échanges

enseigner la géométrie

par Rudolf Bkouche,
Université de Lille

> Comprendre signifie avant tout géométriser. Mais avoir recours à la géométrie, c'est également avoir recours à une certaine forme d'abstraction, d'idéalisation.
> René THOM. *Paraboles et Catastrophes.*

Prolégomènes à un enseignement de la géométrie

1 - Quelques principes

Les programmes hâtivement rédigés à la demande d'un ministre pressé, laissent en suspens les problèmes de l'enseignement des mathématiques et en particulier ignorent (volontairement ou non, cela importe peu) quelques principes généraux qu'il est utile d'expliciter et sans lesquels l'enseignement n'est qu'une suite de recettes techniques dont on ne comprend pas l'enjeu (et un tel enseignement ne sert qu'à résoudre les quelques exercices et problèmes d'application de ces recettes).

L'expérience irémique et apéhémique m'amène à définir quelques principes généraux (et ceci n'est pas exhaustif).

On ne peut définir un programme année par année, c'est l'ensemble d'un cycle qui doit être pris en considération (élémentaire, collège, lycée) et toute confection de programme si elle est nécessaire (et je pense qu'elle l'est dans le système actuel de l'enseignement français même si cela est d'un certain point de vue regrettable) ne peut se faire qu'en fonction des objectifs de ce cycle.

L'enseignement des mathématiques s'inscrit dans un contexte, la signification des notions mathématiques déborde le cadre strictement mathématique ; ceci implique que la confection des programmes tienne compte des autres disciplines, et plus particulièrement de celles où interviennent ces notions mathématiques; je pense évidemment à la physique et à la technologie, mais aussi à la géographie et aux sciences économiques, au dessin d'art et au dessin industriel. Une remarque cependant, le lien entre les mathématiques et les autres disciplines ne saurait être unilatéral, l'opinion communément acceptée aujourd'hui que les mathématiques *s'appliquent* aux autres domaines de la connaissance est sinon fausse, du moins, non pertinente du point de vue de la construction du savoir. Un concept mathématique prend sens à partir d'une problématique et c'est à travers cette problématique, qu'elle soit interne aux mathématiques ou liée à une autre discipline, qu'un concept doit apparaître dans l'enseignement; une définition isolée fut-elle bien formulée n'a pas de sens et ne sert à rien (si ce n'est que celui qui l'a apprise sait la répéter, mais alors de quel savoir s'agit-il ?).

Ainsi, plutôt qu'un cours dogmatique de statistiques qu'on utiliserait ensuite en géographie ou en sciences économiques, vaut-il mieux parler de statistiques là où elles sont signifiantes, quitte à faire l'exposé dogmatique (dont il ne faut pas nier la nécessité) *a posteriori*. De même le repérage des points sur la sphère et les problèmes de représentation plane relèvent tout autant de la géographie et de l'astronomie que de la géométrie. Quant aux concepts relevant à la fois des mathématiques et de la physique, les considérations physiques qui amènent à la construction de tels concepts sont plus importantes que les définitions a priori (je renvoie au texte de Soufflet et moi-même dans le bulletin Inter-IREM n° 23).

Enfin, on l'a assez dit dans les milieux irémiques et apéhémiques, c'est à travers les problèmes que se constituent les concepts mathématiques ; c'est donc bien plus la définition de problématiques générales qui doit conduire à la mise en place de programmes qu'une simple (voire simpliste) évaluation de difficultés techniques ; les difficultés techniques doivent évidemment être prises en compte, cela tout enseignant ne le sait que trop mais ces difficultés ne sauraient être isolées de leur contexte, et c'est à travers la signification des contenus proposés que l'on peut amener les élèves *à vouloir* résoudre ces difficultés.

Je ne peux m'empêcher ici de faire référence à la musique, l'une des activités humaines les plus proches des mathématiques, comme celles-ci, la musique s'appuie sur un formalisme d'accès difficile, mais ce formalisme ne prend sens que par la musique qu'il permet de composer ou d'exécuter, voire simplement d'écouter; il ne saurait être enfermé sur lui-même ; que dirait-on d'un enseignement musical qui se confinerait dans le solfège et l'exécution de gammes ?

Et c'est pourtant ce qui se passe trop souvent dans l'enseignement des mathématiques, le solfège et les gammes, sans que l'élève ait la moindre idée de la musique (et c'est bien souvent le cas aussi des enseignants)*

2 - La place de la géométrie dans la culture scientifique

Je reviens ici sur l'exposé que j'ai fait au colloque de Marseille de juin 1984. Quelle place accorder à la géométrie dans l'enseignement, non comme passage obligé pour déterminer les élèves aptes à suivre la voie royale qui passe par la T.C. et les classes préparatoires (ce qui implique le désintérêt d'une partie des élèves de seconde, puis celui d'une partie des élèves de première S), mais à la fois comme savoir technique permettant de comprendre et de maîtriser ce qui relève du domaine géométrique et comme part importante de la culture scientifique d'aujourd'hui.

Je signalerai ici la difficulté dûe à l'écart important qui se creuse entre la part de plus en plus faible du savoir géométrique au sein de la société automatisée que l'on vit aujourd'hui (comparer par exemple la pesée dans un super-marché laquelle consiste à mettre une marchandise sur un plateau ce qui détermine l'apparition d'un nombre sur un cadran, savoir le prix, et la pesée utilisant la balance romaine ou la balance Roberval, comparer aussi la lecture de la position de l'aiguille sur le cadran d'une montre et la lecture numérique sur un cadran à cristaux liquides ; il ne s'agit pas ici de porter un jugement, mais simplement de constater une dégéométrisation au profit du numérique) et le rôle que joue la géométrisation dans les divers domaines de la science d'aujourd'hui, que ce soit les mathématiques, les sciences physiques, voire la biologie, sans omettre les statistiques et l'analyse des données.

Les difficultés de l'enseignement de la géométrie ont donc une base culturelle qui dépasse (et d'une certaine façon explique) l'abandon de la géométrie dans l'enseignement issue de la réforme des *mathématiques modernes ;* cela explique aussi le désintérêt, voire le refus des élèves, en ce qui concerne la géométrie. On ne saurait y remédier (s'il faut y remédier) en se contentant d'injecter quelques chapitres dans les programmes ; ici encore il s'agit de définir les problématiques (internes ou externes aux mathématiques) qui permettent de donner sens à l'enseignement de la géométrie.

---

* On peut lire à ce propos, un texte de Serge Lang récemment paru : *Des jeunes et des mathématiques*. En ce qui me concerne, cette relation entre les mathématiques et la musique m'est apparue lors d'une discussion avec un étudiant de licence qui poursuivait conjointement des études de clavecin au Conservatoire de Lille, discussion au cours de laquelle nous avons comparé les objectifs des deux enseignements, le mathématique et le musical.

C'est dire que la première question à laquelle il nous faut répondre, c'est d'expliciter quelle est la place de la géométrie dans la culture scientifique, et c'est seulement à partir de cela que l'on pourra définir un contenu d'enseignement*.

Je reviens ici sur les trois aspects dont j'ai parlé au colloque de Marseille cité, savoir la géométrie comme science autonome, c'est-à-dire essentiellement l'étude des situations spatiales, la géométrie dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance, la géométrie comme langage et comme métaphore (ou si l'on préfère comme instrument de représentation).

La géométrie comme domaine autonome de la connaissance du monde, s'est constituée autour de deux grandes problématiques, la mesure des grandeurs géométriques (c'est-à-dire celles qui définissent les situations spatiales) d'une part, la représentation de l'espace (représentation plane s'entend) d'autre part. Ce sont les problèmes posés à l'intérieur de ces deux grands thèmes qui ont amené à mettre en place les diverses méthodes de la géométrie que ce soit le dessin, la démonstration de type euclidien, la méthode des coordonnées, le calcul vectoriel ou l'algèbre linéaire.

Mais la géométrie, parce qu'elle est science des situations spatiales, se relie aux autres domaines du savoir où interviennent ces situations spatiales, domaines qui à leur tour interviennent dans le développement de la géométrie, la mise en place des concepts géométriques et des méthodes. C'est bien évidemment le cas de la géographie et de l'astronomie en ce qui concerne la géométrie sphérique, c'est le cas de la mécanique dont le développement s'appuie sur la géométrie en même temps qu'il permet la mise en place de nouvelles méthodes géométriques ; on peut citer les travaux d'Archimède sur la statique et l'utilisation d'icelle pour la détermination des aires ; on peut citer les travaux autour du centre instantané de rotation qui montre l'apport de la cinématique à l'étude des courbes ; on peut citer enfin le développement conjoint de la mécanique et de la géométrie différentielle depuis le XVIIIe siècle jusqu'à nos jours.

Enfin la géométrie est devenue un instrument d'étude de nombreux domaines via la géométrisation, c'est-à-dire la représentation géométrique des objets étudiés, c'est ce qu'exprime Thom dans la phrase citée en exergue de ce texte.

Ce n'est pas ici le lieu de développer ce point (un texte est en préparation à ce sujet) ; cette géométrisation apparaît déjà dans la géométrie grecque avec la représentation des grandeurs par des longueurs (cf. le livre V

* Je ne poserai pas ici la question de la place de la culture scientifique dans l'enseignement, question qui fut posée dans l'indifférence générale ou presque, lors des journées APM de Nice (1984) par J. Marc Levy-Leblond, question qui pourrait être l'objet d'un travail irémique et apéhémique, travail sûrement plus important que les solutions technico-pédagogiques que l'on imagine trop souvent être la réponse à nos problèmes d'enseignants.

des *Eléments d'Euclide*) et c'est elle qui est en œuvre à travers la représentation graphique des fonctions, nous pouvons citer aussi (et c'est un prolongement de l'idée de représentation graphique) la géométrisation de la théorie des équations via la géométrie algébrique et plus récente, la géométrisation de la théorie des fonctions via l'analyse fonctionnelle linéaire ou non linéaire ; on peut citer en outre le lien de plus en plus étroit de la physique contemporaine avec la géométrie différentielle, ou l'importance des représentations géométriques dans les statistiques et l'analyse des données.

Cette géométrisation n'est pas un simple langage fleuri imaginé par des mathématiciens en mal de géométrie ; les métaphores du langage scientifique, lorsqu'elles ne se réduisent pas à un simple jeu de mots, renvoient à des images dont on espère qu'elles sont signifiantes, et en ce sens on peut parler de la mise en place de nouvelles formes d'intuition dont la géométrie élémentaire devient ainsi le support. Je me contenterai de rappeler ici l'article fondateur de la géométrie différentielle (*sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*) où l'auteur, Riemann, propose un élargissement de l'intuition spatiale, et c'est parce qu'il permet cet élargissement que ce texte a été à l'origine du développement que l'on sait.

Pour clore ce paragraphe, je rappellerai le rôle que joue l'algèbre linéaire dans cette géométrisation ; c'est en effet à travers les images géométriques fournies par l'algèbre linéaire que l'on construit les représentations géométriques, développant à la fois de nouvelles méthodes et de nouvelles intuitions. Mais ici il faut remarquer que si l'algèbre linéaire fournit des images géométriques, ces images géométriques ne sont pas contenues dans l'algèbre linéaire elle-même ; elles sont en quelque sorte la conséquence de la *linéarisation* de la géométrie élémentaire via la méthode des coordonnées et le calcul vectoriel. Mais si via cette linéarisation, la géométrie élémentaire est devenue, d'un point de vue structural (et uniquement d'un point de vue structural) un simple chapitre de l'algèbre linéaire, on ne sait que trop, aujourd'hui, après les errements des années soixante-dix, qu'on ne peut enseigner la géométrie de cette façon ; un enseignement *a priori* de l'algèbre linéaire, pour aussi facile qu'il soit, ne permet pas son utilisation dans les divers domaines ou le linéaire intervient.

Ceci dit, l'algèbre linéaire ne saurait non plus naître spontanément d'une pratique analytique ou vectorielle de la géométrie ; c'est dire que le problème de l'enseignement des méthodes linéaires (bien plus que le facile discours de l'algèbre linéaire) se pose et cela d'une façon d'autant plus cruciale que l'algèbre linéaire est aujourd'hui l'un des instruments les plus puissants des mathématiques autant dans leur domaine propre que dans les autres domaines où elles interviennent. Je ne pense pas qu'aujourd'hui nous ayons une réponse toute prête et c'est l'une des directions de travail que les IREM pourraient prendre en compte : l'explicitation des concepts et méthodes linéaires dans les divers domaines où elles interviennent, et par cela même l'étude des conditions de la géométrisation ; ce qui suppose évidemment un enseignement convenable de la géométrie élémentaire sans lequel la géométrisation n'est plus qu'un simple jeu de langage*.

3 - Et les maîtres

Un programme ambitieux (et celui-là ne peut être qu'ambitieux) qui aurait pour objectif que les élèves apprennent effectivement des mathématiques (au lieu que l'on se contente comme trop souvent aujourd'hui, de leur en montrer quelques morceaux en espérant que quelques-uns sauront répéter une partie plus ou moins grande de ce qu'ils ont entendu) implique une formation des maîtres. Mais quelle formation, formation scientifique bien sûr (encore qu'il serait bon de s'entendre sur ce qu'est une formation scientifique) mais aussi travail de réflexion (épistémologique, philosophique ou ... ique, je laisse le choix aux amateurs de beau langage) permettant aux enseignants de connaître la signification de la discipline qu'ils enseignent dans ses aspects scientifiques certes, mais aussi culturels au sens le plus large du terme, c'est-à-dire ses relations avec le contexte, sans quoi l'enseignant ne peut être que le répétiteur d'un savoir ayant perdu, pour lui-même et par conséquent pour ses élèves, toute signification. La formation pédagogique si elle est nécessaire (et il est clair qu'elle l'est) ne prend place que dans ce contexte, sans quoi elle n'est que le mode d'emploi des élèves par le maître.

Ceci implique une participation effective des IREM à la mise en place d'une réforme, autour de stages et de groupes de travail permettant la réflexion nécessaire. Enfin, ce que l'on a l'habitude de faire dans les IREM, je n'insiste pas.

* * * *

Ces prolégomènes étant dits, je me propose d'énoncer ultérieurement quelques réflexions sur les contenus d'un enseignement de géométrie.

---

* Cette universalisme de la linéarisation et de la géométrisation doit cependant se situer dans une problématique, et non comme une simple transcription linguistique ; il ne faudrait pas *linéariser* et *géométriser* comme on a *ensemblisé* à tort et à travers. Le panier de la ménagère ne fait pas plus partie de l'algèbre linéaire que la fraternité et la sonorité n'ont fait partie de la théorie des relations.