échanges

des nœuds et des graphes

par Bernard Ducourt,
Lycée E. Galois, Sartrouville

Comment nouer une ficelle à l'aide d'un graphe ?...

L'idée, que je tiens de M. Raoul Raba, en est très simple : A vos aiguilles !...

Considérons un graphe (*figure* 1) planaire et connexe comme dans toute la suite. A partir du point M, nous pouvons tourner autour de A, en laissant A sur la gauche. Chemin faisant, nous rencontrons l'arête joignant le sommet A au sommet B, le nœud que nous allons tisser passera au-dessus de l'arête [AB]. Tournons maintenant autour de B, mais cette fois, en le laissant à droite; nous rencontrons l'arête [BC]; nous passerons dessous, puis nous tournerons autour de C, en le laissant à gauche.

En continuant le processus, nous voilà bientôt revenu au point de départ : nous avons dessiné notre nœud (*figure* 2), en utilisant la REGLE 1.

Figure 1

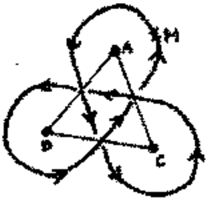


Figure 2

Notre nœud, ou du moins son diagramme dans le plan, vérifie une propriété de croisement : en suivant un brin quelconque, on passe alternativement dessus puis dessous les autres brins.

Tisser un nœud en suivant les arêtes

Déformons le nœud en le rapprochant des arêtes et des sommets autour desquels on tourne (*figure* 3). Ce faisant, on ne coupe pas d'arête et on ne passe pas par un sommet : la déformation se fait à l'intérieur d'une des faces du graphe.

Le parcours orienté autour de A (*figure* 4), induit une orientation du plan qui place A et l'arête [AB] à gauche du parcours. Quand le parcours traverse l'arête, l'arête [AB] et le sommet B se situent à droite du parcours, puisque, conformément à la règle 1, le nœud tourne autour de B en le laissant à droite; le parcours s'effectue donc sans rebrousser chemin (en effet l'arête [AB] se situerait à gauche du parcours, du fait de l'inversion du sens de parcours).

On obtient alors la règle de traçage (REGLE 2) : Suivre les arêtes et les sommets à une distance de ε, changer de côté quand on se trouve à une distance de $3/2\ \varepsilon$ du milieu de chaque arête. Passer dessus si l'on se trouvait à gauche du sommet et de l'arête précédents, sinon passer dessous. (*figure* 4).

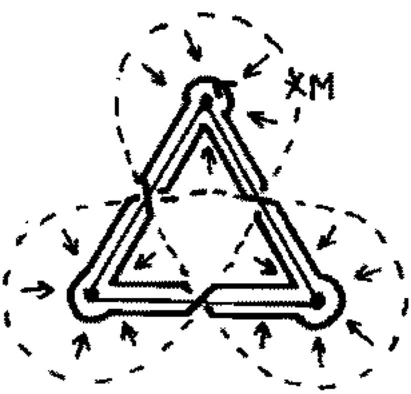


Figure 3

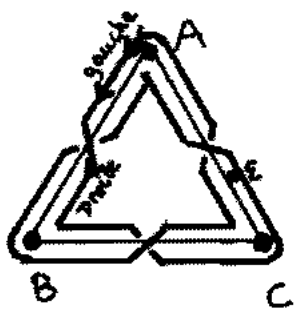


Figure 4

Conséquences de la règle 2

Une remarque préalable : la règle 2 donne le même nœud(1) quel que soit le sens de parcours choisi sur le graphe.

(1) - A un nœud non orienté, correspondent deux nœuds d'orientations opposées.

En effet, soit une arête [AB]; le parcours du nœud de A vers B place A à droite du traçé et d'après la règle 2 le nœud passe en dessous (*figure* 5).

Le parcours de B vers A est le transformé de celui de A vers B par une rotation de centre M (milieu de [AB]). Cette transformation ne changeant par les orientations, B' se trouve aussi à droite de B et le nœud passe aussi dessous.

Il est clair d'autre part que la règle qui m'impose de passer dessus ou dessous ne tient pas compte du trajet effectué au préalable mais seulement de la position où l'on se trouve c'est-à-dire celle des points A', B', A'', B'' (*figure* 6).

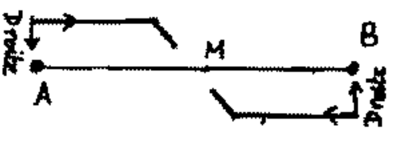


Figure 5

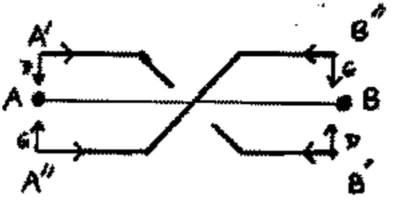


Figure 6

Un chemin sur le graphe...

Quand la déformation est maximale, le nœud est réduit à un chemin sur le graphe même. Chemin qui a pour règle : à chaque carrefour (sommet), je prends alternativement, la première à droite, puis la première à gauche et ainsi de suite...

Des nœuds vers les graphes...

A partir d'un nœud qui possède la propriété des croisements alternés (passage dessus puis dessous) peut-on retrouver le graphe qui permet de le tracer?

Pour cela dessinons le nœud en remplaçant chaque point de croisement, par le sommet d'un graphe(2), noté G. Il s'agit en fait de la projection du nœud sur le plan. On obtient sur la *figure* 7, un graphe où de chaque sommet partent 4 arêtes.

Sur l'ensemble F des faces de G, "être opposées par le sommet" est une relation d'équivalence. Les classes sont au nombre de deux (3) du fait de la connexité du graphe G.

---

(2) - Au nœud *correspond un chemin sur le graphe* G, où arrivant à un sommet, on prend l'arête opposée à l'arête que l'on vient d'emprunter.

(3) - On peut donc colorier les faces de G en deux couleurs.

Prenons un point dans chaque face du graphe G et relions ces points par une arête si les faces qui leur correspondent, appartiennent à la même classe d'équivalence (les arêtes passeront par les sommets du graphe G correspondants, voir *figure* 8).

On obtient deux graphes G1 et G2.

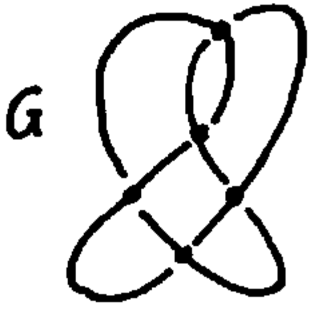


Figure 7

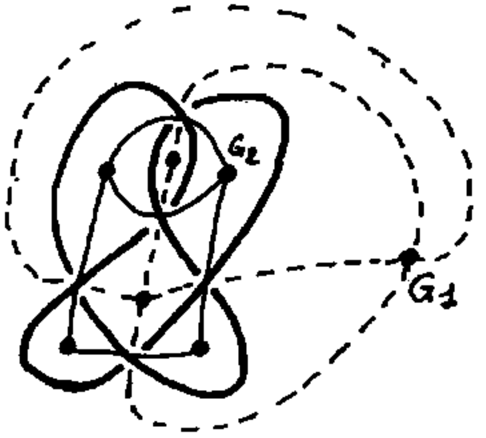


Figure 8

Les sommets de G2 se trouvent tous à l'intérieur d'une face finie de G (*figure* 9), ce qui n'est pas le cas d'un des sommets de G1.

Donc chaque arête [AB] d'une face de G peut se déformer, tout en restant à l'intérieur du triangle curviligne (S, A, B), jusqu'à se trouver à une distance ε du graphe G2.

Si le nœud passe au-dessous de A, du fait de la règle d'alternance, le nœud vérifiera la règle 2, dans le cas contraire il vérifiera la règle 2Bis (remplacer dans la règle 2 les mots dessus par dessous et inversement).

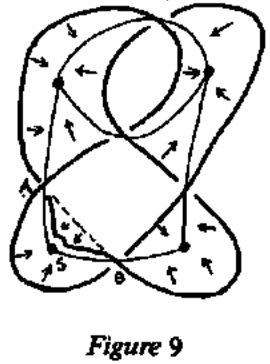


Figure 9

Mais que vient faire l'autre graphe...

G2 est le graphe dual de G1 ; en effet chaque face de G1 contient un sommet de G2 et réciproquement ; de plus, les arêtes de G1 et de G2 se croisent deux à deux.

Soit S le sommet qui se trouve dans la face infinie de G. Soit G' le graphe G + [S] ; G' possède une face infinie, S est un sommet de cette face infinie. De ce fait elle ne possède que trois arêtes : [SA], [SB] et [AB], arête qui appartient à G (*figure* 10).

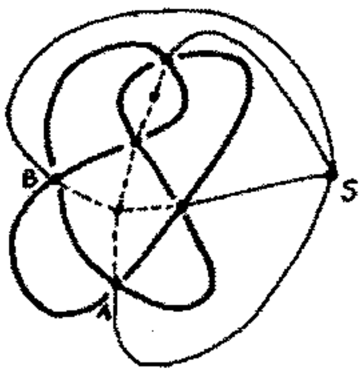


Figure 10

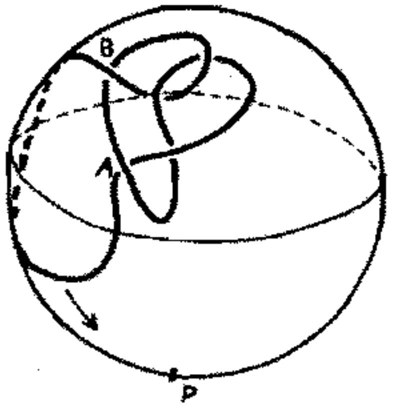


Figure 11

Et maintenant un peu d'imagination ; supposons le nœud dessiné sur une sphère de diamètre suffisant (*figure* 11). Si l'arête [AB] est suffisamment élastique, on peut la faire glisser le long de la sphère vers le pôle P. La déformation se fait à l'intérieur de la face "infinie" de G1 donc sans couper aucune arête. Les *figures* 12 représentent le nœud avant et après les transformations.

Il est clair que s'il tournait autour de S' en le laissant à gauche, il tourne maintenant autour de S en le laissant à droite. En effet, la transformation effectuée s'apparente, à l'allongement près, à une rotation de 180 degrés autour de l'axe (AB) et donc, dans le plan à une symétrie par rapport à la droite (AB) ce qui inverse les orientations. Comme les points de croisements n'ont pas bougé dans cette transformation, si la règle 2 s'appliquait au nœud c'est maintenant la règle 2Bis qui s'applique et réciproquement.

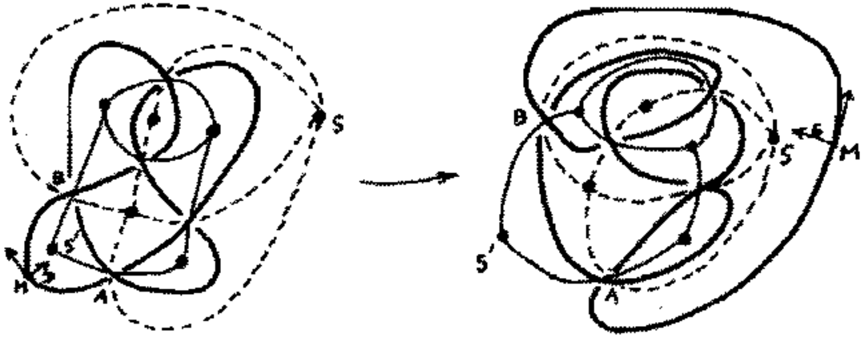


Figure 12

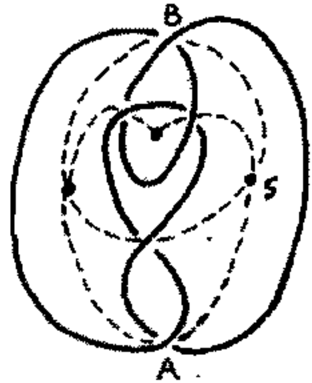


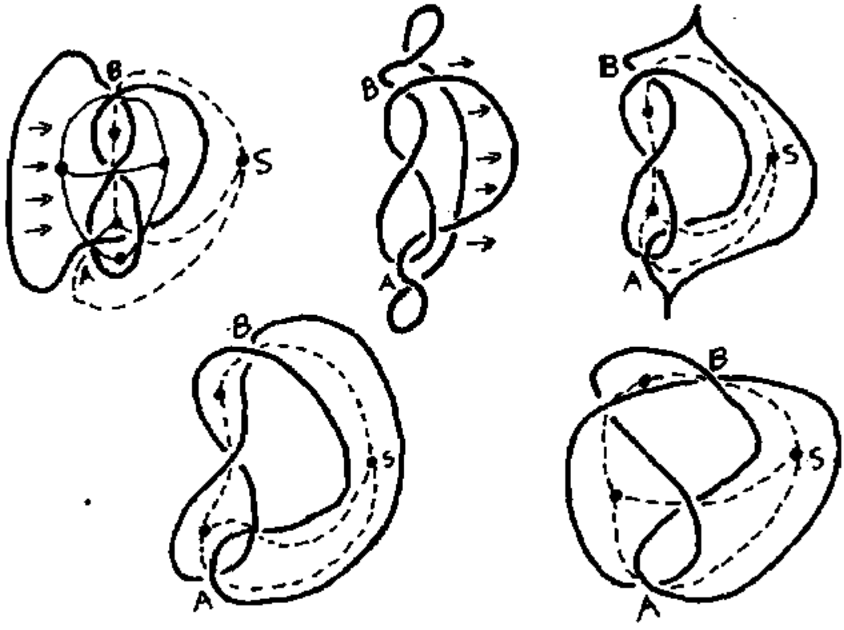
Figure 12 *après déformation*

Nœuds réflexifs...

Un nœud est dit réflexif si tout en le maintenant "à plat" et en faisant glisser les brins les uns sur les autres, on peut le déformer en son symétrique par rapport au plan dans lequel il se trouve.

Si un nœud possède la propriété de croisement et si son graphe G1 associé est auto-dual (il est isomorphe à son dual), on peut lui faire subir la transformation de l'étude précédente (ou du moins sa projection sur un plan : voir *figures* 13).

On trouve un nœud identique au précédent car les graphes G1 et G2 sont les mêmes, à ceci près que les croisements sont inversés : il s'agit du nœud symétrique. Ce qui prouve qu'un tel nœud est réflexif.



Figures 13

Nœuds entrelaçés

Un même graphe peut engendrer le dessin de plusieurs nœuds entrelaçés (*figures* 14 *et* 14 Bis)

Figure 14

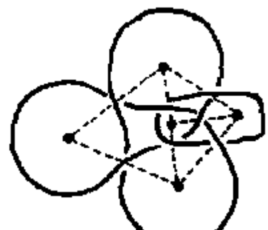


Figure 14 Bis

Avec un micro-ordinateur...

Grâce à une astuce de présentation, on peut dessiner facilement les nœuds sur un écran (*figure* 15). Il suffit de représenter les sommets par des traits verticaux et les arêtes par des traits horizontaux. En employant pour chaque nœud des couleurs différentes, on obtient des tresses du meilleur effet...

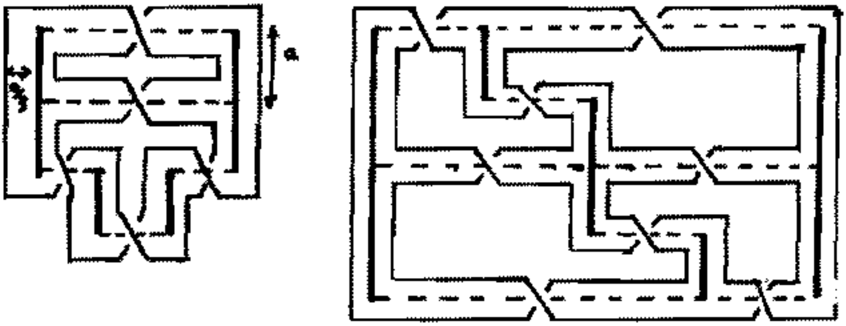


Figure 15

Contre-exemple...

Tous les nœuds ne possèdent pas la propriété des croisements alternés (passage dessus puis dessous)
En voici un :

Des problèmes "ouverts" :

Avec un graphe donné, combien de nœuds entrelaçés peut-on tracer ?

La méthode décrite ici, garantit-elle qu'on puisse associer un graphe à un nœud de manière unique? (en supposant bien sûr, quitte à déformer le nœud en question, qu'il se trouve dans une position où il possède un nombre de croisements minimum).

Quels rapports éventuels entre le graphe d'un nœud et d'autres caractéristiques comme son genre par exemple?

Bibliographie

Les Progrès des Mathématiques (Editions Belin) [article de E. BELAYA].

Graphes de C. BERGE (Editions Gauthier - Villars).

Mathématiques pour la tête et les mains de M. DUMONT et F. PASQUIS, (Editions Cedic).