Bulletin de l'APMEP n°355 - Septembre 1986

quelques réflexions et quelques propositions à propos de l'avant-projet de programme de géométrie des classes terminales C et E

par Jean Marion,
IREM de Marseille

Exposé des motifs du présent travail

Dans l'avant-projet de programme de mathématiques des classes terminales C et E élaboré et communiqué en septembre 1985 à un certain nombre de personnes pour être "soumis à une large discussion", la partie de ce texte consacrée à la géométrie est caractérisée notamment par l'absence d'objectifs assignés à son enseignement, par des contenus mal organisés et insuffisamment explicités, et par des commentaires inconsistants.

Ce n'est pas un phénomène nouveau : depuis des décennies, dans les programmes de mathématiques qui se sont succédés dans les classes de lycée, le caractère bâclé de la partie consacrée à la géométrie apparaît avec une rare évidence et une redoutable constance.

J'ai déjà eu l'occasion d'écrire (cf :[5,6]) que l'élaboration de programmes pertinents avec des objectifs légitimés passe par une négociation avec les pratiques sociales et professionnelles de la géométrie. Le présent travail a pour but de préciser cette thèse, et, en conformité avec elle, d'expliciter un ensemble cohérent d'objectifs que l'on devrait assigner à l'enseignement de la géométrie dans les classes terminales C et E, puis de proposer un programme *prenant en compte* ces objectifs.

I — Les 3 facteurs déterminants

L'enseignement de la géométrie dans les sections scientifiques du lycée, et notamment dans les classes terminales C et E se justifie et s'organise à partir de 3 facteurs déterminants :

— le public auquel il s'adresse,
— les types fondamentaux d'interventions de la géométrie dans la formation culturelle et scientifique,
— les modes principaux d'intervention de la géométrie dans les pratiques professionnelles et sociales actuelles.

C'est de l'analyse de ces facteurs, et des conclusions auxquelles elle conduit, que doit en particulier découler l'ensemble des objectifs à assigner à cet enseignement. Il convient ensuite, et de manière impérative, de les expliciter clairement, en particulier aux enseignants chargés de celui-ci.

I-1. Le public concerné.

C'est celui qui constituera l'essentiel des cadres scientifiques et techniques de demain, qui aura moins de 35 ans en l'an 2000.

a) Pour ce public, et pour l'intérêt de la nation, il convient de proposer un enseignement de la géométrie qui soit pertinent du point de vue de la formation scientifique, et qui intègre les modes d'intervention de la géométrie dans les pratiques professionnelles, notamment au niveau des méthodes et des points de vue nouveaux que ces pratiques ont développés.

b) Les données culturelles, sociales et économiques de la société dans laquelle nous sommes immergés ont notamment pour effet de rendre très rétive aux arguments d'autorité la population lycéenne actuelle (que ces arguments proviennent des parents, des enseignants, des institutions).

Cela signifie que ce public n'acceptera un enseignement et ne fournira les efforts nécessaires à l'acquisition des savoirs qu'il sous-tend, que s'il est légitimé par sa pertinence, tant du point de vue scientifique que du point de vue des pratiques sociales et professionnelles qui lui sont associées.

c) Au niveau de la nation, c'est une condition nécessaire qu'il convient de satisfaire si l'on veut éviter que la volonté de produire plus de bacheliers scientifiques ne se traduise dans les faits par une "médiocrisation" radicale de la formation scientifique au lycée (et par voie de conséquence, dans les cursus ultérieurs).

I-2. Les types d'interventions de la géométrie dans la formation scientifique

Ils légitiment le principe d'assurer un enseignement de géométrie. Une analyse détaillée de ces types d'interventions se retrouve dans certains travaux ([4,7]).

a) Dans la formation scientifique d'un élève, la géométrie intervient sous trois aspects fondamentaux :

— comme une discipline spécifique dont l'objet est l'étude de situations, d'organisations, et de relations spatiales ;

— comme prestataire de services variés pour d'autres secteurs des mathématiques et pour d'autres disciplines, auxquels elle apporte des modes de représentations, des concepts et des outils performants ;

— comme langage scientifique, et même comme support de métaphores efficaces (ce dernier aspect ne doit pas être sous-estimé, a fortiori méprisé).

b) Les interventions que nous venons de rappeler — et qu'on pourrait appeler les interventions académiques de la géométrie — ont gouverné le développement et l'épistémologie de la géométrie dans sa dynamique interne.

Mais ces interventions académiques ne sauraient rendre compte, à elles seules, du rôle actuel et à venir de la géométrie sous tous ses aspects, notamment de son rôle social ; ce rôle ne peut s'apprécier qu'à travers l'analyse des modalités d'interventions de la géométrie dans les pratiques professionnelles où elle intervient de manière importante.

I-3. Les modalités d'interventions de la géométrie dans les pratiques professionnelles, et les interactions qui en découlent.

Les interventions de la géométrie dans les pratiques professionnelles ont pris récemment un développement considérable et dans des directions nouvelles ; en retour ces interventions ont introduit de nouveaux points de vue, de nouvelles méthodes, et de nouveaux équilibres dans le champ géométrique. Cet extraordinaire développement est très étroitement lié à celui de l'informatique et de la micro-informatique et à leur utilisation en "Conception et Fabrication Assistée par Ordinateur" (C.F.A.O.) et en Robotique. L'étude approfondie de ces modalités d'interventions en C.F.A.O. et en Robotique, (et de la dialectique qui en résulte) reste à faire ; pour avoir une idée de ces interventions on peut consulter dans l'immédiat [2].

Au nombre des conceptions nouvelles issues de la C.A.O., dont l'intrusion en mathématiques, et plus particulièrement en géométrie, modifie les points de vue et introduit des données nouvelles qu'on ne peut plus ignorer, il convient de retenir notamment les conceptions actuelles de la *modélisation géométrique,* le développement de *méthodes interactives* pour gérer et exploiter cette modélisation, et l'organisation des paramètres et de la complexité pour mener à bien ces types d'activités.

a) La modélisation géométrique

"Un modèle géométrique d'un objet est une représentation informatique des formes et des dimensions de cet objet" ([2], chap. 3). Ce modèle géométrique peut être créé de différentes manières, résultant aussi bien de calculs que par exemple par utilisation interactive d'un terminal graphique d'ordinateur.

La fonction essentielle des modèles géométriques est de permettre à l'ordinateur, à partir des données qu'il contient :

- de faire des calculs de grandeurs géométriques ;
- d'engendrer des visualisations du modèle : (en perspective, vue de face,....) ;
- dans les visualisations, de savoir éliminer les parties cachées ;
- de faire des coupes ;
- d'évaluer des cotes, des tolérances ;
- de vérifier des interfaces lors d'assemblages d'objets à partir d'opérations booléennes ;
- de faire des mesures ;
- de donner des informations pertinentes sur la faisabilité de l'objet que l'on a modélisé.

Dans cette modélisation géométrique, l'outil de la "géométrie analytique", sans être unique, joue un rôle important. Sur ce sujet, il convient de noter que la phrase : "Le passage aux coordonnées doit tenir une place modeste" (cf : [1,5]) qui figure dans les nouveaux programmes de 1ère S, est épistémologiquement incongrue, et est révélatrice de la méconnaissance des pratiques professionnelles actuelles en géométrie.

En fait, les techniques calculatoires utilisées ont remis en grand honneur l'emploi des coordonnées homogènes : elles facilitent le câblage de certaines opérations, sont plus adaptées pour certains formalismes, évitent certains problèmes de dépassement de capacité, et rendent linéaires les opérations affines.

b) L'interactivité, en C.A.O. ou en robotique, recouvre un ensemble de méthodes caractérisées par la présence d'un opérateur qui, à un moment donné, au vu des résultats obtenus, va influer sur le programme en cours, en donnant de nouvelles informations initiales, le processus se poursuivant jusqu'à obtention d'un résultat acceptable.

Un exemple de démarche interactive extrêmement employé est celui des méthodes interactives d'approximation de courbes et de surfaces.

Traditionnellement, les outils mathématiques utilisés empruntent soit à l'interpolation soit à l'approximation uniforme des fonctions.

L'approximation interactive, développée en C.A.O., tout aussi performante, procède d'une autre manière. Pour l'approche d'une courbe par exemple, elle consiste à fixer une famille de $n+1$ fonctions positives f_i, $i=0, 1, \ldots, n$, de somme constante égale à 1, de choisir comme données initiales $n+1$ vecteurs $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$, de visualiser la courbe $t \mapsto \overrightarrow{OM_t} = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, \vec{V}_i$, et de modifier la donnée des vecteurs $\vec{V_i}$, jusqu'à obtention d'une courbe approximant de manière satisfaisante la courbe initialement donnée.

Les algorithmes les plus simples et de mise en œuvre aisée (conditions de leur intérêt) dans cette approche interactive sont fournis par la gestion interactive des courbes et surfaces de Bézier, ou encore les courbes et surfaces B - splines (cf : [3, 8]).

c) Gestion des paramètres, gestion de la complexité.

En outre l'une des démarches essentielles de la C.A.O. est de produire des créations de modèles géométriques devant satisfaire à des contraintes, et constitués à partir d'un stock donné d'objets géométriques de base (points, segments, courbes, prismes,...) et d'opérations sur ces objets (transformations géométriques, opérations booléennes).

Cela implique de savoir définir et gérer les systèmes de paramètres qui déterminent les objets et transformations de base et de gérer la complexité des opérations de construction ou de reconnaissance du modèle géométrique, de maîtriser des algorithmes prenant en compte les contraintes d'interactivité.

II - Objectifs de l'enseignement de la géométrie dans les classes terminales C et E.

II - 1 Remarques préliminaires

L'enseignement de la géométrie dans les sections scientifiques des lycées n'a pas pour fonction spécifique d'enseigner les techniques mathématiques de la C.A.O. Mais il convient d'insister sur le fait qu'un enseignement "scolarifié", coupé des pratiques (scientifiques réelles, professionnelles réelles) perd toute légitimité et devient socialement scandaleux, car alors sa seule fonction consiste à animer des tours byzantines pour autojustifier son existence, et dont les effets immédiats se traduisent par un gâchis des moyens, des critères artificiels voire pervers de sélection des élèves, par une inadaptation de la production du système éducatif au regard des besoins de la nation.

II - 2 Objectifs généraux

Ces objectifs doivent s'inscrire dans une double perspective.

a) Il s'agit d'abord d'implanter chez les élèves un aspect fondamental de la culture scientifique. A travers l'étude (nécessairement non exhaustive) de quelques problématiques centrales de la géométrie (incidence, représentations, constructions, lieux géométriques,...) et de quelques outils et concepts pertinents pour les attaquer, il s'agit de faire acquérir par les élèves, une certaine maîtrise de données conceptuelles et d'un langage propres à traiter de situations spatiales, et en particulier de développer leur capacité à mobiliser quelques systèmes mentaux de représentations de caractère géométrique dans des champs sémantiques variés de l'activité scientifique.

b) Il s'agit également de développer chez les élèves leur capacité à maîtriser et gérer un savoir géométrique de base, à être opératoires sur des objets (configurations et transformations) géométriques de base. Cette capacité opératoire passe par un certain nombre de connaissances :

— tout d'abord *la connaissance* (définitions, descriptions, gestion à l'aide de paramètres et de données pertinentes) *d'un certain nombre d'objets géométriques* (configurations et transformations usuelles) et de concepts, ainsi que des invariants fondamentaux principaux qui y sont attachés;

— *la pratique des trois champs sémantiques principaux de la géométrie* (domaine des configurations, domaine vectoriel, domaine numérique), des procédures qui permettent de passer de l'un à l'autre, et de l'analyse qui, pour un problème donné, conduit à choisir pour sa résolution, l'un ou l'autre de ces champs, en fonction de sa pertinence opératoire ;

— la reconnaissance des problématiques dont relève un problème donné, et l'aptitude à mobiliser des méthodes et des savoir-faire efficaces dans les problématiques concernées ;

— la connaissance (et l'aptitude, la mobilisation dans des situations variées), de quelques théorèmes essentiels de la géométrie élémentaire, autour desquels s'organisent les méthodes et les savoir-faire évoqués dans le point précédent ;

— l'aptitude à décrire et caractériser la structure du plan (ou de l'espace) déterminée par les configurations usuelles du plan (ou de l'espace) ;

— la connaissance de quelques opérations de base (projections orthogonales, translations, similitudes planes, rotations autour d'un axe, réflexions de l'espace, opérations booléennes) sur des objets de base, de leurs propriétés essentielles, de quelques exemples de leur utilisation dans la résolution de problèmes d'incidence, de recherche de lieux géométriques, de constructions géométriques, et de création d'objets complexes à partir de quelques objets donnés de base ;

— l'aptitude à élaborer et utiliser le graphisme géométrique dans sa triple fonction : activation de l'intuition géométrique, moyen de communication performant d'informations géométriques, moyen d'analyse et de synthèse de ces informations ;

— l'imprégnation à des méthodes algorithmiques, tant au niveau de problèmes de constructions géométriques (construction organisée point par point de courbes définies par des conditions géométriques), que de problèmes de création d'objets géométriques satisfaisant à certaines contraintes (assemblages d'objets géométriques simples, chaînes de primitives graphiques simples, image d'un objet par une chaîne de transformations simples), et aussi au niveau de problèmes de détermination de contours et de régions (critères d'intériorité, remplissage de contours, effacement de parties cachées), dans des situations spatiales simples.

III - Propositions de programme de géométrie pour les classes terminales C et E

Cette proposition est présentée avec la même forme et les même titres que ceux de l'avant projet de programme qui a motivé le présent travail. Nous laissons en outre le soin aux lecteurs de prévoir les travaux pratiques adaptés.

1) OUTIL VECTORIEL ET CONFIGURATIONS

a) Dans le plan et l'espace euclidiens

— Bases, repères ; caractérisation vectorielle d'un segment :

$$M \in [A, B]$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$
$$\Updownarrow$$

quel que soit le point Ω

$$\overrightarrow{\Omega M} = t\overrightarrow{\Omega A} + (1-t)\overrightarrow{\Omega B}$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1\ ;$$

caractérisations vectorielles d'une demi-droite, d'une droite d'un plan ; traduction analytique de ces caractérisations.

Caractérisation analytique du plan orthogonal à une droite donnée et passant par un point donné.

Cette partie ne nécessite pas l'introduction de concepts ou d'objets nouveaux ; il s'agit ici de faire une synthèse vectorielle et analytique de notions et d'activités acquises en 1ère S.

— Barycentres, convexité, régionnement : barycentre d'une famille finie de points pondérés, "associativité" de la barycentration et application à l'élaboration d'algorithmes de détermination d'isobarycentres de polygones et polyèdres variés, expression analytique du barycentre ; convexité, caractérisation barycentrique de l'enveloppe convexe d'une famille finie de points ; sur exemples simples, caractérisation analytique des régions du plan définies par la donnée d'une famille finie de droites,

La convexité est ici introduite seulement pour faciliter la détermination de l'intérieur de contours polygonaux et polyédraux. L'idée fondamentale est la suivante : étant donnés par leurs coordonnées les sommets A_j, $j = 1,\ldots,s$ d'un polygone (resp. polyèdre) convexe, d'où l'on tire les équations cartésiennes $f_j(x,y) = 0$ (resp. $f_j(x,y,z) = 0$), $j = 1,\ldots,n$, des droites qui contiennent les arêtes (resp. des plans qui contiennent les faces), si (a,b) (resp. : (a,b,c)) désigne les coordonnées de l'isobarycentre des points A_j, alors l'intérieur du polygone (resp. du polyèdre concerné) est l'ensemble des points (x,y) du plan (resp. (x,y,z)

et des régions de l'espace définies par la donnée d'une famille finie de plans, de l'intérieur d'un polygone ou d'un polyèdre convexe.

— Projections cylindriques du plan et de l'espace ; application linéaire associée ; invariants fondamentaux associés, notamment la conservation de la barycentration ; exemples d'utilisation des projections cylindriques pour déterminer des isobarycentres, pour représentrer dans un plan une configuration de l'espace.

de l'espace) tels que pour tout $j=1,\ldots,n$, $f_j(x,y)$ et $f_j(a,b)$ (resp. $f_j(x,y,z)$ et $f_j(a,b,c)$ ont même signe; on passe d'une région à une région contiguë (i.e ayant une cloison commune) par le changement de signe d'un et d'un seul des f_j.

Afin de préciser les niveaux d'approfondissement souhaités dans cette partie nous indiquons ici, à titres d'exemples, deux exercices qui rassemblent le maximum de difficultés que tout élève de Terminale C devrait savoir résoudre :

Exercice 1 : L'espace étant rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $D(4, -4, 1)$ et $M(-1, -5, 2)$; on note (Q) le plan du triangle (ABD).

a) Etablir qu'il existe un point C, unique, et dont on déterminera les coordonnées, tel le quadrilatère (ABCD) soit un rectangle.

b) Soit G l'isobarycentre du système (M, A, B, C, D), g sa projection orthogonale sur le plan (Q); le point g est-il intérieur au rectangle (ABCD)?

c) Le plan (Q) coupe-t-il le segment [O, M]?

Exercice 2 : Dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère les points $A(0{,}9;2{,}6)$, $B(4{,}1;-7{,}4)$ et $C(8;-2{,}1)$. Proposer un algorithme permettant de déterminer tous les points à coordonnées entières qui sont intérieurs au triangle (ABC). (On pourrait par exemple étudier l'intersection de la droite d_k d'équation $y=k$, $-7\leqslant k\leqslant 2$ avec les droites (AB) et (AC) ; déterminer les abscisses α_k et β_k des points d'intersection, puis déterminer les points à coordonnées entières du segment $[\alpha_k, \beta_k]$.

b) Dans l'espace euclidien orienté.

Espace euclidien orienté : bases orthonormales et repères orthonormaux directs ; produit vectoriel, notations $\vec{u} \times \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$; propriétés algébriques, expression analytique dans une base orthonormale directe ; $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$; $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = 0$; application à l'obtention de l'équation cartésienne d'un plan déterminé par 3 points.

Aucune théorie des formes trilinéaires alternées de $\mathbb{R}^3$ et de l'orientation ne figure au programme ; on s'appuiera sur les conventions physiques usuelles.

Les élèves doivent savoir utiliser le produit vectoriel pour calculer l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, et le produit mixte pour calculer le volume d'un parallélépipède ; le produit vectoriel sera également mobilisé avec efficacité pour déterminer un vecteur normal à un plan.
Les élèves doivent savoir que : $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| . \| \vec{v} \| . \sin (\vec{u}, \vec{v})$ | et que le produit vectoriel est aussi utile pour établir les équations cartésiennes d'une droite donnée par 2 points.

c) Dans le plan euclidien orienté

Produit mixte ou déterminant de deux vecteurs ; notation det $(\vec{u}, \vec{v})$; propriétés algébriques, expression analytique dans une base orthonormale directe.

Les élèves doivent savoir mobiliser l'expression analytique du déterminant, et sa forme
$\det (\vec{u}, \vec{v}) = \| \vec{u} \| . \| \vec{v} \| . \sin (\vec{u}, \vec{v})$ pour des calculs d'angles, pour traduire la colinéarité de 2 vecteurs, pour obtenir l'équation cartésienne d'une droite, pour calculer des aires.

d) Utilisation des nombres complexes en géométrie euclidienne plane

Affixe d'un point et d'un vecteur du plan euclidien ; les racines nièmes d'un nombre complexe sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés. Utilisation des complexes pour exprimer et mobiliser les transformations usuelles : homothéties, réflexions, translations, rotations, similitudes. Mais l'étude du groupe circulaire n'est pas au programme.

Il s'agit d'exploiter l'isomorphisme isométrique canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$, et la facilité d'emploi du langage des complexes notamment pour décrire et étudier les similitudes, pour exprimer des relations mettant en jeu la métrique linéaire et la métrique angulaire.

Ici encore, pour préciser les niveaux d'approfondissement souhaités voici, à titre d'exemples, deux exercices qui rassemblent le maximum de difficultés que tout élève de Terminale C devrait savoir résoudre :

Exercice 1 : Soient a, b, c les affixes des sommets A, B, C, d'un triangle.

a) Déterminer l'affixe du centre de gravité G du triangle (ABC);

b) Soit M d'affixe z; calculer l'affixe du vecteur $\vec{V}$ (M) égal à :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{MA}\|^2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{\|\overrightarrow{MB}\|^2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{\|\overrightarrow{MC}\|^2}\overrightarrow{MC}\ ;$$

en déduire l'ensemble des points M tels que $\vec{V}(M) = \vec{0}$

Exercice 2 : Soient A et B deux points distincts d'affixes respectifs a et b. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient :

$$\left|\frac{z-a}{a-b}\right| = 2\ ;\quad \arg\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{\pi}{6}\ (2\pi).$$

2) COURBES PLANES

a) Notions sur les courbes paramétriques du plan

Courbes définies en repère orthonormal par $t \longmapsto \vec{M}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$; vecteur dérivé, tangente; interprétation cinématique; informations données par le rapport $y'(t)/x'(t)$.
Problèmes de tracés de courbes : exemples de tracés obtenus à partir d'un algorithme de construction point par point; exemples de courbes de Bezier :

$$t \in [0,1] \rightarrow \vec{M}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \vec{A}_k$$

avec $n < 4$, les points A_k formant une configuration géométrique simple.

Les courbes ou arcs paramétrés apparaissent notamment à l'occasion de recherche de lieux géométriques; ainsi en est-il de l'ensemble des points équidistants d'un point et d'une configuration (que l'on choisira simple : droite, segment, cercle, parabole $y = x^2$); ces médiatrices généralisées ont en outre l'intérêt didactique d'être justiciable d'algorithmes simples de construction point par point fournissant en outre les tangentes; les coniques sont des cas particuliers de telles médiatrices.
Le vecteur dérivé est défini par ses composantes $x'(t)$, $y'(t)$; on se limitera au cas où le vecteur dérivé est non nul, ou, en tout cas, lorsque les limites des rapports $y'(t)/x'(t)$ sont facilement calculables :

b) Coniques

Définition par foyer et directrice (lignes de niveau de la fonction $M \mapsto MF/MM'$ et aussi médiatrices d'un point et d'une droite ou d'un cercle); équations réduites, centre, sommets, génération bifocale. La projection orthogonale d'un cercle est une ellipse. Les équations des coniques en coordonnées polaires, l'étude exhaustive des propriétés géométriques des coniques sont hors programme.

(exemple : $t \longmapsto \sin t\ \vec{i} + \cos 2t\ \vec{j}$: ici $y'/x' = 4 \sin t$; ce qui permet de facilement déterminer la tangente y compris quand le vecteur tangent s'annule en $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$).

L'étude des branches infinies et des points multiples est hors programme. L'étude de la courbe de Bezier associée à un polygone ou à une ligne polygonale simple se justifie à de nombreux titres par rapport aux objectifs généraux retenus ; on trouvera en annexe une information sur ce sujet ; en outre, comme cette annexe le montre, l'algorithme de visualisation sur écran de micro-ordinateur et sa programmation (en logo, en basic) sont aisés à élaborer et à mettre en œuvre.

3) TRANSFORMATIONS ET CONFIGURATIONS DANS LE PLAN

a) Isométries

Elles sont définies comme les bijections du plan euclidien qui laissent la distance invariante.

Toute isométrie du plan se décompose de manière unique sous la forme $f = t.u$ où u est une isométrie laissant fixe le point O, et t une translation.

La composée de deux isométries, et l'inverse d'une isométrie sont des isométries.

Etant donnée une isométrie u, d'application linéaire associée A, et étant donnée une base orthonormale directe $(\vec{i},\vec{j})$, ou bien $\det(A\vec{i}, A\vec{j}) = 1$, et l'isométrie u conserve les angles orientés, on dit alors que u est un déplacement, ou bien $\det(A\vec{i}, A\vec{j}) = -1$ et u change le signe de la mesure des angles orientés, on dit alors que u est un antidéplacement.

Il s'agit essentiellement de faire une synthèse des connaissances sur ce sujet en Première. Les élèves doivent connaître l'effet d'une isométrie sur le parallélisme, les barycentres, les angles, les aires; toute isométrie se décomposant en un produit de réflexions, il suffit de s'appuyer sur l'effet d'une réflexion sur ces covariants. Deux configurations isométriques simples étant données (2 segments, 2 triangles, 2 cercles, 2 rectangles) les élèves doivent savoir déterminer les isométries transformant l'une en l'autre, et exploiter leurs éléments. Soit F une fonction à valeurs numériques et définie sur le plan euclidien, invariante par une isométrie u, i.e. telle que pour tout point M, $F(u(M)) = F(M)$ et admettant un minimum ou un maximum unique M_0 ; alors M_0 est un point fixe de u . Cette remarque est utile pour résoudre certains problèmes de recherche de configurations as-

b) Déplacements

Le composé de deux déplacements et l'inverse d'un déplacement sont des déplacements ; tout déplacement est une translation ou une rotation. Etant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $A'B' = AB$ et $A \neq B$, il existe un déplacement unique u tel que $u(A) = A'$ et $u(B) = B'$.

treintes à ces conditions de mesure extrêmale.

c) Similitudes directes

Ce sont les composées d'une rotation et d'une homothétie de même centre; effet sur les distances, les aires, les angles orientés.
Application linéaire associée à une similitude directe; expression d'une similitude directe sous la forme

$$z \to Z_0 + k e^{i\theta} (z - Z_0).$$

Caractérisation par les angles de 2 triangles semblables, par les longueurs des côtés de 2 rectangles semblables.

Les élèves doivent savoir qu'une similitude directe est entièrement caractérisée par son rapport, son centre et son angle lorsqu'elle ne se réduit pas à une translation.

Deux segments, 2 carrés, 2 triangles semblables, 2 rectangles semblables étant donnés, un élève doit savoir déterminer les similitudes transformant l'un en l'autre, et leurs paramètres caractéristiques (centre, angle, rapport).

4) NOTIONS SUR LES TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DE L'ESPACE

Les transformations visées sont les translations, les homothéties, les réflexions, les rotations autour d'un axe; effet de ces transformations sur les longueurs, les volumes, le parallélisme, l'orthogonalité. Expressions analytiques des translations, des homothéties, des réflexions par rapport aux plans coordonnés, des rotations d'axe l'un des axes de coordonnées.

On pourra mobiliser ces transformations dans des problèmes de détermination de trajets de rayons lumineux se réfléchissant sur des systèmes de miroirs plans, de trajets minimaux sur des prismes simples, de visualisations variées d'objets simples de l'espace, de mouvements de robots simples.

REFERENCES CITEES

[1] Arrêté du 21.06.85 : *"Programmes de Mathématiques de 1re S"*, B.O.E.N. n° 29 du 18.07.85.

[2] Y. GARDAN; M LUCAS : *"Techniques graphiques interactives et C.A.O.*, Ed. Hermes, Paris (1983).

[3] W. K. GILOV : *"Interactive Computer Graphics"*, Prentice Hall, (1978)

[4] I.R.E.M. de Bordeaux : *De l'enseignement de la géométrie"*, (1970)

[5] J. MARION : *"Premières réflexions sur les nouveaux programmes de Mathématiques de 1re S* (arrêté du 21.06.85), publication I.R.E.M. de Marseille, et Journées A.P.M.E.P. (1985).

[6] J. MARION : *"Enseignement de la géométrie et Informatique"*, Colloque "Enseignement et Informatique", C.I.R.M., Mars 1985

[7] J. MARION; J.L. OVAERT : *"Sur l'enseignement de la Géométrie au Lycée"*, in "Colloque Inter-I.R.E.M." de Nantes (1979) et in "Géométrie I", publication de l'I.R.E.M. de Marseille (1983).

[8] T.PAVLIDIS : *"Algorithms for graphics and images processing"*, Springer-Verlag, Berlin (1962).

ANNEXE

Courbe de Bézier associée à un polygone

Notations — L'espace affine euclidien (ou le plan) E est rapporté à un repère orthonormal; étant donné un point U de cet espace, on notera $\vec{U}$ le vecteur défini par l'origine du repère et le point U.

a) Définition — Etant donné un polygone $P_{0,n} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ de E, $n \geqslant 1$, on appelle courbe de Bézier associée à $P_{0,n}$ la courbe $[P_{0,n}]^n$ admettant pour représentation paramétrique :

$$t \in [0,1] \longmapsto \overrightarrow{M}_{0,n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \vec{A}_k$$

b) Théorème 1 — $[P_{0,n}]$ a pour origine A_0 et pour extrémité A_n et est entièrement contenu dans l'enveloppe convexe de $P_{0,n}$.

Preuve : il suffit de remarquer que $\vec{M}_{0,n}(0) = \vec{A}_0$, que $\vec{M}_{0,n}(1) = \vec{A}_n$,

et que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1$, $\forall t \in [0,1]$, de sorte que pour tout t dans $[0,1]$, $M_{0,n}(t)$ est le barycentre du système de points pondérés :

$[(A_0, \binom{n}{0} t^0 (1-t)^{n-0}), \ldots, \ldots, (A_k, \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}), \ldots, \ldots,$

$(A_n, \binom{n}{n} t^n (1-t)^0)]$ les coefficients étant tous positifs.

c) Théorème 2   tangente en A_0 à A_0A_1
en A_n à $A_{n-1}A_n$

Preuve :

Il suffit de calculer : $\frac{d}{dt}(\vec{M})_{t=0}$ et $\frac{d}{dt}(\vec{M})_{t=1}$

On a :

$$\frac{d\vec{M}_{0,n}}{dt}(t) = \left[\frac{d}{dt}\quad (1-t)^n \vec{A}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \vec{A}_k + t^n \vec{A}_n\right]$$

$$= \left[-n(1-t)\vec{A}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k} \vec{A}_k\right]$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} t^k (n-k) (1-t)^{n-k-1} \vec{A}_k + n\, t^{n-1} \vec{A}_n\right]$$

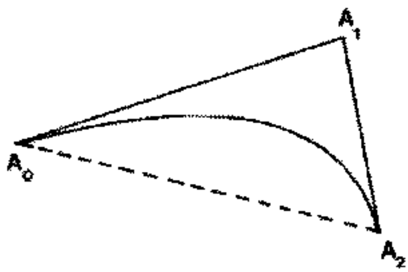
d'où il ressort que :

$$\frac{dM_{0,n}}{dt}(0) = -n\,\vec{A}_0 + n\vec{A}_1 = n\overrightarrow{A_0A_1}, \text{ et que :}$$

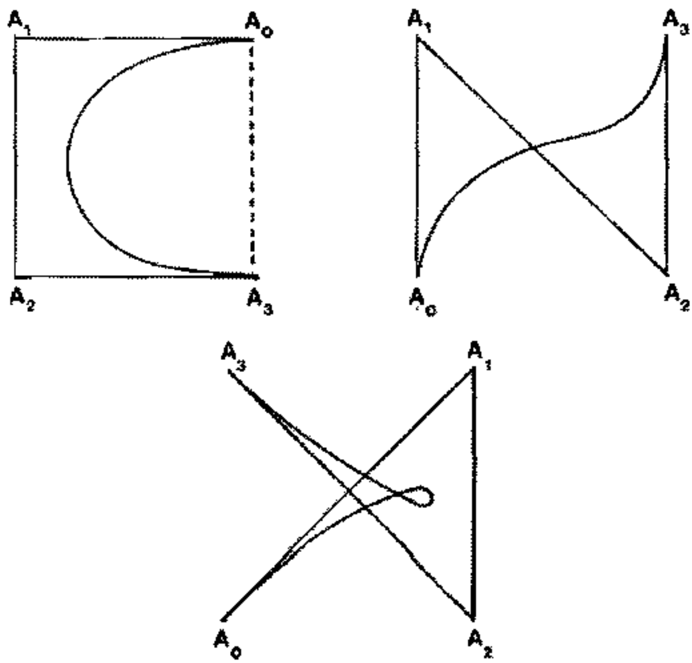
$$\frac{dM_{0,n}}{dt}(1) = n\vec{A}_n - \vec{A}_{n-1} = n\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \text{ ce qui achève la preuve.}$$

d) Remarques

- pour $n = 1$, $P_{0,1} = (A_0, A_1)$, on a $\vec{M}_{0,1}(t) = (1-t)\,\vec{A}_0 + t\vec{A}_1$, de sorte que $[P_{0,1}] = [A_0, A_1]$.
- pour $n = 2$, A_0, A_1 et A_2 formant un vrai triangle, on a nécessairement



- pour $n = 3$, A_0, A_1, A_2, A_3 étant les sommets d'un carré, on trouve :



• Tout se passe comme si la courbe de Bezier était une ficelle magnétisée, les points A_k jouant le rôle de pôles attracteurs.

e) Introduisons les notations suivantes : étant donnés des entiers k, l, vérifiant $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$, notons P_{kl} le polygone $(A_k, A_{k+1}, \ldots, A_l)$, "sous-polygone" du polygone initial, et $[P_{k,l}]$ la courbe de Bézier associée, $\vec{M}_{k,l}(t)$ son point courant.

$\forall t \in [0,1]$ on a, compte tenu que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$,
pour $0 < k \leqslant n-1$:

$$\vec{M}_{0,n}(t) = \left[(1-t)^n \vec{A}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k} \vec{A}_k \right]$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \vec{A}_k + t^n \vec{A}_n \right]$$

$$= (1-t) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} \vec{A}_k \right]$$

$$= t \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)} \vec{A}_k \right]$$

Par suite :

Théorème 3 :

$$\forall t \in [0,1] : \vec{M}_{0,n}(t) = (1-t)\vec{M}_{0,n-1}(t) + t\vec{M}_{1,n}(t)$$
$$= \vec{M}_{0,n-1}(t) + t(\vec{M}_{1,n}(t) - \vec{M}_{0,n-1}(t)).$$

Ce théorème est fondamental ; il montre que la courbe de Bézier $[P_{0,n}]$ associée à $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n)$ se déduit des 2 courbes de Bézier associées à respectivement $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Plus précisément, pour chaque t, $M_{0,n}(t)$ est le point qui divise le segment : $[M_{0,n-1}(t), M_{1,n}(t)]$ dans le rapport t .

f) **Algorithme géométrique**

Pratiquement on divise $[0,1]$ en $N = 20$ ou 50 parties égales. Si à la *ième* itération on note $R_i(R_i(t))$ le points obtenus, et $Q_i(=Q_i(t))$ les nouveaux, on obtient l'algorithme suivant :

1) Pour chaque $t = i/n$, $0 \leqslant i \leqslant n$ faire :
   Begin.
2) Pour *k allant de 0 à n* poser $R_k = A_k$.
3) Poser $m = n$.

4) Tant que $m<0$ faire :
Begin.
5) Pour k allant de 0 à $m-1$ poser $Q_k = R_k + t(R_{k+1} - R_k)$
6) Diminuer m de 1
7) Pour $k=0$ à m poser $R_k = Q_k$
Fin
8) $M_{0,n}(t) = R_0$
Fin
9) Fin de l'algorithme.

On notera que cet algorithme s'implémente graphiquement, l'instruction n'étant autre que la division du segment $[R_k, R_k + 1]$ dans le rapport $t = k/n$.
Pour chaque valeur de t, l'algorithme requiert $3n(n+1)$ opérations.

PROGRAMME "BEZIER" EN LOGO

```
IMP 0
IMTOUT
POUR COMPOSANTE   :C1   :C2
RETOURNE ((1 - :T) * :C1) + (T * § :C2)
FIN

POUR TRACEPOL   :L
SI NON VIDEP   :L"FIXEPOS PREM :L BP TRECEPOL SP :L§ LPS
FIN

POUR INITPOL
DONNE «L »» — 100 — 60§ »— 80 0§ «0 50§ »100 — 80§§
FIN

POUR CALCUL :L
RESTE COMPTE :L = 1
SI VRAI "FIXEPOS PREM :L§
SI FAUX "CALCUL REDUIT :L§
FIN

POUR COORD :P1 :P2
DONNE »X1 PREM :P1
DONNE »Y1 DER :P1
DONNE »X2 PREM :P2
DONNE »Y2 DER :P2
RETOURNE LISTE COMPOSANTE :X1 :X2 COMPOSANTE :Y1 :Y2
FIN

POUR REDUIT :L
TESTE COMPTE :L = 1
SI VRAI »RETOURNE »§§
```

```
SI FAUX »RETOURNE PLACEDEB COORD PREM :L PREM SP :L
REDUIT SP :L§
FIN

POUR BEZIER
INITPOL
LP
TRACEPOL :L
DONNE »N 50
DONNE »I 0
DONNE »NB :N - 1
PREM :L
REPETE :NB »DONNE »I :I + 1 DONNE »T :I / :N CALCUL :L§
FIN

Y2 EST - 170.912
X2 EST 22.312
Y1 EST - 7.27596
X1 EST 58.368
T EST .98
I EST 49
NB EST 49
N EST 50
L EST »» - 100 - 60§ »- 60 »- 80 0§ »0 50§ »100 - 80§§
?. IMP 0
```