

études didactiques

l'enseignement de la géométrie de l'espace()*

*par Gérard Audibert,
IREM de Montpellier*

Cet article doit être associé aux travaux du groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie de l'IREM de Montpellier. Il est dans sa quasi totalité extrait des documents [4] et [5]. Il reproduit en le développant légèrement sur certains points, l'exposé fait aux Journées Nationales 1985 de l'A.P.M.E.P. qui a été suivi d'ateliers et de discussions.

Le texte qui suit est divisé en 5 parties intitulées :

- 1. Le plan et l'espace*
- 2. Une prise de conscience*
- 3. Les règles de dessin*
- 4. Les représentations de l'espace*
- 5. Les élèves.*

(*) Conférence du 24.10.85 aux Journées Nationales de Port Barcarès.

1. Le plan et l'espace

CLAIRAUT (1741), LEGENDRE (1851), ROUCHE, et DE COMBEROUSSE (1866a, b, 1867), HADAMARD (1898, 1901) ont toujours séparé très distinctement la géométrie plane et la géométrie de l'espace. Dans l'avertissement de la deuxième édition, HADAMARD J. (1898) écrit "Je n'ai nullement été tenté de fondre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace. Que cette fusion soit préférable au point de vue de la logique pure, je le veux bien. Mais, il me paraît que, pédagogiquement, nous devons penser tout d'abord à diviser les difficultés. Celle de "voir dans l'espace" en est une sérieuse par elle-même que je ne considère pas comme devant être ajoutée tout d'abord aux autres".

De 1950 à 1970, cette séparation du plan et de l'espace est préservée la plupart du temps. Pourtant, des dérogations à cette séparation apparaissent. DELTHEIL et CAIRE (1950), respectant en cela les programmes, introduisent les vecteurs dans leur première leçon sans faire aucune distinction entre le plan et l'espace ; ils procèdent de façon analogue avec la somme de vecteurs et avec le produit d'un vecteur par un nombre. Mais par la suite, ils commencent à prendre en compte la séparation du plan et de l'espace ; c'est ainsi qu'après avoir donné une définition générale de la translation, ils séparent la "translation dans l'espace" et la "translation dans le plan" ; lors de l'étude de la composition des translations, ils écrivent : "Soient dans le plan ou dans l'espace, deux translations données...". Et la plupart de leurs paragraphes prennent en compte de façon explicite tantôt le plan tantôt l'espace.

Le programme du 20 Août 1965 des classes de Seconde C dans son paragraphe III intitulé "Éléments orientés - vecteurs" suggère de traiter les vecteurs sans que soit toujours bien distingués le plan et l'espace. LEBOSSE et HEMERY (1961) présentent aux élèves de Seconde C leur 21ème leçon sur les vecteurs sans distinguer le plan de l'espace. LEBOSSE et HEMERY (1965) et COMMEAU (1963) qui s'appuient sur les programmes de Terminale de 1962, abandonnent aussi le distinguo plan-espace pour introduire les transformations ponctuelles.

Mais c'est surtout les programmes de Second Cycle des années 1970 qui vont privilégier la fusion du plan et de l'espace dans le Second Cycle. Les BOEN (1970, 1971 c, d, e, 1973) sont explicites à ce sujet : on parle de " \mathbb{R}^n pour quelques valeurs numériques de n (y compris $n = 1, 2$ ou 3)", "isomorphisme d'un espace vectoriel sur un autre" pour la classe de Seconde C et T ; "la géométrie désigne dorénavant une construction mathématique, logique par nature, s'appuyant sur un système cohérent d'axiomes où interviennent au premier chef les structures algébriques (espaces vectoriels, groupes...) et topologiques ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^n...$)" dit le commentaire pour la classe de Première C. Les programmes, les commentaires, les livres de classe tendent tous à effacer la dichotomie plan-espace par le biais des vecteurs et des transformations.

Il faut attendre les années 80 pour que cette orientation soit radicalement modifiée en Seconde et en Première. Les programmes de Seconde présentés par le BOEN (1981) proposent trois chapitres de géométrie plane et un quatrième chapitre de géométrie dans l'espace. Dans les programmes de Première S et E, le BOEN (1982) propose un chapitre V de géométrie plane et un chapitre VI de géométrie dans l'espace. Mais, le programme de Terminale C et E, présenté par le BOEN (1982), qui croit clarifier la situation plan-espace en créant un chapitre VII d'algèbre linéaire et un chapitre VIII de géométrie, pratique en fait la politique de l'autruche. Il refuse d'aborder les questions telles que : comment interfèrent, d'une part, combinaisons linéaires, sous-espaces, famille libre, famille génératrice... et d'autre part, droites, plans, parallélisme... ? Quels sont les rapports entre géométrie plane, géométrie de l'espace et espaces vectoriels dans notre enseignement ? Le paragraphe VIIIa) présente aussi beaucoup d'ambiguïté face à la dichotomie plan-espace. L'analyse de l'enseignement de la géométrie vectorielle nous conduit à la question suivante :

Comment doit se présenter la dichotomie plan-espace dans l'enseignement de la géométrie en deuxième cycle ?

Dans le Premier Cycle où la séparation entre le plan et l'espace est nette, la progression suivie pour l'enseignement de la géométrie de l'espace ne semble pas très bien déterminée.

Si nous comparons les programmes des années 1970, ceux des années 1977-1978 et les projets de la COPREM ou de l'Inspection Générale de 1985, nous notons d'importantes variations.

Comme le montre le BOEN (1968, 1971 a), la géométrie de l'espace est réservée par les programmes de 1970 aux classes de 6ème et 5ème. Puis, dans les années 1977-1978 (cf. BOEN (1977, 1978)) l'essentiel de cette géométrie est enseigné en Cinquième. En 1985, les projets de l'Inspection Générale répartissent cet enseignement tout au long du Premier Cycle. Ces changements successifs nous obligent à poser la question :

Quelle progression doit suivre la géométrie de l'espace dans le premier cycle ?

Les programmes de 1970 et de 1977-1978 parlent "d'objets géométriques et physiques", "d'observation", "de première étude concrète de l'espace". Cela amène les professeurs à dire que cette géométrie est peu de chose ; ils en viennent à n'accorder que peu de temps depuis 1977 à cette géométrie de Cinquième, en laissant de côté tout l'aspect matériel qui s'y rattache. Cela provient du fait que l'enseignement des mathématiques n'a pas une position nette en ce qui concerne l'aspect expérimental de la géométrie dans l'espace. La question que nous nous posons est :

Dans le premier cycle, quelle place doit-on accorder en géométrie de l'espace à l'expérimentation faisant appel à des maquettes, à des dessins ?

Il s'agit là d'une question particulièrement importante. Nous avons obtenu des éléments de réponse à cette question à l'occasion de nos recherches sur la géométrie plane. (cf. [1], [2] et [3]).

La place donnée à l'expérimentation a des conséquences d'une part sur les démarches de pensée qu'on veut développer chez l'élève et d'autre part, sur la gestion du temps scolaire.

Avec les projets de 1985 apparaît pour la première fois dans le premier cycle, et cela dès la classe de Sixième, la "représentation en perspective" (cavalière). Ces projets semblent avoir résolu la question suivante :

Quel rôle joue la représentation plane et en particulier la perspective cavalière en géométrie de l'espace ?

C'est sur le dessin et la représentation que se centre notre réflexion. Nous développons les questions qui s'y rattachent dans les paragraphes 3 et 4.

Une étude même succincte des actuels livres de Cinquième nous montre que la notion de volume est l'axe principal de la géométrie dans l'espace dans le Premier Cycle. Les projets de 1985 semblent conserver cette priorité; c'est ainsi que le volume de différents solides est proposé pour chacune des quatre classes, d'où les questions suivantes :

Quelle place doit occuper la notion de volume dans la géométrie de l'espace de notre Premier Cycle ?

Comment interfèrent la représentation de l'espace et la notion de volume ?

2. Une prise de conscience

On peut être scandalisé par cette expérience des "Maths-modernes" de la décennie 70-80 qui a maltraité plusieurs millions d'élèves. Mais, comme elle a suscité une réflexion plus intense sur l'enseignement des mathématiques et qu'elle a accéléré la recherche en didactique, on peut toutefois y trouver un aspect positif. En particulier, une prise de conscience des difficultés propres à la géométrie de l'espace est maintenant explicite.

Lors de sa réunion du 2 Mars 1984 consacrée à la géométrie, la COPREM reconnaît que la géométrie de l'espace est négligée à tous les stades.

Le groupe de recherches coordonnées (GRECO) portant sur la didactique et l'acquisition des connaissances scientifiques créé par le CNRS en 1984 consacre un de ses quatre thèmes à l'espace comme objet d'étude en mathématique, en physique et comme support des représentations symboliques.

BERGER (1977 a, b, c, 1978 a, b, 1982) redonne quelques lettres de noblesse à la géométrie dans l'enseignement supérieur.

Plus près de nos classes, sur le terrain de la formation continue, divers documents de réflexion et d'action portant sur la géométrie voient le jour. Que ce soit en géométrie plane ou en géométrie de l'espace, divers fascicules dont ceux édités par les IREM de Bordeaux (1982), Lorraine (1983 a, b, c) ou encore ceux écrits par AMALBERTI et Coll. (1982), par BESSOT, CHABOULET, EBERHARD, VERJUS, BICAIX (1983), par BOURDAREL et GOETGHELUCK (1983), par CONEJERO, GABRIEL, GROS, VACHE (1984), édités respectivement par les IREM de Marseille, de Grenoble, de Paris-Nord et de Montpellier sont des exemples parmi d'autres. Ils donnent des racines irremplaçables à une recherche fondamentale sur la géométrie et plus particulièrement sur la géométrie de l'espace.

De nombreux colloques centrés sur la géométrie, attribuant à la géométrie de l'espace une place importante, prouvent l'urgence des problèmes. C'est le cas des colloques Inter-IREM de Clermont-Ferrand en Juin 1980, d'Orléans en Novembre 1980, de Caen en Juin 1981, de Bordeaux en Juin 1983, de St-Amand en Décembre 1983 et de Marseille en Juin 1984. C'est aussi le cas de rencontres internationales comme celles de Palenza en 1981, de Mons en 1982 et de Louvain-la-Neuve en 1983. Les compte-rendus de ces rencontres sont présentés par : l'IREM de Clermont-Ferrand (1981), l'IREM de Lille (1981), l'IREM de Caen (1981), l'IREM de Lille (1982), l'IREM de Marseille (1984), la CIEAEM (1981), la sous-commission belge de la CIEM (1982), le groupe d'enseignement mathématique de Louvain-la-Neuve (1984).

Différentes optiques sont envisagées pour résorber les difficultés. MARION et OVAERT (1980) nous proposent une analyse globale de l'enseignement de la géométrie au Lycée ; ils mettent l'accent sur une géométrie permettant la maîtrise des transformations, du linéaire, du fonctionnement du concept de groupe. GOUTHERON (1984) voit essentiellement dans la géométrie, l'apprentissage du raisonnement et le développement de l'esprit de recherche. Le groupe d'enseignement des mathématiques de Louvain-la-Neuve (1982) trouve dans la géométrie, un terrain idéal permettant de proposer à la classe une suite de situations problématiques ouvertes conduisant par paliers à la théorie mathématique. PEROL souhaite donner aux maquettes un rôle essentiel, conçoit du matériel à découper le polystyrène, publie les cahiers du Filicoupeur ; PEROL (1978, 1981 a, b, 1982 a, b, 1983, 1984 a, b), PEROL et DESSEUX (1983), l'IREM de Clermont (1983 a, b, 1984) réalisent des activités de géométrie de l'espace fondées sur l'usage de la maquette. Pour BKOUCHE et SOUFFLET (1983), l'objectif premier de l'enseignement de la géométrie est la géométrie c'est-à-dire l'étude des situations spatiales. GABORIAU (1984), OLIVIER et TEROUANNE (1984), LEHMANN (1985) redonnent vigueur à des activités géométriques dans l'Université.

La diversité et la richesse de ces points de vue, parfois contradictoires, n'empêchent pas que se dégage une question essentielle liée à la géométrie de l'espace, que nous trouvons posée dans le Bulletin Inter-IREM N° 23 consacré à l'enseignement de la géométrie. En effet, BESSOT (1983) s'interroge dans ce bulletin sur le statut et le rôle des figures en géométrie et plus particulièrement en géométrie de l'espace. La même réflexion apparaît lors de la réunion du 2 Mars 1984 de la COPREM : la statut du dessin, son rôle si l'on préfère, est à définir. VERGNAUD, BROUSSEAU, HULIN (1983) en présentant leur projet de GRECO écrivent : "... la conceptualisation de l'espace est en elle-même un objet d'étude intéressant pour la didactique. Les problèmes de la représentation des objets de R^3 dans R^2 forment à eux seuls un champ d'étude très important. Le statut du dessin est loin d'être connu et mérite d'être étudié en relation avec la conceptualisation des espaces euclidiens à 2 et 3 dimensions. C'est un problème central de l'enseignement de la géométrie et de la mécanique".

Nous voilà donc revenus aux deux principales questions :

Quel est le rôle du dessin en géométrie ?

Quel est le rôle de la représentation plane en géométrie de l'espace ?

Le paragraphe suivant, intitulé les règles de dessin, va examiner plus en détails ces deux questions.

3. Le dessin

Si nous feuilletons un quelconque livre scolaire, nous trouvons fréquemment des figures telles que celle représentée ci-dessous (figure I).

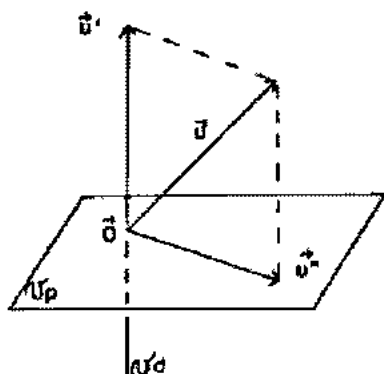


Figure I

Cette figure, extraite d'un livre récent de géométrie en 1ère S, est d'une lecture aisée pour un professeur de mathématique. En est-il de même pour un élève ?

Trouve-t-on dans ce livre des explications sur les significations différentes qu'ont des tracés en pointillés tout à fait identiques ? Non.

Trouve-t-on dans ce livre la moindre explication sur le rôle de certains pointillés ? Non.

D'une manière générale, les figures d'un livre utilisé pour l'enseignement des mathématiques, accompagnent le texte sans aucun commentaire technique. Comment prôner la rigueur en mathématique alors que la géométrie à trois dimensions s'appuie essentiellement sur ce qu'on appelle couramment "la vision de l'espace", notion on ne peut plus floue, éthérée, pour ne pas dire métaphysique ?

Puisque, de plus, les figures sont nombreuses dans un livre de géométrie, (on peut estimer qu'en moyenne on y rencontre une figure par page), nous devons nous poser une première question :

La non explication des règles régissant le tracé des figures a-t-elle une influence sur l'apprentissage de la géométrie de l'espace ?

De très bons auteurs n'hésitent pas à réaliser des dessins très techniques avec quelquefois, sur un même dessin, des règles de représentations contradictoires. C'est ainsi que HILBERT et COHN-VOSSANT (1952), dans un ouvrage aux figures particulièrement esthétiques, proposent des polyèdres réguliers, comme celui reproduit *figure II*, tracés à la fois selon les règles de la projection conique, réservées à l'épaisseur des arêtes et selon les règles de la projection cylindrique, réservées aux faces. BERGER et GOSTIAUX (1972) proposent la classique sphère, que nous reproduisons à la *figure III* et qui est tracée à la fois selon les règles de la projection oblique, réservées à l'équateur et selon les règles d'une projection orthogonale (ou d'une autre projection oblique), réservées aux méridiens.

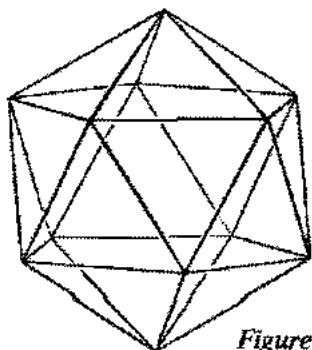


Figure II

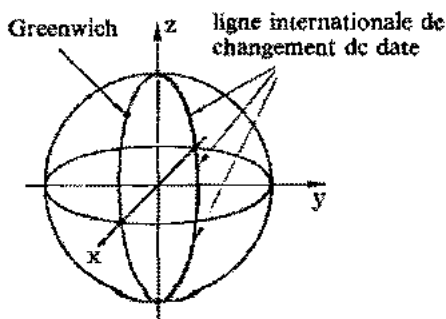


Figure III

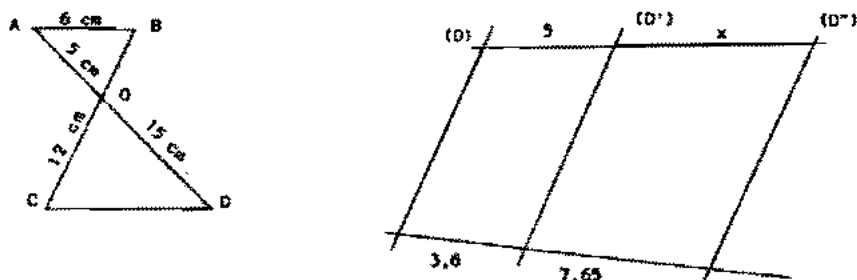
Mais la non explicitation des règles de dessin ne se restreint pas aux seules représentations de l'espace.

Examinons quelques sujets de CAP recueillis par VUIBERT (1982).

La figure IV ci-dessous reproduit deux dessins présentés dans deux sujets de CAP. Ces dessins ne respectent pas les règles usuelles et implicites régissant les tracés associés à la structure affine. Ces dessins accompagnent respectivement les textes :

“(AB) parallèle à (CD). Calculer OB et CD”.
 et “On donne la figure ci-dessous. Les droites (D), (D') et (D'') sont parallèles. Calculer x”.

Aucune explication n'est donc fournie à leur sujet.



Figures IV

La figure V ci-dessous reproduit deux autres dessins de deux autres sujets. Là, sans plus d'explication, on propose deux schémas qui respectent les règles usuelles et implicites régissant les tracés associés à la structure euclidienne.

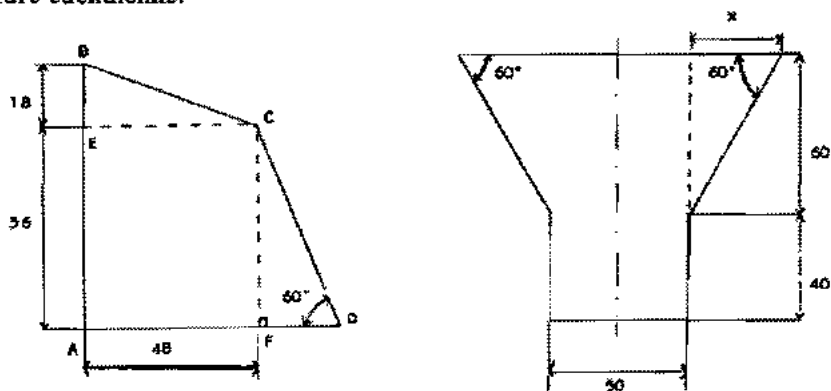


Figure V

Dans la *figure VI*, on peut se demander quelles sont les règles puisque les cercles sont tracés au compas et que les proportions ne sont pas conservées. Il s'agit peut-être de schémas euclidiens et non affines ?

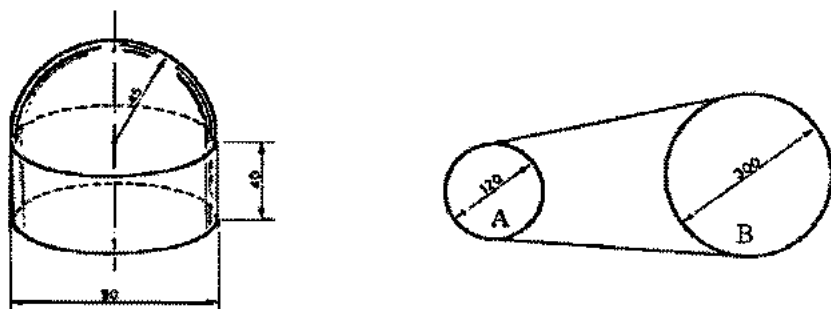


Figure VI

A côté de cela, on n'hésite pas à demander des solutions graphiques associées à des dessins dont l'échelle est simple et explicite ; c'est ainsi qu'au sujet de CAP associé à la *figure VII* s'ajoute la précision "1 mm 0,05 m".

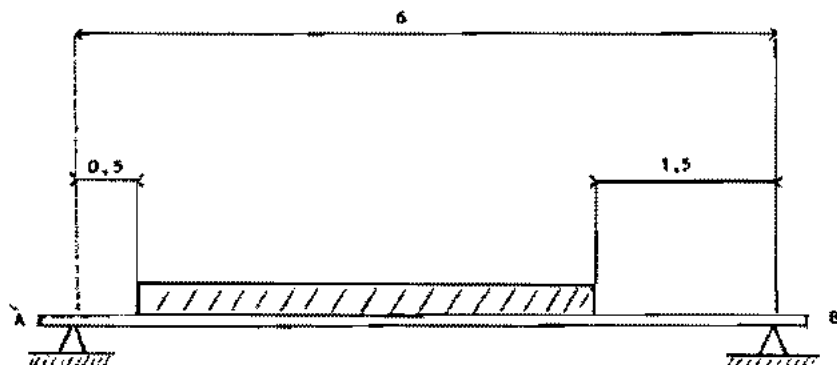


Figure VII

Ce qui semble caractériser les règles de dessin c'est qu'elles sont diverses, non explicites et assez souvent contradictoires. Nos plus grands penseurs y voient là une loi propre à la géométrie qui n'a pas été sans influence sur notre enseignement. POINCARÉ (1912) déclare "On dit souvent que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites. Ce n'est pas là une boutade, c'est une vérité qui mérite qu'on y réfléchisse. (Dans une figure mal faite), le dessinateur altère les proportions plus ou moins grossièrement, ses lignes droites ont des zigzags inquiétants, ses cercles présentent des bosses disgracieuses ; tout cela ne fait rien, cela ne troublera nullement le géomètre, cela ne l'empêchera pas de bien raisonner".

C'est une solution extrême. Celle qui résoud toutes les questions qu'on peut se poser au sujet du dessin. Elle réduit le statut du dessin à celui d'un schéma aux règles variables, non explicites et connues au mieux de son seul auteur. HILBERT (1899) a adopté une démarche plus subtile dans les fondements de la géométrie. Tout en faisant un traité axiomatique, donc de logique pure, il n'abandonne cependant pas les figures. Il parseme simplement son texte de figures anonymes. Il n'y fait, à quelques exceptions près, jamais allusion. Le dessin devient alors un fantôme apparent pour les uns, invisible pour les autres. On arrive vite ainsi à la solution radicale qui consiste à supprimer le dessin. Rappelons que durant la décennie 70-80, le dessin était très rarement utilisé en géométrie vectorielle dans nos lycées.

Tout cela nous conduit à poser une question : Devons-nous associer à une structure mathématique donnée des règles de dessin ? Si oui, lesquelles ?

Quelles sont notamment les règles de dessin associées usuellement aux quatre structures suivantes : la structure vectorielle ou affine réelle à deux dimensions, la structure vectorielle ou affine réelle à trois dimensions, la structure euclidienne à deux dimensions et la structure euclidienne à trois dimensions ?

De multiples petites interrogations découlent des questions énoncées ci-dessous.

Peut-on dessiner les éléments d'un espace vectoriel tantôt selon des traces ponctuelles, tantôt selon des petites flèches rectilignes ?

À la structure euclidienne plane, pouvons-nous associer des dessins respectant les règles usuelles de dessin associées à la structure affine réelle du plan et la règle suivante :

Il existe quatre points A, B, C, D du plan vérifiant $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ auxquels sont associées les quatre traces ponctuelles proposées par la figure VIII ci-dessous ?

Figure VIII

Pouvons-nous associer à la structure euclidienne à 3 dimensions des dessins respectant les règles de la perspective conique et la règle du parallélogramme ?

D'une manière générale, quelles sont les différentes familles de règles de dessin qu'on peut associer à chaque structure ? Quel est l'intérêt relatif de chacune de ces familles ? D'un point de vue mathématique ? D'un point de vue pédagogique ?

D'un point de vue mathématique par exemple, il nous semble que la dualité dessin-structure joue un rôle déterminant dans la démonstration de la non-contradiction logique de la géométrie de Lobatchevski telle que la présente EFIMOV (1981). Et même si son fondement logique "d'une rigueur irréprochable" ne repose que sur la dualité structure euclidienne — structure non euclidienne de Lobatchevski, c'est certainement parce que les "droites" sont dessinées au compas que nous avons là une démonstration "d'une simplicité étonnante".

Mais en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, une question préalable se pose :

Faut-il distinguer structure et dessin ? Selon quelle progression pédagogique ?

Cette question risque d'être essentielle pour la didactique car c'est peut être en y répondant que nous mettrons le mieux en évidence les processus d'acquisition de certains concepts géométriques.

Puisque nous travaillons dans le champ conceptuel de la géométrie euclidienne à trois dimensions, ce sont avant tout les figures de l'espace qui vont nous préoccuper. Mais déjà avec cette première expression "figure de l'espace", nous sommes en pleine ambiguïté. En effet, qu'entend-on par là ?

HADAMARD (1898) définit une figure comme "un ensemble quelconque de points, de lignes, de surfaces et de volumes". Ce mot a la même acceptation pour des auteurs comme ROUCHE et DE COMBEROUSSE (1866 a), LEBOSSE et HEMERY (1965), CUNDY et ROLLET (1951). Dans ces ouvrages, elle est définie au moyen de cette phrase laconique, puis les figures se succèdent à la queue leu leu sans autres explications vraiment sérieuses. HADAMARD (1901) ajoute toutefois, lorsqu'il est question de la surface indéfinie qu'est le plan :

“Afin de pouvoir la figurer sur le dessin, on n'en représente qu'une portion limitée, le plus souvent une portion rectangulaire : comme ce qui est fait dans les figures 233 et suivantes”.

Nous avons reproduit exactement sa figure 233 sous le nom de *figure IX*.

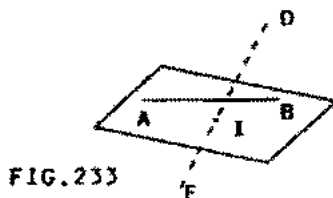


FIG. 233

Figure IX

ROUCHE et COMBEROUSSE (1866 b, 1867) précisent aussi lorsqu'il est question de cette surface illimitée qu'est un plan : “toutefois, pour la représenter, on est obligé de lui assigner des limites ; on représente un plan par une figure tracée dans ce plan, le plus souvent par un parallélogramme”.

On voit avec ce dernier auteur, et ceci dans l'édition de 1867, comme dans celle de 1900 que la figure est à la fois une portion de l'objet de l'espace (qui est ici un plan) et un dessin plan la représentant. Nous rencontrons là l'ambiguïté principale des figures de l'espace où signifiant et signifié ne sont pas distingués. Cette même confusion existait déjà chez CLAIRAUT (1741).

Regardons d'un peu plus près le point de vue de COMMEAU (1963) sur le rôle du dessin en géométrie. Pour lui, il n'y a pas d'ambiguïté entre figure et dessin lorsqu'il nous dit : “On a l'habitude de représenter par des dessins les figures de géométrie”. Pourtant, comme dans tous les livres de mathématiques, ce sont ses dessins qu'il appelle figures (de la Fig. 1 à la Fig. 375). Et de fait, l'usage courant veut qu'une figure soit toujours un dessin plan ; le petit Larousse nous rappelle qu'une figure est “un dessin servant à la représentation d'êtres mathématiques”.

A ce sujet encore, les hésitations de la COPREM mettent en évidence le fait que parler de figures en géométrie de l'espace ne paraît pas plus simple en 1985 que par le passé. En effet, dans son projet de Février 1985, la COPREM propose, entre autres, comme objectif : “être capable de représenter une figure de l'espace en perspective cavalière ou en projections orthogonales et se servir d'une telle représentation”. Le 15 Mars 1985, la COPREM propose une nouvelle version de son projet. Là, elle fait disparaître la phrase que nous venons de citer et du même coup les ambiguïtés qu'elle pourrait susciter, compte-tenu des explications que

nous avons données précédemment. Mais rien n'est résolu car la notion de représentation disparaît aussi de ce nouveau texte ; et le mot configuration, dont la signification est loin d'être établie, y apparaît six fois (on ne le rencontre qu'une fois dans le texte de Février 1985). On rencontre treize fois le mot configuration dans la mouture proposée par l'Inspection Générale et présentée par l'A.P.M.E.P. (1985). Les difficultés liées à la représentation de l'espace n'en sont que plus camouflées. Aussi, croyons-nous tout à fait d'actualité la question suivante :

Dans l'apprentissage de la géométrie de l'espace, comment doit se développer l'interaction entre l'objet de l'espace, maquette ou image mentale d'une part et le dessin représentant cet objet d'autre part ?

4. La représentation

Nous disposons avec le dessin technique de certaines représentations de l'espace normalisées. Les vues présentées par l'AFNOR (1978) constituent la principale représentation des objets dans le domaine du dessin technique. Les représentations dites "en perspectives" décrites par l'AFNOR (1953) mettent en œuvre deux sortes de projection : les projections axonométriques et les projections cavalières. "Ces perspectives gagnent du terrain en dessin de travaux publics mais leur utilisation dans ce domaine devrait être beaucoup plus généralisée qu'elle ne l'est encore actuellement" selon KIENERT et PELLETIER (1980).

Plusieurs raisons nous ont entraîné à donner à la projection cavalière, appelée encore perspective cavalière et que nous notons de façon abrégée: PC, une place privilégiée dans notre étude de la géométrie de l'espace. Tout d'abord, la quasi totalité des dessins représentant des objets de l'espace utilisent en mathématique la perspective cavalière. La PC prend une place de plus en plus importante dans les innovations en didactique comme le prouve les travaux de l'IREM de Lorraine (1983 a,b), de BOUDAREL et GOETGHELUCK (1983), COLMEZ (1984) et les dix problématiques de CARTRON et Coll. (1984), réflexions sur ce que pourrait être un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au collège. Des recherches fondamentales comme celles de CARON-PARGUE (1979) et nos propres pré-expérimentations en partie relatées dans les articles de FABRE (1982, 1984), PELOUZET (1984), BONAFE (1985) nous obligent à poser la question suivante :

La PC n'est-elle pas la représentation de l'espace la plus adaptée aux démarches de pensée des élèves du secondaire travaillant dans le champ conceptuel de la géométrie euclidienne de l'espace ?

Nous devons toutefois être assez prudent avec la PC dans le premier cycle. Ainsi l'ellipse qui y joue un rôle important est d'un usage difficile pour nos jeunes élèves, et le cylindre de révolution prévu par les programmes de Cinquième proposés par l'Inspection Générale en 1985, la sphère,

sa section par un plan, le cône de révolution, sa section par des plans parallèles à la base, prévues par la COPREM pour les classes de Quatrième et Troisième, posent des problèmes de représentation que les recherches expérimentales n'ont, semble-t-il, pas encore abordé.

Un quatrième type de représentation est la représentation au moyen d'une *épure* en géométrie descriptive. Pour son étude théorique, on peut utiliser l'ouvrage élémentaire de MAILLARD et MILLET (1958) ou un ouvrage un peu plus complet comme celui de ROUBAUDI (1916). L'éclairage épistémologique qu'en donne DEFORGE (1981) est particulièrement intéressant pour comprendre l'évolution de cette représentation.

Un cinquième type de représentation est la perspective vraie, encore appelée perspective centrale, ou conique que nous notons de façon abrégée PV. Une étude théorique de cette perspective ainsi que la PC est faite par ROSSIER (1946). C'est à Florence, au début du XV^e siècle, (Quattrocento) que les peintres et les architectes ont mis au point sa première théorisation déclare THUILLIER (1984); on peut se faire une idée de la valeur artistique de la PV en consultant VREDEMAN DE VRIES (1604-1606). Le support mathématique de la PV est constitué par la géométrie projective qui est présentée de façon très satisfaisante dans DELTHEIL et CAIRE (1951), ARTIN (1957), FRENKEL (1973), BERGER (1977 a, 1978 b), EFIMOV (1981). Sa richesse théorique et sa complexité technique n'empêchent pas d'utiliser la PV de façon élémentaire comme l'a montrée PAEZ SANCHEZ (1980) en introduisant le cadre en plexiglas. Notons que la PV est au centre des études réalisées par l'IREM de Caen dans ses "cahiers de la perspective"; on consultera à ce sujet l'IREM de Basse-Normandie (1981, 1982).

Un sixième type de représentation est la *projection côtée* associée à la géométrie côtée débouchant sur la topographie des surfaces; elle est présentée par ROUBAUDI (1916) ou par des ouvrages de notre enseignement secondaire datant au moins d'une trentaine d'années comme DESBATS (1948). D'autres représentations sont encore utilisées: la perspective curviligne présentée par BARRE et FLOCON (1968); ROSSIER (1946) en propose encore d'autres; la géographie nécessite l'élaboration des représentations planes des sphères qui sont étudiées entre autres par BERGER (1977 c) etc... Mais nous attribuons a priori dans le domaine de la didactique des mathématiques une moindre importance à ces représentations.

Nous avons distingué six représentations principales: les vues, les projections axonométriques, la perspective cavalière, l'épure, la perspective vraie, le projection côtée.

A leur propos, nous posons la question suivante:

Ces représentations sont-elles adaptées aux démarches de pensée des élèves du secondaire travaillant dans le champ conceptuel de la géométrie euclidienne de l'espace?

5. Les élèves

Les programmes, les livres, l'histoire de l'enseignement, les traditions enseignantes nous ont permis d'approcher un certain nombre de questions. Mais ce sont avant tout les élèves qui orientent notre problématique. Par l'observation de ces derniers, nous pouvons séparer les questions principales des questions secondaires. Plus encore, nous pouvons répondre à un certain nombre de questions.

C'est ainsi que nos expérimentations en géométrie nous ont imposé une conclusion indubitable : en géométrie, nos élèves ont une activité pratique très importante réservée principalement au dessin.

Nous avons aussi pu prendre conscience du rôle privilégié de la perspective cavalière.

C'est ainsi qu'en 1984 nous avons proposé à des élèves le problème suivant :

Une salle de classe a pour dimension 7 m de long, 5 m de large et 3 m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol. Une balle de revolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5 m au-dessus du sol. A quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?

Ce problème que nous intitule problème FIL ne nécessite pas l'usage de la P.C., il évite même toute allusion à l'idée de dessin.

L'analyse détaillée de la représentation de l'espace utilisée par nos élèves pour résoudre ce problème est présentée dans [5]. Examinons sommairement nos résultats.

Les élèves ayant fait appel à une perspective se répartissent selon le tableau X ci-dessous.

Nbre d'élèves	Elèves ayant réalisé :
43	Une perspective cavalière.
1	Une perspective centrale.
1	Une perspective axonométrique.
5	Une tentative de perspective cavalière.
6	Une tentative de perspective centrale.
3	Une vague ébauche de perspective.
2	Une perspective cavalière et une tentative de perspective centrale.
3	Une tentative de perspective cavalière et une tentative de perspective centrale.

Tableau X

Quarante-trois élèves ont utilisé la P.C.. C'est ainsi qu'un élève de 5ème ayant 12 ans et 7 mois et un élève de 1ère ayant 18 ans et 11 mois ont réalisé respectivement les P.C. reproduites par les figures XI et XII.

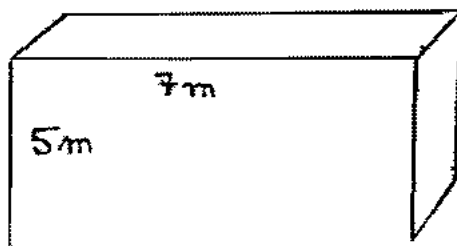


Figure XI : 5-12 ; 07



Figure XII : 1-18 ; 11

Le tableau XIII ci-après donne pour chaque classe le nombre d'élèves ayant utilisé une P.C.

Classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2nde	1ère	Term.	Tot.
Nbre d'élèves	3	5	7	5	7	11	5	43
% approx. par classe	35 %	50 %	70 %	50 %	70 %	90 %	60 %	60 %

Tableau XIII

Nous constatons que l'usage de la P.C. est assez constant tout au long de la scolarité.

Nous aboutissons ainsi à l'hypothèse suivante :

Pour résoudre un problème de géométrie euclidienne de l'espace à trois dimensions, l'élève a besoin d'une représentation de l'espace constituée par un dessin dans lequel les trois directions principales longueur, largeur, hauteur sont distinctes ; il a besoin d'une perspective. La perspective cavalière est la représentation la plus satisfaisante pour lui.

Je voudrais ajouter quelques éclaircissements concernant cette notion d'hypothèse.

Le but principal de notre travail est de dégager des hypothèses. Nous entendons par hypothèse une affirmation de quelques lignes concernant l'enseignement des mathématiques qui est confirmée indubitablement par une de nos expériences. Cette hypothèse est soumise à l'ensemble des chercheurs en didactique afin que d'autres expérimentations indépendantes des nôtres, la confirment, la contredisent, l'affirment ou la nuancent. Elle est aussi proposée à l'ensemble des enseignants en activité afin que par une simple lecture, ils prennent position par rapport à ce texte.

Afin de bien insister sur le rôle déterminant de l'observation des élèves, je voudrais montrer par un dernier exemple, à quel point nous connaissons mal leur difficultés même si elles sont spectaculaires. C'est ainsi que pour résoudre le problème FIL, un élève sur cinq n'arrive pas à coordonner entre-elles une vue de-dessus et une vue de profil. Il réalise les dessins que les six figures suivantes reproduisent, ou d'autres dessins analogues.

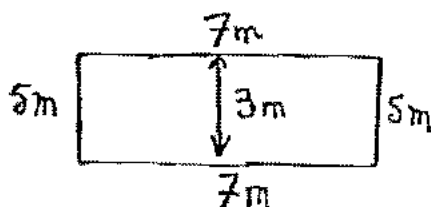


Figure XV : 4-13 ; 08

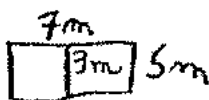


Figure XIV : 6-12 ; 05

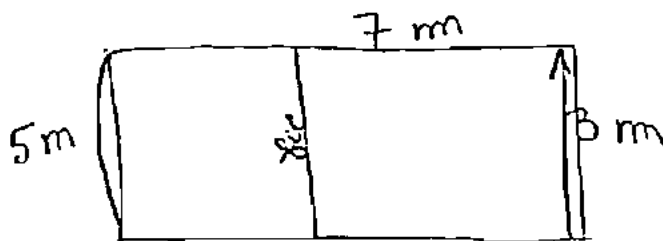


Figure XVI : 3-17 ; 03

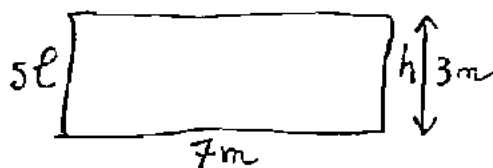


Figure XVII : 1-16 ; 08

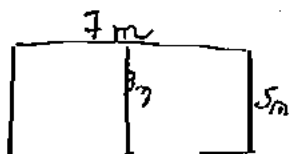


Figure XVIII : 1-18 ; 03

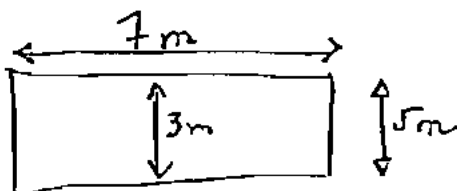


Figure XIX : 0-18 ; 07

Les points que nous avons soulevés sont loin d'épuiser les questions posées à l'enseignement de la géométrie de l'espace. C'est ainsi, par exemple, que nous n'avons pas abordé les transformations dont nous parlons dans [4]. Nous avons surtout voulu dégager deux affirmations qui nous paraissent essentielles :

Le dessin joue en géométrie le principal rôle dans la démarche de pensée de nos élèves.

La perspective cavalière est un outil prioritaire en géométrie de l'espace pour les démarches de pensée de nos élèves.

Nous soumettons ces deux affirmations à la critique des lecteurs du Bulletin.

Bibliographie

- AFNOR 1953 - *Dessins techniques pour industries mécaniques, électriques et connexes. Représentations dites : "en perspective"*, NF : E 04-108. Février 1953 édité par l'Association Française de Normalisation (AFNOR) Tour Europe Cédex 7 - 92080 Paris la Défense.
- AFNOR 1978 - *Dessins techniques - Principes généraux - Principes de représentation NF : E 04-520*. Septembre 1978 édité par l'Association Française de Normalisation (AFNOR).
- AMALBERTI R., ARNAL J.-P., BENIAMINO J.C., CLOU J.-P., MARION J., OVAERT JL., PROUDHON D., VERNET J.M. 1982 - *Les problèmes de recherche de configurations astreintes à des conditions extrémales de mesures*. Publications du Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie (G.R.E.G.) de l'IREM de Marseille.
- A.P.M.E.P. 1985 - Projets de 1°S et E. Propositions de l'Inspection Générale *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* N° 349 (pages 560 à 575).
- ARTIN E. 1957 - *Géométrie Algèbre* New-York - Interscience Publishers - Traduction française : *Algèbre géométrique* - Paris, Gauthier-Villars 1962.
- [1] AUDIBERT G. 1982a - *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Vol. 1 et 2*, IREM-USTL, Montpellier, nouvelle édition Brochure A.P.M.E.P. N° 56 (831 pages) 1984.
- [2] AUDIBERT G. 1982b - *Géométrie euclidienne plane dans l'enseignement secondaire français*. Actes du colloque international sur l'enseignement de la géométrie. Sous commission belge de la CIEM, Mons 31 Août-2 Septembre 1982 ; édité par G. NOËL, Université d'état de Mons, Belgique (pages 225 à 239). Nouvelle édition dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. 1985 N° 349 (pages 349 à 353).
- [4] AUDIBERT G. 1985 a - *Une problématique en géométrie de l'espace*. IREM-USTL, Montpellier.
- [5] AUDIBERT G. 1985 b - *Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL*, IREM-USTL, Montpellier.
- BARRE A., FLOCON A. 1968 - *La perspective curviligne* - Flammarion, Paris.
- BERGER M. 1977 a - *Géométrie et action de groupes, espaces affines et projectifs*, Cédic/Fernand Nathan - Paris.
- BERGER M. 1977 b - *Géométrie 2/ Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères* - Cédic/Fernand Nathan - Paris.

- BERGER M. 1977 c - *Géométrie 5/ La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères* - Cedic/Fernand Nathan - Paris.
- BERGER M. 1978 a - *Géométrie 3/ Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes* - Cedic/Fernand Nathan - Paris.
- BERGER M. 1978 b - *Géométrie 4/Formes quadratiques, quadratiques et coniques* - Cedic/Fernand Nathan - Paris.
- BERGER M., BERRY J.P., PANSU P., SAINT-RAYMOND X. 1982 - *Problèmes de géométrie commentés et rédigés* - Cedic/Fernand Nathan, Paris.
- BERGER M., GOSTIAUX B. 1972 - *Géométrie différentielle, maîtrise de mathématiques*, Armand Colin, Paris.
- BESSOT A., CHABROULET M.T., EBERHARD M., VERJUS M., BICAIS A. 1983 - *Introduction à la géométrie dans l'espace. Activités pour la 5ème*. Edité par l'IREM de Grenoble.
- BESSOT D. 1983 - *Problèmes de représentation de l'espace*. Dans : *Bulletin Inter-IREM N° 23, Enseignement de la géométrie*, édité par l'IREM de Lyon, pages 33 à 39.
- BKOUICHE R., SOUFFLET M. 1983 - *Axiomatique, formalisme et théorie*. Dans *Bulletin Inter-IREM N° 23, Enseignement de la géométrie*, édité par l'IREM de Lyon, pages 3 à 24.
- B.O.E.N. 1968 - *Arrêté du 29 juillet 1968 : programme de mathématique du cycle d'observation*, B.O.E.N. N° 38 du 31 octobre 1968, pages 2875 à 2878.
- B.O.E.N. 1970 - *Arrêté du 19 mars 1970 - Horaires et programmes de mathématiques de la classe de 1^{re} du second cycle long conduisant au baccalauréat* - B.O.E.N. N° 17 du 23 juillet 1970, pages 1401 à 1414.
- B.O.E.N. 1971a - *Arrêté du 22 juillet 1971 : programmes de mathématiques pour les classes de 4^e et 3^e* - B.O.E.N. N° 30 du 29 juillet 1971, pages 1872 à 1878.
- B.O.E.N. 1971c - *Arrêté du 14 mai 1971 : programme de mathématiques pour les classes de Terminales ABCDE* - B.O.E.N. N° 25 du 24 juin 1971, pages 1588 à 1616.
- B.O.E.N. 1971d - *Arrêté du 26 juillet 1971 : commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Terminales ABCDE* - B.O.E.N. N° 30 du 29 juillet 1971, pages 1879 à 1932.
- B.O.E.N. 1971e - *Instructions N° 71-17 du 14 janvier 1971 : commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de 1^{re} (arrêté du 19 mars 1970)* - B.O.E.N. N° 4 du 28 janvier 1971, pages 258 à 294.

- B.O.E.N. 1973 - *Arrêté du 30 mai 1973 : programmes de mathématiques dans les classes de Secondes AC et T conduisant au baccalauréat de l'enseignement du second degré* - B.O.E.N. N° 25 du 21 juin 1973, pages 2001 à 2006.
- B.O.E.N. 1977 - *Arrêté du 17 mars 1977 : programmes de mathématiques des classes de 6^e et 5^e des collèges* - B.O.E.N. N° 22 bis du 9 juin 1977, pages 764 à 765.
- B.O.E.N. 1978 - *Arrêté du 16 novembre 1978 : programme de mathématiques des classes de 4^e et 3^e des collèges* - B.O.E.N. N° Spécial 1 du 14 décembre 1978, pages 75 à 78.
- B.O.E.N. 1981 - *Décret du 26 janvier 1981 : programme de mathématiques de la classe de Seconde* - B.O.E.N. N° 1 Spécial du 5 mars 1981, pages 59 à 68.
- B.O.E.N. 1982 - *Arrêté du 9 mars 1982 : programme de mathématiques des classes de 1^{re} et Terminale* - B.O.E.N. N° Spécial 3 du 22 avril 1982, pages 33 à 63.
- BONAFE F. 1985 - *La genèse du problème SEC* - Edition IREM-USTL, Montpellier.
- BOURDAREL J., GOETGHELUCK P. 1983 - *Géométrie dans l'espace, le cube*. IREM, Paris-Nord.
- CARON-PARGUE J. 1979 - *Etude sur les représentations du cube chez des enfants de 3 à 11 ans. La représentation et le codage des propriétés spatiales* - Thèse de 3^{ème} cycle, Université Paris V.
- CARTRON H., ANSAS C., BARDOULAT J.P., BAREIL H., DUVERT L., GRAS R., ORHAN J.P., PEROL CH. 1984 - Spécial collège - *Réflexions sur ce que pourrait être un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au collège* - Supplément N° 1 au Bulletin N° 345 de l'A.P.M.E.P.
- [3] CHEVALIER A. 1984 - *Le problème QAT : symétrie, vérification, algorithme de construction, la pratique de l'élève*. Edition IREM-USTL, Montpellier.
- C.I.E.A.E.M. 1981 - *Processus de géométrisation et de visualisation, compte rendu de la XXXIII^{ème} Rencontre Internationale*, organisée par la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques du 2 au 9 août 1981 à Palanza - Edité par Michèle PELLEREY.
- CLAIRAUT A.C. 1741 - *Eléments de géométrie*, Volumes I et II, Gauthiers-Villars, 1920, Paris.

- COLMEZ F. 1984 - *La représentation plane, en perspective cavalière, les objets de l'espace ; un problème de géométrie. Essai d'ingénierie didactique en classe de 1ère S.* Actes du Colloque Inter-IREM, géométrie-Journée SMF Marseille, 1-2 Juin 1984, publication de l'IREM de Marseille.
- COMMEAU J. 1963 - *Géométrie-Mathématiques élémentaires.* Masson et Cie, Paris.
- CONEJERO M.T., GABRIEL P., GROS C., VACHE Y. 1984 - *6 thèmes de géométrie 4ème-3ème,* publication IREM-USTL, Montpellier.
- CUNDY HM., ROLLETT A. 1951 - *Mathematical Model* - London - Oxford, University Press, Traduction française : *Modèles mathématiques,* Cedic 1978, Paris.
- DEFORGE Y. 1981 - *Le graphisme technique, son histoire, son enseignement.* Seyssel, éditions du champ vallon.
- DELTHEIL R., CAIRE D. 1951 - *Compléments de géométrie, classes de préparation aux grandes écoles, concours de l'enseignement* - J.B. Baillièrre et Fils Editeurs, Paris.
- DESBATS J. 1948 - *Géométrie descriptive et géométrie cotée. Classe de mathématiques élémentaires* - Magnard, Paris.
- EFIMOV N. 1981 - *Géométrie supérieure* - Moscou, édition MIR.
- FABRE C. 1982 - *Perspective cavalière* - Bulletin de la Régionale de l'A.P.M.E.P. de Montpellier N° 1 Juin 1982 (pages 19 à 33), nouvelle publication *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie Journée SMF Marseille* 1-2 juin 1984, publication de l'IREM de Marseille.
- FABRE C. 1985 - *Mettons les pieds dans... l'espace* - Edition IREM-USTL, place E. Bataillon - Montpellier.
- FRENKEL J. 1973 - *Géométrie pour l'élève-professeur* - Hermann, Paris.
- GABORIAU J.P. 1984 - *L'observation d'élèves en situation de résolution de problèmes de géométrie : une expérience conduite avec des étudiants - La géométrie sur le terrain des élèves. Actes du colloque Inter-IREM de géométrie de Louvain-la-Neuve, mai 1983* - Edité par le groupe d'enseignement des mathématiques de Louvain-la-Neuve.
- GOUTHERON A. 1984 - *Sur l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée - Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, Journées SMF de Marseille 1-2 juin 1984* - Publication IREM de Marseille.
- Groupe d'Enseignement de Mathématiques de Louvain-la-Neuve 1982 - *L'archipel des isométries, essai de redécouverte* - GEM 2 Chemin du Cyclotron B - 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique.

- Groupe d'Enseignement de Mathématiques de Louvain-la-Neuve 1984 - *La géométrie sur le terrain des élèves. Actes du Colloque Inter-IREM de géométrie de Louvain-la-Neuve, mai 1983* - Édité par le Groupe d'Enseignement des Mathématiques de Louvain-la-Neuve.
- HADAMARD J. 1898 - *Leçons de géométrie élémentaire, tome 1* - Armand Colin, Paris, 9^e édition 1925.
- HADAMARD J. 1901 - *Leçons de géométrie élémentaire, tome 2* - Armand Colin, Paris, 8^e édition 1949.
- HILBERT D. 1899 - *Grundlagen der geometrie* - traduction française : *les fondements de la géométrie* - Dunod, Paris 1971.
- HILBERT D., COHN VOSSEN S. 1952 - *Geometry and the imagination* - Chelsea Publishing Company, New-York.
- IREM BASSE-NORMANDIE 1981 - *Les cahiers de la perspective, point de vue n° 1* - IREM-IUT Caen (75 pages).
- IREM BASSE-NORMANDIE 1982 - *Les cahiers de la perspective, point de vue n° 2* - IREM-IUT Caen (217 pages).
- IREM BORDEAUX 1982 - *Géométrie dans l'espace. Activités de constructions géométriques effectives* - édité par l'IREM de Bordeaux.
- IREM CAEN 1981 - Journées sur "*la géométrie dans l'espace*" 22 et 23 mai 1981, Ecole Normale CAEN, publication de l'IREM de Caen.
- IREM CLERMONT-FERRAND 1981 - Compte rendu des journées de Clermont-Ferrand sur *l'enseignement de la géométrie de l'espace*, 16 et 17 mai 1980 - édité par l'IREM de Clermont-Ferrand.
- IREM CLERMONT-FERRAND 1983a - *Les cahiers du filicoupeur n° 0, Mai 1983* - Université Clermont II IREM.
- IREM CLERMONT-FERRAND 1983b - *Les cahiers du filicoupeur n° 1, Octobre 1984* - Université Clermont II IREM.
- IREM CLERMONT-FERRAND 1984 - *Les cahiers du filicoupeur n° 2, Avril 1984* - Université Clermont II IREM.
- IREM LILLE 1981 - Compte rendu des journées Inter-IREM de Géométrie d'Orléans, 21 et 22 novembre 1980, édité par l'IREM de Lille.
- IREM LILLE 1982 - Colloque Inter-IREM sur la seconde indifférenciée, 17 et 18 décembre 1982 à Saint-Amand-les-Eaux, édité par l'IREM de Lille.
- IREM LORRAINE 1983a - *6^e géométrie, livre du professeur avec les fiches élèves* - Publication IREM de Lorraine, Université de Nancy I.
- IREM LORRAINE 1983b - *Dessiner l'espace - 60 exercices pour les élèves de Seconde*, publication de l'IREM de Lorraine, Université de Nancy I.

- IREM LORRAINE 1983c - *Géométrie dans l'espace en classe de seconde (fascicule du maître)* - Edité par l'IREM, Université de Nancy I.
- IREM MARSEILLE 1984 - *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, Journées SMF de Marseille - 1 et 2 juin 1984*, publication de l'IREM de Marseille.
- KIENERT G., PELLETIER J. 1966 - *Dessin technique de travaux publics et de bâtiment* - Eyrolles 8^e édition, 1980, Paris.
- LEBOSSÉ C., HEMERY C. 1961 - *Géométrie 2^{de} C* - Fernand Nathan, Paris.
- LEBOSSÉ C., HEMERY C. 1965 - *Géométrie classe de Mathématiques* - Fernand Nathan, Paris.
- LEGENDRE A.M. 1851 - *Eléments de géométrie* - 15^e édition 1851, Firmin Didot Frères, Paris.
- LEHMANN D. 1985 - Enseignement de la géométrie à l'université (ou l'enfant de l'eau du bain) - *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* n° 347 - Février 1985, pages 11 à 20.
- MAILLARD R., MILLET A. 1958 - *Géométrie descriptive Première et Mathématique technique* - Hachette, Paris.
- MARION J., OVAERT J.L. 1980 - *Sur l'enseignement de la géométrie au lycée* - publication du groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie de l'IREM d'Aix-Marseille, nouvelle publication dans le *compte rendu des journées Inter-IREM de géométrie d'Orléans, 21 et 22 novembre 1980* - édité par l'IREM de Lille, pages 1 à 20.
- OLIVIER J.P., TEROUANNE E. 1984 - Représentations impossibles d'objets de l'espace - *La géométrie sur les terrains des élèves. Actes du colloque Inter-IREM de géométrie de Louvain-la-Neuve Mai 1983* - édité par Groupe d'Enseignement des Mathématiques de Louvain-la-Neuve, pages 63 à 69.
- PAEZ-SANCHEZ L. 1980 - *La représentation graphique de l'espace chez l'enfant et chez l'adulte peu scolarisé* - Thèse de 3^e cycle - Université de Paris VII - Publication IREM de Paris-Sud.
- PELOUZET B. 1984 - Phases pré-expérimentales d'une recherche sur la géométrie de l'espace - *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, Journées SMF - Marseille 1-2 juin 1984* - Publication de l'IREM de Marseille.
- PEROL CH. 1978 - Le fil à couper le beurre, dans publication de l'A.P.M.E.P. n° 22 - *Géométrie au premier cycle Tome II* - Paris A.P.M.E.P., pages 45 à 49.
- PEROL CH. 1981a - L'espace en 3^e, dans publication de l'A.P.M.E.P. n° 38 - *Activités mathématiques en 4^e, 3^e tome II* - Paris A.P.M.E.P., pages 33 à 38.

- PEROL CH. 1981b - Une section du cube, dans publication A.P.M.E.P. n° 43 - *Mathématique active en Seconde*, pages 185 à 192.
- PEROL CH. 1982a - Géométrie dans l'espace et architecture, dans BAREIL H., ZEHREN C. - *Le livre du professeur mathématiques en 5^e* - Hachette, Paris, pages 25 à 36.
- PEROL CH. 1982b - Le fil à couper le beurre - *Actes du colloque international sur l'enseignement de la géométrie* - Sous-commission belge de la CIEM Mons 31 août - 2 septembre 1982, édité par G. NOEL, Université d'état de Mons, pages 333 à 335.
- PEROL CH. 1983 - Solides en polystyrène, dans publication de l'A.P.M.E.P. n° 50 - *Du matériel pour les mathématiques (Journées de Poitiers)*, page 4.
- PEROL CH. 1984a - Le fil coupeur et la géométrie de l'espace - *Actes de la XXXIV^e rencontre de la CIEAEM : Moyens et médias dans l'enseignement des mathématiques, du 31 juillet au 6 août 1982* - Imprimé par UER Sciences, Université d'Orléans, pages 160 à 163.
- PEROL CH. 1984b - Etude de quelques passages d'Euclide à Pacioli - *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, Journées SMF de Marseille, 1 et 2 juin 1984* - Publication IREM de Marseille, pages VIII 1 à VIII 9.
- PEROL CH., DESSEUX J.F. 1983 - Deux thèmes de géométrie dans un groupe de formation d'enseignants dans *Bulletin Inter-IREM n° 23, Enseignement de la géométrie* - Edité par l'IREM de Lyon.
- POINCARÉ H. 1912 - Pourquoi l'espace à trois dimensions ? *Revue de métaphysique et de morale* - 20^e année, n° 4 juillet 1912. Réédité dans *Dernières Pensées*, nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, 1963.
- ROUBAUDI C. 1916 - *Traité de géométrie descriptive* - Masson, Paris.
- ROSSIER P. 1946 - *Perspective* - Neuchâtel, Edition du Griffon.
- ROUCHE E., DE COMBEROUSSE CH. 1866a - *Traité de géométrie, Première partie : géométrie plane* - 7^e édition 1900 - Gauthier-Villars, Paris.
- ROUCHE E., DE COMBEROUSSE CH. 1866b - *Traité de géométrie - Deuxième partie : géométrie dans l'espace* - 7^e édition 1900 - Gauthier-Villars, Paris.
- Sous-Commission belge de la C.I.E.M. 1982 - *Colloque International sur l'enseignement de la géométrie* - Mons 31 août - 2 septembre, édité par G. NOEL, Université d'état de Mons.
- THUILLIER P. 1984 - Espace et perspective au quattrocento - *La recherche n° 160* - Novembre 1984, pages 1384 à 1398.

Bulletin de l'APMEP n°355 - Septembre 1986

- VERGNAUD G., BROUSSEAU G., HULIN M. 1983 -** *Projet de GRECO : didactique et acquisition des connaissances scientifiques - diffusé par VERGNAUD G., 54 bd Raspail 75270 Cedex 06.*
- VREDEMAN de VRIES J. 1604-1606 -** *Perspective - nouvelle édition, Paris René Baudonin, 10 rue de Nestlé.*
- VUIBERT 1982 -** *Annales des CAP Industriels, mathématiques et français - Editions Vuibert.*