaire A.P.M.E.P. de Vaugrigneuse (avril 1985). Il ne s'agissait pas d'un cours de mathématiques, mais d'une réflexion sur le rôle des transformations, que j'ai seulement voulu faire précéder d'un atelier consacré à quelques exercices sur le sujet, afin que les participants aient en commun une expérience pratique susceptible de servir de référence dans le débat qui suivait. Cette intention n'ayant d'ailleurs pas été immédiatement perçue par tous, un psychodrame s'est joué — heureusement dénoué — où certains collègues ont pu croire pendant quelques instants que mon but était de leur faire un cours sur la perspective, l'inversion ou la transformation par polaires réciproques : outre l'aspect un peu hautain qu'aurait eu un tel exposé, son lien avec les classes qui les concernaient ne leur semblait pas évident. Cette méprise une fois levée, le débat fut fécond.

Pour tenter de couper court à tout quiproquo, je voudrais profiter de l'occasion pour m'expliquer sur un autre point un peu délicat concernant ma méthode d'approche de ces questions. Elle est basée sur une analyse qui se veut aussi rigoureuse que possible (mais qui relève nécessairement de l'idéologie et de l'opinion) d'un certain nombre de concepts mathématiques. Je ne prétends rien prouver, et j'irai jusqu'à douter qu'on puisse prouver quoi que ce soit dans ce domaine où la rigueur intellectuelle me

(*) Cet article a été publié sous une forme voisine dans le *Bulletin* de l'IREM de Lille.

semble la seule "validation" possible. Comment en effet imaginer des processus d'expérience permettant de répondre avec certitude aux questions que je pose ? Ou bien elles risquent de ne rien prouver du tout, tant les situations pédagogiques précises sont nombreuses, mouvantes et rarement entièrement reproductibles. Ou bien elles ne répondront qu'à des questions beaucoup plus pointues qui ne sont pas précisément celles que je pose. Faut-il alors s'interdire de les poser ? Je ne le pense pas !

I. Variations autour du centre de gravité d'un triangle

A partir d'un triangle ABC, on construit un nouveau triangle A'B'C' en menant respectivement,

$$\begin{cases} \text{par A, la parallèle à BC (soit } D_A\text{),} \\ \text{par B, la parallèle à AC (soit } D_B\text{),} \\ \text{par C, la parallèle à AB (soit } D_C\text{).} \end{cases}$$

On pose $A' = D_B \cap D_C$ $\qquad$ $B' = D_A \cap D_C$ $\qquad$ $C' = D_A \cap D_B$

$a = AA' \cap BC$ $\qquad$ $b = BB' \cap AC$ $\qquad$ $c = CC' \cap AB$

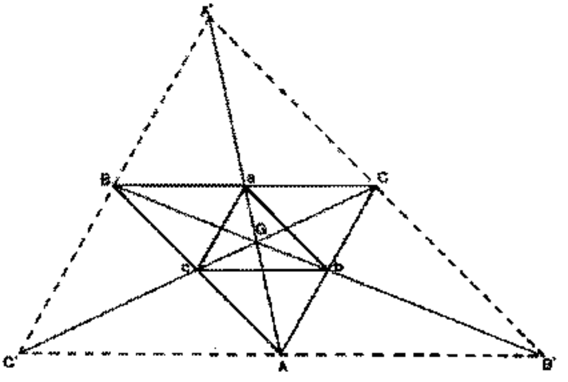


figure 1

Rappelons, pour mémoire, certaines propriétés de cette figure, archi-connues :

Théorème 0

1) Les 3 droites AA', BB' et CC' sont concourantes,
2) les droites bc et BC sont parallèles, de même que ac et AC, ainsi que ab et AB.

Redessinons maintenant la même figure, en perspective, en supposant le plan du triangle horizontal, et en notant respectivement α, β, γ les points de fuite, sur la ligne d'horizon Δ, des côtés BC, AC et AB du triangle.

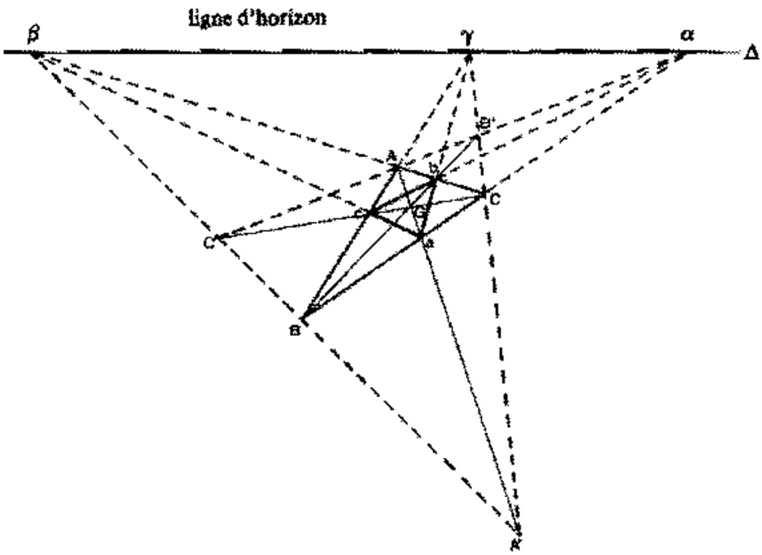


figure 2

Des droites parallèles dans la réalité se dessinant suivant des droites ayant même point de fuite, les 3 droites BC, bc et B'C' de la figure 2 doivent concourir en le point de fuite α sur Δ (de même pour AC, ac et A'C' en β ; AB, ab et A'B' en γ).

De même AA', BB' et CC' doivent concourir sur le dessin (car la perspective préserve la notion de concours).

Oubliant alors que la figure 2 a *été obtenue* comme *dessin* de la figure 1, elle va nous suggérer un *théorème* :

Théorème 1

Etant donnés, dans un plan (1), un triangle ABC et une droite Δ ne passant par aucun des 3 points A, B, C, on pose :

$\alpha = BC \cap \Delta$,	$\beta = AC \cap \Delta$,	$\gamma = AB \cap \Delta$,
$A' = \beta B \cap \gamma C$,	$B' = \alpha A \cap \gamma C$,	$C' = \alpha A \cap \beta B$,
$a = AA' \cap BC$,	$b = BB' \cap AC$,	$c = CC' \cap AB$.

Conclusion :

1) les droites AA', BB', CC' sont concourantes,

2) les points α, b et c sont alignés, de même que β, a, c et γ, a, b.

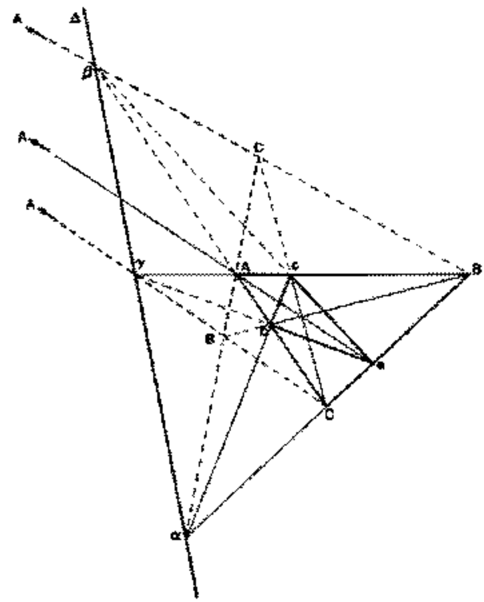


figure 3

(1) Le mot "plan" est vague, et demandera à être précisé de façon que le théorème ait le maximum de généralité : la définition précise des espaces projectifs y pourvoira.

Bien entendu, une démonstration possible de ce théorème va consister à remarquer qu'il existe toujours une perspective d'un plan P_1 sur le plan P du triangle ABC, telle que Δ soit obtenue comme image par cette perspective de la droite de l'infini de P_1 : supposant P plongé dans un espace à 3 dimensions, choisissons un point de vue O quelconque en dehors de P, et prenons pour P_1 n'importe quel plan parallèle à (O, Δ) ne passant pas par O ; les conditions cherchées sont alors vérifiées.

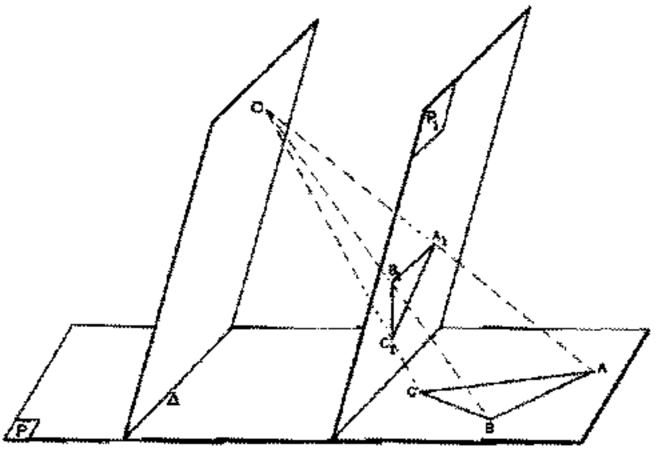


figure 4

[En remarquant que ABC $\alpha\beta\gamma$ ne sont jamais que les 6 sommets d'un quadrilatère complet de diagonales αA, βB et γC, on peut maquiller (1) bien davantage le théorème 1 ci-dessus, et en mettre plein la vue à qui veut bien s'en laisser compter, en peaufinant un énoncé sophistiqué à partir de 4 droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 dans un espace projectif de dimension 2 sur un corps commutatif K, 3 d'entre elles n'étant jamais concourantes : nous laisserons ce "plaisir" au lecteur].

On peut aussi remarquer que la figure 1 a d'autres propriétés que celles utilisées jusqu'à maintenant : par exemple, si G désigne le point de concours de AA', BB' et CC', $\frac{\overline{GA}}{\overline{Ga}} = -2$ et a est le milieu du segment [BC]. Bien entendu, ces propriétés vont aussi se laisser projeter :

3) si α_1 désigne le point $AA' \cap \Delta$, le birapport (A, a, G, α_1) est égal à -2,

(1) Pour démystifier et apprendre à démaquiller, il est évidemment nécessaire de savoir comment maquiller : cela ne signifie pas que nous le recommandions !

4) la division (B, C, a, α) est harmonique.

Ces conclusions (3) et (4) peuvent être ajoutées au théorème 1. Elles sont toutefois plus difficiles à visualiser sur un dessin que (1) et (2) qui ont l'avantage de ne s'exprimer qu'en termes d'incidence, et non de birapport.

La seule chose qui compte finalement, c'est de savoir qu'il existe un "dictionnaire" entre la géométrie affine et la géométrie projective, peu importe que l'on réalise celui-ci à l'aide d'une perspective ou non. Rappelons donc comment il fonctionne :

Géométrie projective		*Géométrie affine*
plan P	$\longleftrightarrow$	plan P_1
point A	$\longleftrightarrow$	point A_1
points alignés	$\xleftrightarrow{\text{birapport préservé}}$	points alignés
droite Δ particulière dans P	$\longleftrightarrow$	droite de l'infini sur P_1
droites concourant sur Δ	$\longleftrightarrow$	droites parallèles
droites concourantes	$\xleftrightarrow{\text{birapport préservé}}$	droites concourantes
$(B, C, I, BC\cap\Delta) = -1$	$\longleftrightarrow$	I_1 milieu de $[B_1C_1]$
$(B, C, I, BC\cap\Delta) = k$	$\xleftrightarrow{\text{I, B, C alignés}}$	$\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = k$

Désormais, la figure 1 n'est plus pour nous qu'un cas particulier de la figure 3, celui où Δ est la droite de l'infini. Il est alors naturel de regarder d'autres cas particuliers, par exemple celui où c'est BC qui est la droite de l'infini : on va donc obtenir une nouvelle figure de géométrie affine (puisque la droite de l'infini est particularisée) ; la voici, avec le "théorème" correspondant :

On se donne une droite Δ et un point A non situé sur Δ, par lequel on mène 2 droites coupant respectivement Δ en β et γ. On note :

$$\begin{cases} D_A \text{ la parallèle à } \Delta \text{ passant par } A, \\ D_B \text{ la parallèle à } A\gamma \text{ passant par } \beta, \\ D_C \text{ la parallèle à } A\beta \text{ passant par } \gamma, \\ A' = D_B \cap D_C\ ,\quad B' = D_A \cap D_C\ ,\quad C' = D_A \cap D_B\ . \end{cases}$$

Conclusions :

1) La droite AA' est concourante avec les parallèles D'_B et D'_C menées respectivement par B' à $A\gamma$ et par C' à $A\beta$.

2) Posant $b = D'_B \cap A\beta$ et $c = D'_C \cap A\gamma$, les droites $b\gamma$ et $c\beta$ sont parallèles à AA', tandis que bc est parallèle à Δ.

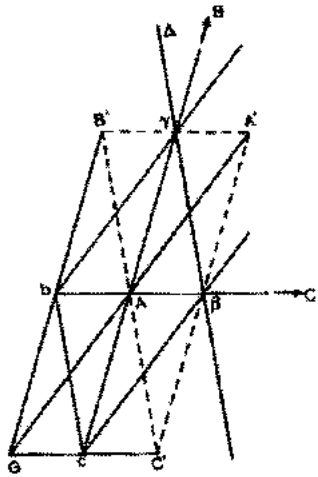


figure 5

Exercice : Trouver une perspective transformant directement la figure 5 en la figure 1.

Le théorème 1 peut s'appliquer dans n'importe quel plan projectif P, en particulier dans le plan projectif P' des droites de P. Pour ceux qui ne se souviennent pas de la structure de plan projectif sur P' (ne serait-ce que parce qu'on ne la leur a jamais enseignée), on admettra (provisoirement) l'existence de transformations bijectives $P \to P'$ vérifiant le "dictionnaire" suivant :

	P = plan	$\longleftrightarrow$	P' = {droites de P}
	point A de P	$\longleftrightarrow$	droite a de P (point de P')
(*)	point particulier Ω	$\longleftrightarrow$	droite de l'infini dans P
(*)	intersection de 2 droites distinctes	$\longleftrightarrow$	droite joignant 2 points distincts
	points alignés	birapport préservé $\longleftrightarrow$	droites concourantes
	courbe lieu de points	$\longleftrightarrow$	courbe enveloppe de droites
(**)	droite tangente en un point de la courbe	$\longleftrightarrow$	point de contact d'une droite avec son enveloppe
(**)	(ΩA, ΩB)	= angle orienté de droites	(a, b)
(**)	cercle (lieu)	$\longleftrightarrow$	conique de foyer Ω (enveloppe)
	conique de foyer Ω (lieu)	$\longleftrightarrow$	cercle (enveloppe)

(*) Le point Ω correspond au cas où P a été préalablement muni d'une "droite de l'infini", c'est-à-dire d'une structure *affine*.

(**) Les 3 dernières lignes ne sont valables que pour certaines des transformations $P \to P'$ considérées, et n'ont de sens que si P a été préalablement muni d'une structure *métrique* (ou au moins d'une structure *semblable* (1), pour pouvoir parler de "cercles", de "foyers" d'une conique, et d'angles).

[Les transformations $P \to P'$ considérées seront appelées "transformations par polaires réciproques" (t.p.p.r. en abrégé), celles vérifiant les 3 dernières lignes étant dites "relatives à un cercle de centre Ω". Peu importe, pour le moment, la façon de construire ces transformations, seul important le dictionnaire qu'elles définissent].

Ecrivant alors le théorème 1 dans l'espace projectif P' ou — ce qui revient au même —, le traduisant à l'aide du dictionnaire associé à une t.p.p.r., on obtient le

Théorème 2

Etant donnés, dans un plan, un triangle ABC et un point Ω n'appartenant à aucun des côtés du triangle, on pose :

$A' = A\Omega \cap BC$	$B' = B\Omega \cap AC$	$C' = C\Omega \cap AB$
$\alpha = B'C' \cap BC$	$\beta = A'C' \cap AC$	$\gamma = A'B' \cap AB$
$a = \beta B \cap \gamma C$	$b = \alpha A \cap \gamma C$	$c = \alpha A \cap \beta B$

Conclusions :

1) les points α, β et γ sont alignés,

2) a, A et Ω sont alignés [et de même (b,B,Ω) et (c,C,Ω)],

3) notant g la droite (α, β, γ), les bi-rapports (B'C', BC, g, $\alpha\Omega$) et (BC, bc, g, $\alpha\Omega$) sont égaux à -2,

4) la division (AB, AC, Aα, AΩ) est harmonique,

(et de même par permutation circulaire des lettres ABC, $\alpha\beta\gamma$ dans (3) et (4)).

Comme pour le théorème 1, on aura remarqué le caractère particulièrement élémentaire de l'énoncé, du moins si l'on s'en tient au deux premières conclusions qui ne font intervenir que des incidences (alignements de points, concours de droites).

(1) cf. la définition au § 2.

Pour ceux que le fait d'admettre l'existence de t.p.p.r. rendrait trop mal à l'aise, voici la construction d'une telle transformation, vérifiant les propriétés (*) et (**) du dictionnaire ci-dessus, relative à la donnée d'un cercle Γ de centre Ω et de rayon R :

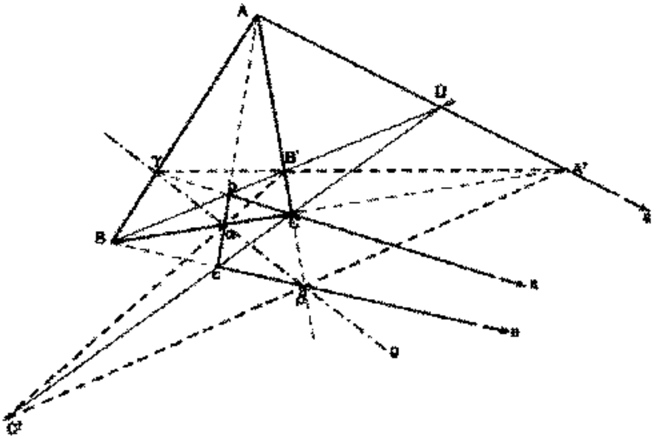


figure 6

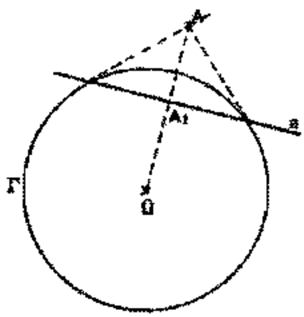


figure 7

— à un point A, distinct de Ω et à distance finie, on associe la perpendiculaire a à ΩA en le point A_1 défini par

$$\overline{\Omega A}.\overline{\Omega A_1} = R^2$$

— à Ω, on associe la droite de l'infini,

— à un point A à l'infini dans une direction, on associe le diamètre de Γ perpendiculaire à cette direction.

[Reste évidemment à vérifier le dictionnaire !].

Intéressons-nous maintenant aux perspectives coniques, non plus de plan sur plan, mais de plan sur sphère passant par le point de vue n : la perspective π d'une sphère Σ passant par n sur le plan P tangent à Σ en le point s diamétralement opposé à n sur Σ, s'appelle une *projection stéréographique* ; elle n'est évidemment définie que sur $\Sigma - \{n\}$, mais on la prolonge à tout Σ en ajoutant, à P, un point à l'infini (noté ∞) et en posant $\pi(n) = \infty$ [ne pas confondre avec la complétion projective de P par tout une droite de points à l'infini ; l'espace $P \amalg \{\infty\}$ n'est rien d'autre que ce qu'on appelle en théorie des fonctions de variable complexe "la sphère de Riemann" : c'est l'espace projectif complexe de dimension complexe 1, mais peu importe]. On ne retiendra de cette projection stéréographique, pour le moment, que les propriétés suivantes : elle transforme

les cercles de Σ contenant n	en	les droites de P
les cercles de Σ ne passant pas par n	en	les cercles de P
cercles tangents en n	en	droites parallèles
cercles tangents en un point de $\Sigma - \{n\}$	en	cercles ou droites tangent(e)s
cercles orthogonaux	en	cercles ou droites orthogonaux(ales)

Si P et P' désignent maintenant les plans tangents à une sphère Σ en 2 points distincts et non diamétralement opposés s et s', si n et n' désignent les points de Σ diamétralement opposés à s et s', $\pi : \Sigma \to P \amalg \{\infty\}$ et $\pi' : \Sigma \to P' \amalg \{\infty'\}$ étant les projections stéréographiques de point de vue n et n' respectivement, la transposition du théorème 1 par $\pi' \circ \pi^{-1}$ fournit alors le

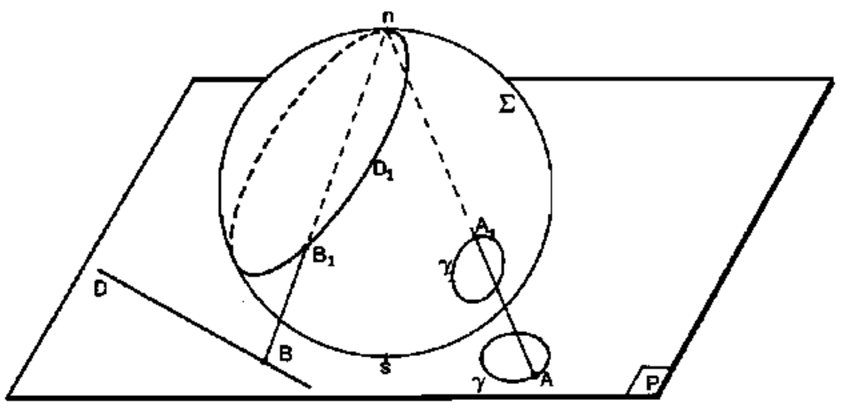


figure 8

Théorème 3

Données : dans un plan P, 4 points A,B,C et S, ni alignés, ni cocycliques.

Convention : dans cet énoncé, le mot "cercle" signifiera en fait, selon les cas, "cercle *ou* droite" (par exemple si P,Q,R sont 3 points distincts, le "cercle (PQR)" désignera le cercle circonscrit au triangle PQR si les 3 points ne sont pas alignés, ou la droite PQR si ces 3 points sont alignés).

Notations :

Γ_A sera le cercle passant par A et S, tangent en S au cercle (SBC)
Γ_B sera le cercle passant par B et S, tangent en S au cercle (SAC)
Γ_C sera le cercle passant par C et S, tangent en S au cercle (SAB)

A′ sera le point d'intersection autre que S des cercles Γ_B et Γ_C
B′ sera le point d'intersection autre que S des cercles Γ_A et Γ_C
C′ sera le point d'intersection autre que S des cercles Γ_A et Γ_B

a sera le point d'intersection autre que S des cercles (SBC) et (SAA′)
b sera le point d'intersection autre que S des cercles (SAC) et (SSB′)
c sera le point d'intersection autre que S des cercles (SAB) et (SCC′)

Conclusions :

1) les cercles (SAA′), (SBB′) et (SCC′) se recoupent en un point S′ autre que S (c'est-à-dire appartiennent à un même faisceau à points de base)
2) les cercles (SBC) et (Sbc) sont tangents en S et, de même (SAB) et (Sab) ainsi que (SAC) et (Sac).

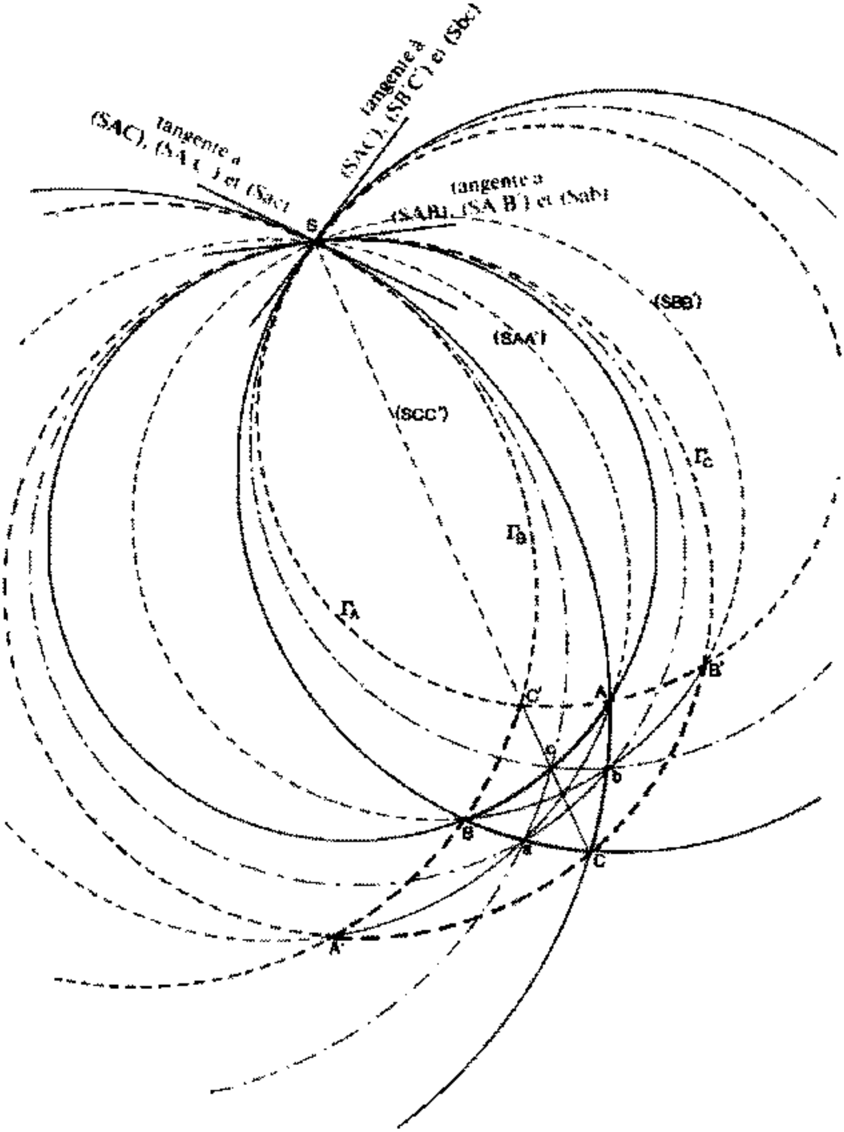

tangente à (SAC'), (SB'C') et (Sbc)
tangente à (SAC), (SA'C') et (Sac)
tangente à (SAB), (SA'B') et (Sab)
S
(SBB')
(SAA')
(SCC')
Γ_C
Γ_B
Γ_A
B'
C'
A
c
b
B
a
C
A'

figure 9

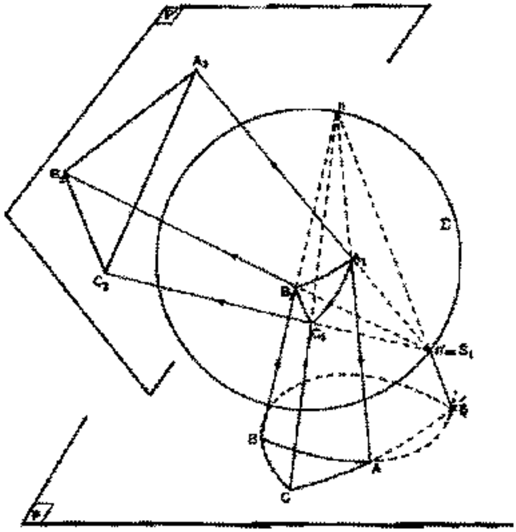


figure 10

Bien entendu, une démonstration possible du théorème consiste à prendre une sphère Σ tangente à P en un point diamétralement opposé à n, à prendre pour n' la préimage S_1 de S par la projection stéréographique $\pi : \Sigma \to P \amalg \{\infty\}$ associée à Σ et n, et pour π' la projection stéréographique de point de vue n'. Une autre démonstration (c'est presque la même), consiste à effectuer dans P une "inversion" de pôle S et de puissance un nombre k (réel $\neq 0$ quelconque). [On appelle ainsi la transformation $J : P - \{S\} \to P - \{S\}$ qui, à M associe le point M′ aligné avec S et M, et vérifiant $SM.SM' = k$, prolongé à $P \amalg \{\infty\}$ en posant $J(S) = \infty$, $J(\infty) = S$]. Rappelons en effet le "dictionnaire" d'une telle transformation :

point M	⟷	point M′
point S	⟷	point ∞
points alignés ou cocycliques	préservation du birapport ⟷	points alignés ou cocycliques
cercle passant par S	⟷	droite (= "cercle" passant par ∞)
cercle ne passant pas par S	⟷	cercle ne passant pas par S

courbes tangentes	$\longleftrightarrow$	courbes tangentes
courbes orthogonales	$\longleftrightarrow$	courbes orthogonales

(plus généralement, conservation — au signe près — de l'angle de droite formé par les tangentes : l'orientation est changée)

droite passant par S	$\longleftrightarrow$	droite passant par S
cercle ou droites tangents en S	$\longleftrightarrow$	droites parallèles

Encore plus simplement, une fois P identifié au plan complexe $\mathbb{C}$ et $P\cup\{\infty\}$ à la sphère de Riemann, on peut appliquer à la figure n'importe quelle transformation conforme $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ de la sphère de Riemann, choisie seulement de façon que S soit l'image du nombre complexe $-\dfrac{d}{c}$ [ces transformations conformes vérifient exactement le même dictionnaire que les inversions, à ceci près qu'elles préservent le signe des angles de droites, et l'orientation : $z \to \dfrac{1}{z}$ est une telle transformation conforme, tandis que $z \to \dfrac{1}{\bar{z}}$ est une inversion !].

II. Groupes et géométries

On sait, depuis F. Klein et son fameux programme d'Erlangen, l'avantage qu'il peut y avoir à classer les notions géométriques et les énoncés qui s'y rattachent, selon le groupe des transformations qui les *"préservent"*. [Le fait que ces transformations forment un groupe est évident : si f et g sont 2 bijections d'un ensemble sur lui-même préservant toutes deux un même "quelque chose", $g.f$ et f^{-1} le préservent aussi, tandis que l'identité préserve n'importe quoi !]. Inversement, à tout groupe de transformations sur un ensemble, est associé une "géométrie" (on dirait plutôt aujourd'hui une "structure") : celle relative aux définitions et aux théorèmes pouvant s'exprimer uniquement à l'aide des *invariants* du groupe considéré.

Ainsi, par exemple, le théorème 0 du paragraphe précédent relève de la géométrie *affine*, car les mots clés figurant dans son énoncé ("alignement", "concours", "parallélisme", "rapport" entre points alignés, "milieu", "centre de gravité", ...) désignent des notions invariantes par toute transformation affine. Les théorèmes 1 et 2, par contre, relèvent de la géométrie *projective* (mots clés : "alignement", "concours", "birapport"), tandis que le théorème 3 relève de la géométrie *anallagmatique* (on désigne ainsi celle associée au groupe des transformations conformes, engendré par les inversions et les similitudes), dont les mots clés essentiels s'écrivent "cercle", "angle", "tangent", "orthogonal", "faisceaux de cercles", etc...

Bien entendu, l'inclusion entre groupes de transformations sur un même ensemble induit une relation d'ordre entre géométries, celles-ci étant d'autant plus "fines" que leur groupe de transformations est plus petit (car il a alors davantage de choses à conserver). Une petite subtilité, toutefois, provient de ce qu'un même groupe peut être considéré comme opérant sur un ensemble ou, lorsqu'il la préserve, sur une partie de cet ensemble. Par exemple, un plan affine peut se compléter en un plan projectif quand on lui ajoute une droite de "points à l'infini" (ou directions de droites), les transformations affines du plan affine se prolongeant à tout le plan projectif et s'identifiant alors au sous-groupe des transformations projectives qui préservent la droite de l'infini, donc aussi son complémentaire. Dans ce nouveau langage, on peut parfaitement faire de la *géométrie affine dans le plan projectif tout entier*, dès lors que les points de la droite de l'infini jouent un rôle particulier. Inversement, la donnée d'une droite particulière Δ dans un plan projectif (que l'on baptisera "droite de l'infini") permettra de définir une géométrie affine, celle associée au sous-groupe des transformations projectives préservant Δ (donc son complémentaire, qui possède alors une structure naturelle d'espace affine). De même, un plan euclidien peut se compléter en une sphère, par adjonction d'un point à l'infini, les similitudes du plan euclidien s'identifiant alors au sous-groupe des transformations conformes de la sphère qui préservent le point à l'infini. Réciproquement, la donnée d'un point particulier sur une sphère (que l'on baptisera "le point à l'infini") permet de définir une géométrie semblable (les droites étant les cercles passant par le point à l'infini). Voici un schéma de quelques géométries "planes". [Il y en a évidemment beaucoup d'autres !].

Groupes :

Isométries dans un plan euclidien $\subset$ Similitudes d'un plan euclidien $\underset{\left(\begin{array}{c}\text{adjonction}\\ \text{d'un point}\\ \text{à l'infini}\end{array}\right)}{\subset}$ Transformations conformes d'une sphère

Similitudes d'un plan euclidien $\subset$ Transformations affines d'un plan affine $\underset{\left(\begin{array}{c}\text{adjonction}\\ \text{d'une droite}\\ \text{de points à}\\ \text{l'infini}\end{array}\right)}{\subset}$ Transformations projectives d'un plan projectif

Rotations dans un plan vectoriel euclidien $\subset$ Transformations linéaires dans un plan vectoriel $\subset$ Transformations affines d'un plan affine

Géométries correspondant :

$$\begin{tikzcd}
\text{métrique (euclidienne)} \arrow[r] & \text{semblable} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{anallagmatique} \\
& & \text{affine} \arrow[r] & \text{projective} \\
\text{euclidienne linéaire} \arrow[r] & \text{linéaire} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Remarques :

1) On commet très souvent l'abus de langage consistant à appeler "géométrie métrique" ce qui relève en fait de la géométrie semblable : ainsi, par exemple, non seulement les notions d'"angle" (donc de "bissectrice", de "hauteur", d'"orthogonalité", ...) sont des invariants du groupe des similitudes, mais aussi toute relation métrique, dès lors qu'elle est *homogène par rapport aux longueurs* : c'est le cas par exemple du "rapport des distances" $\dfrac{AB}{CD}$ (homogène en degré 0), de la notion de "médiatrice" (définie par la formule $MA - MB = 0$, homogène de degré 1), du théorème de Menelaüs (qui s'exprime par une relation homogène de degré 2) ; c'est aussi le cas de la notion de "cercle" (à ne pas confondre avec celle de "cercle de rayon fixé" qui — elle — relève de la géométrie métrique), etc.

2) On parle souvent, aussi, de "géométrie conforme", qui, selon le contexte, désigne tantôt la géométrie semblable et tantôt la géométrie anallagmatique. Pour éviter toute ambiguïté, nous éviterons l'expression.

III. Géométrie dont relève un problème : l'intérêt d'y rester

Supposons maintenant que l'on ait à démontrer le théorème 1 du paragraphe 1 (recherche d'un problème), en ignorant a priori la façon dont il a été obtenu. Analysant les mots clés de son énoncé, on commence par observer qu'il relève de la *géométrie projective*. Si le plan projectif a été obtenu par adjonction d'une droite de l'infini à un plan affine, on constate d'autre part que les *cas particuliers* suivants du théorème 1 sont très faciles à démontrer, car se ramenant à des propriétés bien connues du centre de gravité d'un triangle ou d'un parallélogramme :

1er cas particulier : Δ est la droite de l'infini ;

2e cas particulier : l'un des côtés du triangle ABC, BC pour fixer les idées, est la droite de l'infini.

On essaie alors de se ramener à ces cas particuliers en *profitant de l'invariance* du problème par toute transformation projective. Quel est alors le *degré de liberté* dont on dispose ? Une transformation projective plane est définie par la donnée de 4 couples de points homologues $(A_i, A'_i)_{i=1,...,4}$ en position "générique" (c'est-à-dire que 3 des 4 points $A_1, \dots A_4$ ne sont pas alignés, et de même pour $A'_1, \dots A'_4$), et une fois donnés $(A_i, A'_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ vérifiant cette condition, il existe effectivement une telle transformation projective admettant ces 4 couples de points homologues. Or, pour se ramener aux cas particuliers envisagés, il suffit de se donner seulement 2 couples de points homologues (A_1 et A_2 sur Δ, A'_1 et A'_2 à l'infini dans le premier cas ; $A_1 = B$, $A_2 = C$, A'_1 et A'_2 à l'infini dans le second cas). C'est donc toujours possible, et le théorème 1 peut se démontrer ainsi dans le cas général.

On démontrerait de même le théorème 3 en observant qu'il relève de la géométrie anallagmatique, en traitant le cas particulier où S est le point à l'infini, et en montrant qu'on peut toujours s'y ramener.

La méthode s'applique en fait à la résolution de tous les problèmes de ce type :

1. analyser de quelle géométrie relève le problème,
2. essayer de traiter des cas particuliers,
3. étudier le degré de liberté du groupe de la géométrie dont relève le problème, pour voir s'il est possible de ramener le cas général au(x) cas particulier(s), en d'autres termes, étudier la "généricité" des cas particuliers envisagés.

IV. Géométrie dont relève un théorème : l'intérêt d'en sortir

Revenons-en maintenant aux théorèmes du paragraphe I. Ils ont tous été obtenus de la façon la plus bête qui soit, c'est-à-dire la plus automatique, par simple transposition du théorème 0 (qui est du niveau de la classe de Quatrième) au moyen de perspectives coniques, de t.p.p.r., et de projections stéréographiques (ou d'inversions). Si, au lieu d'une perspective conique, on avait cherché à transposer le théorème 0 par une projection cylindrique (ou "perspective cavalière"), on n'aurait évidemment rien obtenu de nouveau : la raison en est que le théorème 0 relève de la géométrie affine et qu'une perspective cavalière est une transformation affine, qui préserve par conséquent la notion de centre de gravité. C'est ici la transposition par des transformations *non affines* qui s'est révélée efficace pour obtenir un théorème nouveau.

Plus généralement, on appellera

"vraies transformations d'un théorème" les transformations qui n'appartiennent *pas* au groupe de la géométrie dont relève ce théorème (et "fausses transformations" celles qui y appartiennent).

On commence alors à comprendre pourquoi il n'est pas possible de faire sentir aux élèves de l'enseignement secondaire toute la fécondité de la notion de transformation géométrique : les nombreuses définitions et les rares théorèmes qui figurent dans les programmes relèvent tous — sauf erreur de ma part — des géométries métrique, semblable ou affine, et par conséquent les principales transformations au programme (essentiellement des isométries et des similitudes) seront toutes de *fausses* transformations de ces théorèmes. En outre, ces transformations conservent la *forme* des figures, c'est-à-dire les angles et les rapports de distances. Seules, certaines transformations affines (telles des symétries obliques, des affinités, des perspectives cavalières), qui sont à la lisière des programmes, pourraient être de *vraies* transformations pour les figures et les théorèmes des géométries semblable et métrique et fournir des résultats nouveaux. Au lieu d'exploiter cette possibilité, il arrive au contraire qu'on s'efforce de faire croire aux élèves qu'ils n'en ont "pas le droit". Un tel interdit, lorsqu'il existe, témoigne à mon avis d'une incompréhension[1] de l'utilité du programme d'Erlangen ; il a pour résultat, par exemple, que la plupart des étudiants n'ont jamais vu les propriétés classiques de l'ellipse que l'on peut obtenir à partir du cercle par affinité (cf. figure 11).

[Pire, ils vont même jusqu'à ignorer qu'en perspective, fut-elle cavalière, un cercle est vu suivant une ellipse, et ils dessinent presque systématiquement des "ellipses à pointes". Il ne faut pas s'étonner ensuite que la géométrie dans l'espace leur semble tellement difficile].

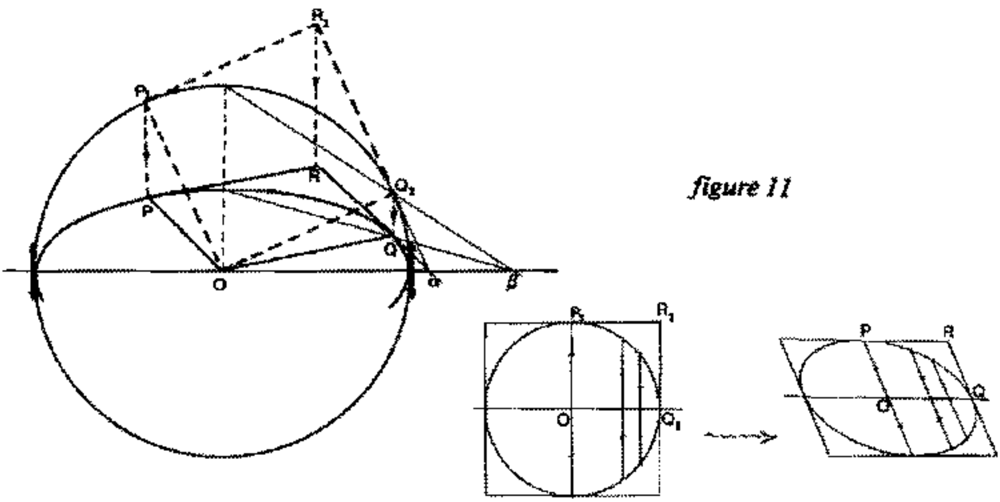
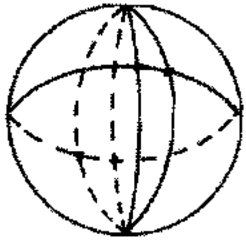


figure 11

(1) Cet interdit, qui me semble être une erreur pédagogique, existe aussi dans l'enseignement universitaire.



"ellipses à pointes"

figure 12

Il est fréquent, dans l'enseignement des mathématiques, que des exemples trop particuliers ne soient pas les meilleurs, dès lors qu'ils recèlent des phénomènes parasites exceptionnels. Ainsi, par exemple, sous prétexte que 1 est plus petit que 2, commence-t-on souvent l'étude de l'analyse par la topologie de $\mathbf{R}$ et non celle de $\mathbf{R}^2$; or la structure d'ordre dans $\mathbf{R}$ joue un rôle tout à fait particulier à la dimension 1, qui risque de donner des idées fausses en masquant la simplicité de certaines notions topologiques ; en outre les intersections de voisinages dans $\mathbf{R}^2$ seraient beaucoup plus faciles à dessiner que les intersections d'intervalles dont on a besoin dans $\mathbf{R}$, et représenter une droite par une patate n'était peut-être pas le meilleur moyen d'y remédier ! De façon analogue, il se passe sur la droite ce phénomène, tout à fait particulier à la dimension 1, que des segments de même longueur sont nécessairement isométriques, alors qu'il existe évidemment des rectangles non isométriques de même aire.

De même, des transformations géométriques trop particulières et qui conservent trop de choses, telles par exemple les similitudes qui conservent la forme des figures, sont plus difficiles à utiliser que les transformations qui transforment beaucoup. A cet égard, et parce qu'elle conserve n'importe quoi, l'identité est peut-être la transformation dont l'usage est le plus difficile à comprendre, bien que la plus simple à définir.

Je regrette que les programmes n'aient pas introduit dans l'enseignement secondaire, par exemple, en liaison avec le dessin et la cartographie, des perspectives (cavalières ou pas) et des projections stéréographiques. Outre qu'elles modifient réellement les figures, ces transformations obligent à raisonner dans l'espace dès le début, ce qui — paradoxalement — est peut-être une facilité, dans la mesure où l'espace permet de mieux visualiser les transformations plan $\to$ plan (ou plan $\to$ sphère) et de mieux distinguer les espaces source et but. Mais les symétries orthogonales par rapport à une droite, les symétries centrales, les translations et même les similitudes telles les homothéties, me semblent plus difficiles à utiliser (1),

(1) Etudier les symétries internes d'une figure est une autre activité, dont je ne nie pas du tout l'intérêt ; mais je ne suis pas persuadé que ce soit leur statut de transformation qui est alors le plus utile.

sinon à définir. Il a fallu déployer des trésors d'ingéniosité, dans les IREM et ailleurs (problèmes de billard, droite d'Euler...), pour arriver à en faire quand même quelque chose, alors qu'au paragraphe I, je me suis contenté de faire de la traduction automatique. [Je ne suis pas hostile à l'effort, mais le problème n'est pas là : le choix n'est pas entre la facilité et la difficulté, mais entre le naturel et l'artifice. Quant aux difficultés, il faut les sérier, en commençant par le plus facile, et celui-ci n'est peut-être pas là où l'on croit].

V. Groupes et familles de bijections : structuration d'un ensemble

Il est un autre usage des groupes de transformations, permettant de munir un ensemble E d'un type de structure géométrique isomorphe à celle que l'on connaît déjà sur un ensemble de référence E_0.

La structure sur E sera définie par "transport de structure" à partir de celle connue sur E_0, à l'aide d'une bijection $f : E_0 \xrightarrow{\cong} E$, que l'on voudra être un isomorphisme une fois la structure sur E définie. Mais il est clair que si l'on compose f avec un automorphisme $s : E_0 \to E_0$ de la structure sur E_0, la bijection $f \circ s : E_0 \xrightarrow{\cong} E$ devra encore être un isomorphisme, c'est-à-dire définir sur E la *même* structure que f. Réciproquement, dès lors que $f_2^{-1} \circ f_1 : E_0 \to E_0$ est un automorphisme de E_0 pour la structure considérée, les 2 bijections f_1 et f_2 de E_0 sur E définiront sur E la même structure par transport à partir de celle de E_0, d'où la définition générale suivante :

> Etant donnés un ensemble E_0 et un sous-groupe G du groupe des bijections de E_0 sur lui-même, on appelle *G-structure* sur un ensemble E la *donnée* d'une famille $\mathcal{F}$ de bijections $f : E_0 \xrightarrow{\cong} E$ de E_0 sur E, vérifiant l'*axiome* suivant :
>
> $$\forall f_1 \in \mathcal{F},\ \mathcal{F} = \{f_1 \circ s\}_{s \in G}$$

Exemple 1 : $E_0 = \mathbb{R}^n$, $G = GL(n, \mathbb{R})$ (groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients réels). La donnée d'une $GL(n, \mathbb{R})$ – structure $\mathcal{F}$ sur un ensemble E équivaut alors à la donnée d'une structure d'espace vectoriel réel de dimension n sur E, la donnée d'une bijection $f \in \mathcal{F}$ équivalent alors à celle d'une *base* de E (l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Exemple 2 : $E_0 = \mathbb{R}^2$, G désignant le groupe des bijections $s : (x, y) \mapsto (x', y')$ qui sont de la forme

$$\begin{cases} x' = ax + by + u \\ y' = cx + dy + u \end{cases} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

(avec divers sous-groupes, tels par exemple ceux définis par $ad-bc>0$; a, b, c, d de la forme $a=d=r\cos\theta$; $b=-c=r\sin\theta$ $(r\neq 0)$; a, b, c, d de la forme $a=d=\cos\theta$; $b=-c=\sin\theta$).

Une G-structure n'est autre, alors, qu'une structure de plan affine réel (resp. plan affine réel orienté ; resp. plan semblable orienté ; resp. plan euclidien orienté), la donnée d'une bijection f particulière équivalant à celle d'un repère affine (resp. affine direct, resp. orthogonal direct, resp. orthonormé direct).

Exemple 3 : $E_0=\mathbb{R}$, G désignant le groupe des bijections s de la forme $s(x)=ax+u$ $(a\neq 0)$ (avec les sous-groupes correspondant à $a>0$, $a=\pm 1$, $a=1$) ; on aura reconnu la célèbre définition de la droite affine (resp. affine orientée, resp. euclidienne, resp. euclidienne orientée) du programme de Quatrième des années 70. [On remarquera, là encore, un phénomène particulier à la dimension 1 : toute affinité y est une similitude et conserve donc la forme des figures ; il est vrai, toutefois, que la forme d'une figure rectiligne n'est pas d'un intérêt palpitant, ce qui là aussi est très particulier !]

Exemple 4 : Si P désigne un plan projectif obtenu par adjonction d'une droite de l'infini à un plan euclidien P_0, nous avons vu au paragraphe I que la donnée d'un cercle Γ de P_0 permettait de définir une t.p.p.r. qui était une bijection f de P sur l'ensemble P' des droites de P . Si Γ_1 et Γ_2 sont 2 cercles de P_0, définissant respectivement les t.p.p.r. f_1 et f_2 : $P\to P'$, on peut vérifier que $f_2^{-1}\circ f_1 : P\to P$ appartient au groupe des automorphismes projectifs de P . On en déduit la définition d'une *structure de plan projectif sur P'*, avec $E_0=P$, G désignant le groupe des automorphismes projectifs de P , et $\mathcal{F}$ la famille de bijections $P\to P'$ contenant toutes celles définies par la t.p.p.r. relative à un cercle.

Exemple 5 : G est le groupe de *toutes* les bijections de E_0 sur lui-même ; $\mathcal{F}$ est alors la famille de toutes les bijections de E_0 sur E, et la G structure sur E n'est autre que celle *d'ensemble équipotent* à E_0.

Exemple 6 : G est le groupe réduit à $\{1_{E_0}\}$; $\mathcal{F}$ est alors réduit à une seule bijection $f_0 : E_0 \xrightarrow{\cong} E$, grâce à laquelle on peut identifier canoniquement E_0 et E.

VI. Exégèse d'un lieu commun

On a beaucoup dit et répété, depuis 20 ans, que "l'objet de la géométrie a évolué de l'étude des figures vers celle des groupes de transformations". Une telle phrase, sans nuance, n'a évidemment pas plus de sens que celle qui consisterait à énoncer que l'analyse, désormais, ne consiste plus à étudier les fonctions mais les espaces vectoriels topologiques, ou que l'arithmétique ne consiste plus à étudier les nombres mais les anneaux de Dedekind : la théorie des EVT a précisément été créée pour étudier des espaces fonctionnels (qui en restent les exemples les plus courants), tandis que celle des anneaux de Dedekind a été faite pour étudier des anneaux de nombres ; de même, l'enseignement de la géométrie me semble devoir partir de l'étude des figures, sans lesquelles l'étude des groupes de transformations est entièrement désincarnée.

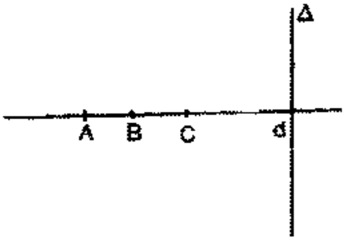
L'usage de ces groupes que nous avons évoqués au paragraphe V, et qui consiste à définir une structure géométrique sur un ensemble, est extrêmement *théorique*, et saurait difficilement correspondre aux motivations d'un débutant en géométrie. Il aura fallu, en effet, que celui-ci ait déjà rencontré beaucoup de "jolis" théorèmes de géométrie élémentaire pour seulement songer à les *classer*, et pour éprouver le besoin de *définir* avec précision la structure géométrique sous-jacente ; il aura fallu qu'il ait déjà eu l'occasion de tâter en pratique de la dualité sous une forme ou sous une autre pour comprendre l'utilité de définir une structure de plan projectif sur l'ensemble P' des droites d'un plan projectif P ; il devra s'être déjà servi du birapport de 4 points sur une conique ou sur une autre courbe unicursale pour avoir envie de munir cette courbe d'une structure de droite projective. Faute de ces pratiques antérieures, de telles définitions risqueraient de ne rigoureusement rien signifier.

C'est précisément pour acquérir ces *pratiques* nécessaires, que la résolution de problèmes que l'on ramène à des cas particuliers (paragraphe III), ou la transformation de théorèmes (paragraphe IV) prennent tout leur sens. Ces deux processus, inverses l'un de l'autre (le "thème" et la "version"), ne présentent certes, du strict point de vue de la recherche mathématique, qu'un intérêt tout à fait limité, essentiellement à cause de leur caractère plus ou moins automatique. Mais leur rôle formateur, par la gymnastique et les analyses à laquelle ils obligent, est un intermédiaire indispensable entre l'étude naïve des figures et la géométrie structurée par les groupes de transformations auxquelles certains voudraient se limiter. Pour comprendre les propriétés d'une transformation, le mieux est encore de voir comment elle déforme certaines figures ; et l'on comprendra mieux l'intérêt de définir cette transformation par un nombre donné de couples de points homologues, en étudiant dans quelle mesure il est possible de ramener une situation générale à un cas particulier donné. Ces exercices, enfin, surtout ceux relevant du "thème", ont un rôle démystificateur tout à fait appréciable : n'importe qui est capable avec un peu d'entraînement d'inventer un théorème par le procédé du paragraphe IV, et de maquiller (1) ensuite la façon dont il a été obtenu ; si tel n'est pas l'objet essentiel de la recherche mathématique, du moins est-ce une façon de redonner confiance en eux à des élèves qu'on s'accorde à trouver parfois trop passifs.

(1) cf. la remarque faisant suite à la figure 4.

VII. Complément aux dictionnaires

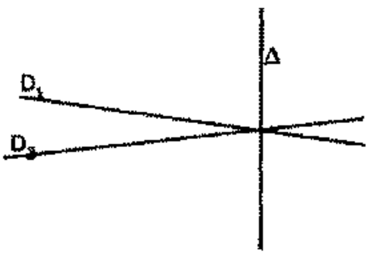
Nous avons vu, au paragraphe 1, comment interpréter la géométrie *affine* plane dans le langage de la géométrie projective, par la simple donnée d'une droite de l'infini Δ dans un plan projectif **P**.



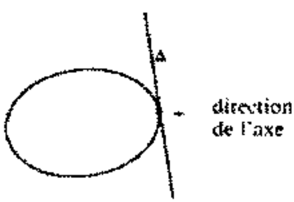
$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ = birapport (A, B, C, d)

C *milieu* de $[AB]$

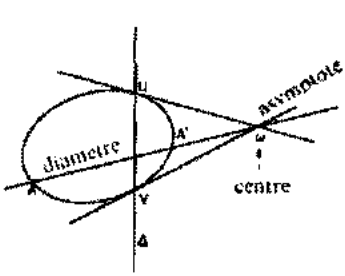
$\Leftrightarrow$ (A, B, C, d) division harmonique



D_1 et D_2 droites *parallèles*



parabole = conique tangente à Δ



conique à centre = conique coupant Δ en 2 points U et V distincts (réels ou imaginaires, ne distinguons pas ici)

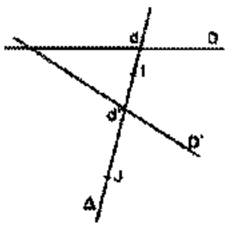
centre ω = pôle de Δ

asymptotes = tangentes issues du centre

ω est milieu de $[AA']$.

La géométrie *semblable* plane peut aussi s'interpréter projectivement ainsi : le plan projectif P étant déjà muni d'une structure affine, c'est-à-dire d'une droite de l'infini Δ, on choisit, sur Δ, deux points distincts I et J appelés points cycliques (imaginaires conjugués pour une structure réelle dans le plan projectif complexe, mais peu importe ces questions de réalité, ici).

Relativement à ces 2 points, il n'y a que 3 termes à ajouter au dictionnaire :

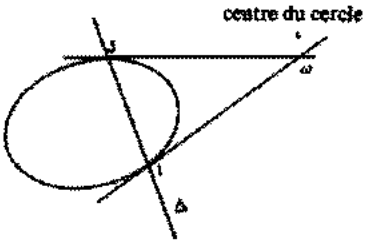


— celui d'*angle* de droites $(d, d' \neq I, J)$

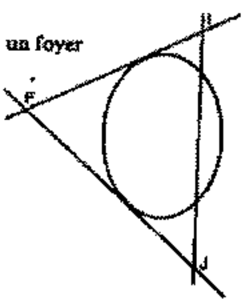
$$(D,D') = \frac{i}{2} \log (d, d', I, J)$$

birapport d'un nombre complexe

(en particulier : D et D' *orthogonales* ⇔ (d, d', I, J) est une division harmonique).



— celui de *cercle* : conique coupant la droite de l'infini en les points cycliques,



— celui de *foyer* d'une conique : point F en lequel on peut mener 2 tangentes à la conique admettant respectivement chacun des points cycliques comme point à l'infini.

* * *

Voici pour terminer, à titre d'illustration, diverses situations de géométrie métrique ou semblable, à priori très différentes les unes des autres, qui sont toutes, en fait, des cas particuliers d'un même théorème de géométrie projective, mais des cas particuliers "génériques" en ce sens qu'il existera toujours une transformation projective ramenant la situation générale à l'un quelconque de ces cas particuliers.

1. *Losange circonscrit à un cercle*

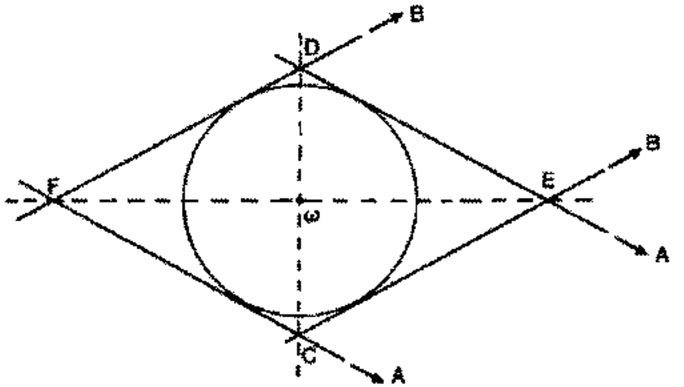


figure 13

Tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange :
1) le centre du cercle est le point d'intersection des diagonales du losange,
2) les diagonales du losange sont perpendiculaires,
3) les directions des diagonales forment une division harmonique avec les directions des côtés (valable dans tout parallélogramme).

Interprétation projective de la figure ci-dessus

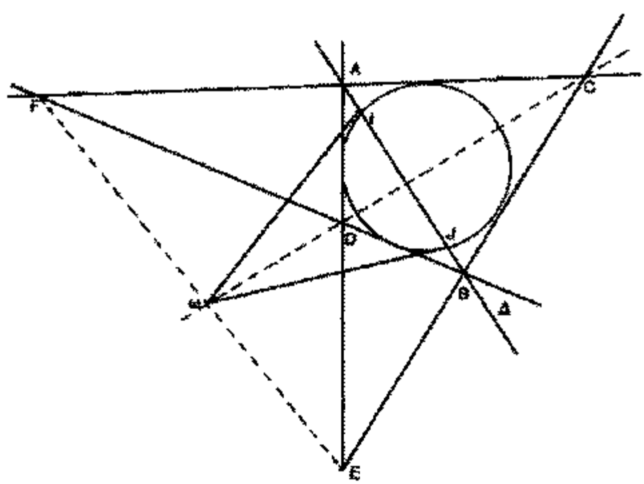


figure 13'

2. *Cette figure suggère le résultat suivant :*

On se donne un quadrilatère complet (sommets ABCDEF, diagonales AB, CD, EF) circonscrit à une conique propre Γ, et l'on suppose que l'une des diagonales, AB pour fixer les idées, coupe Γ en 2 points P et Q distincts, et différents de A et B.

Théorème 4

1) Le pôle ω de la droite AB est le point d'intersection des diagonales CD et EF
2) $(CD, EF, \omega P, \omega Q) = -1$
3) $(CD, EF, \omega A, \omega B) = -1$

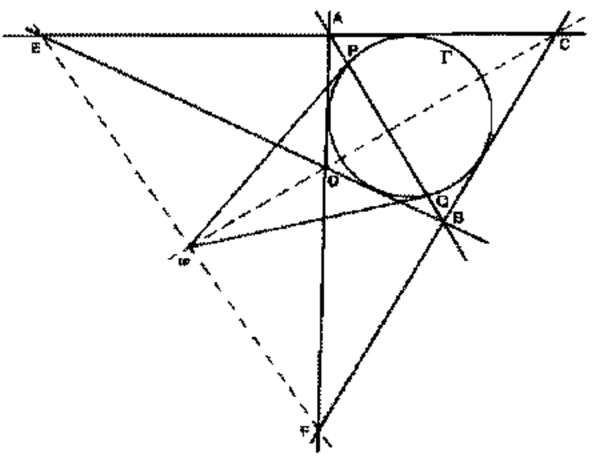


figure 14

Démonstration évidente : étant donné un plan projectif P_0 muni d'une structure semblable avec points cycliques I et J, il existe toujours une transformation projective admettant (P,I) et (Q,J) comme couple de points homologues : on est donc amené à la situation du losange circonscrit au cercle.

3) Si l'on suppose maintenant que ce sont les points *A et B qui sont les points cycliques* :

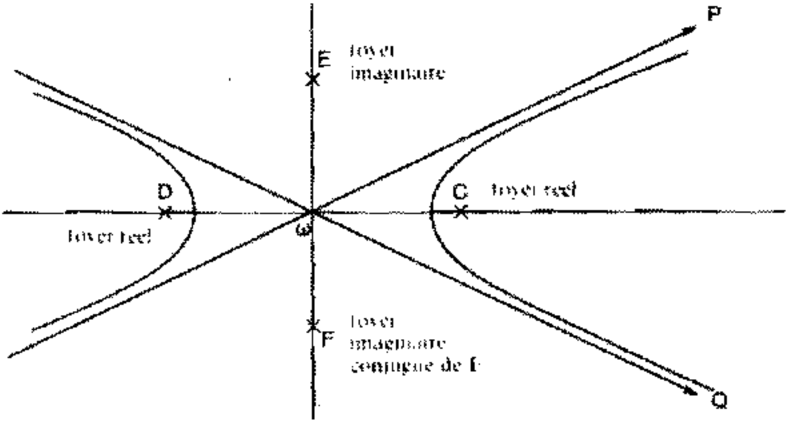


figure 15

Γ est alors une conique à centre,
ω en est le centre, C et D 2 des foyers sur un même axe, E et F les 2 autres foyers sur l'autre axe. (Une conique à centre a 4 foyers, répartis 2 à 2 sur chacun des 2 axes ; pour une conique réelle, les 2 foyers situés sur l'axe secondaire sont imaginaires conjugués);

(1) signifie alors que les foyers sont répartis sur 2 droites se coupant au centre de la conique [ce sont les axes] ;

(2) signifie que les axes forment avec les asymptotes une division harmonique [bien évident puisque les axes sont les bissectrices de l'angle formé par les 2 asymptotes] ;

(3) signifie que les axes sont orthogonaux [bien connu] ;

(4) Si une hyperbole équilatère est inscrite dans un parallélogramme, les diagonales de celui-ci ont pour bissectrices les asymptotes de l'hyperbole.

Il suffit en effet d'appliquer la conclusion (2) du théorème au cas où P et Q sont des points à l'infini dans des directions orthogonales.

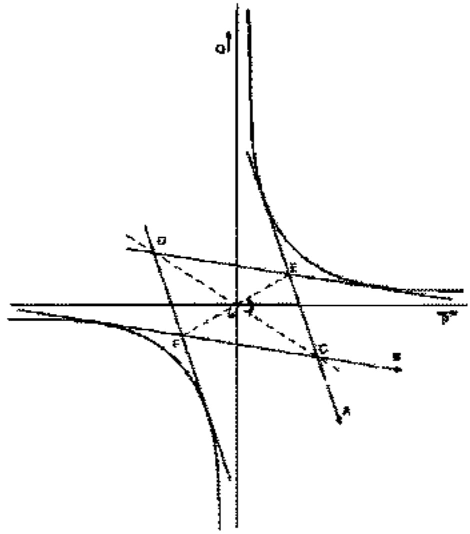
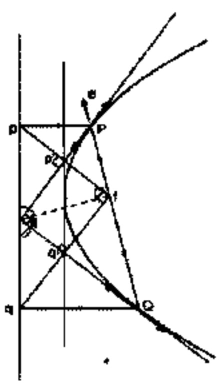


figure 16

Il suffit en effet d'appliquer le théorème 4 dans le cas où C et F sont les points cycliques (la conique est alors une parabole de foyer f = A, et B est le point à l'infini sur la droite PQ).



[Bien entendu, il y a réciproque.

Bien entendu aussi, il est facile de démontrer ce théorème de façon élémentaire (ou à l'aide du théorème de Poncelet)].

figure 17

(5) Si 2 points P et Q d'une parabole sont alignés avec son foyer f, les tangentes en P et Q sont orthogonales, et leur point d'intersection ω appartient à la perpendiculaire en f à PQ.