mathématique et société

le mythe formaliste et l'enseignement des mathématiques

par Frédéric Pham,
Université de Nice

1 - Introduction

"Que pensez-vous des Mathématiques Modernes ?" m'a-t-on souvent demandé au cours de ces quinze dernières années (typo, n'oubliez pas les majuscules, s.v.p. !). Une seconde question m'a souvent été posée par des collègues de l'enseignement secondaire : "Que faut-il apprendre à nos élèves ? Faut-il leur apprendre à raisonner, ou bien leur apprendre des recettes ?".

A la première question, il existe une réponse "officielle" fréquemment utilisée par les mathématiciens de l'enseignement supérieur (j'y ai moi-même eu recours) :

"Il n'y a pas de coupure entre "mathématiques modernes" et "mathématiques traditionnelles", le progrès des mathématiques s'est fait de façon continue ; c'est seulement dans l'enseignement qu'il y a eu une coupure, rendue nécessaire par le fait que l'enseignement avait trop tardé à prendre en compte les progrès des mathématiques du 20ème siècle. Certes, la coupure a donné lieu à quelques excès, faute peut-être de préparation suffisante. Mais nous allons peu à peu remédier à ces excès..."

Contrastant avec le style prudent de cette réponse "officielle", les discussions entre nous, gens du sérail des "mathématiques supérieures", faisaient apparaître des réactions beaucoup plus crues aux "excès" en question : cela allait de la commisération à l'indignation devant le pédantisme des auteurs de manuels du secondaire, qui cherchent surtout à jeter de la poudre aux yeux et n'ont pas réellement compris ce que c'est que les mathématiques... Curieusement, aucune voix dans notre chœur unanime n'exprimait la remarque que les professeurs du secondaire ont été formés sur les bancs de l'Université...

Par la suite, la solidarité entre les problèmes de l'enseignement secondaire et ceux de l'enseignement supérieur m'est apparue plus clairement au fil des études de mes enfants : que de fois, en essayant de les aider à comprendre telle ou telle notion élémentaire, me suis-je senti confronté aux mêmes types de difficultés, de dilemmes pédagogiques, que dans mon enseignement à n'importe quel niveau du cursus universitaire ! C'est pourquoi on m'excusera, j'espère, de prendre parfois mes exemples dans le domaine de l'enseignement au collège. Mon espoir est d'une part de susciter, de la part de collègues du secondaire, des réactions qui enrichiront ma trop maigre expérience de ce domaine ; d'autre part de contribuer à un débat qui me semble vital, à la fois à l'intérieur de l'enseignement supérieur et entre enseignants du supérieur et du secondaire, sur les thèmes suivants : avons-nous une image claire de "ce que c'est que les mathématiques" ? Quels sont les rapports entre l'image que nous en donnons par notre enseignement et l'image que nous en avons nous-mêmes ? (Cf. les remarques finales de [16]). Ce faisant, je serai amené à effleurer nombre de sujets auxquels des gens plus compétents que moi ont consacré beaucoup de travail (dans le domaine de la didactique notamment on m'a signalé les références [2] [6] [10] [12], et il y en aurait sûrement beaucoup d'autres à citer). Je prie donc le lecteur d'être indulgent, et de prendre cet article pour ce qu'il est : non pas une étude savante et documentée, mais le cri d'alarme de quelqu'un qui s'interroge...

2 - L'illusion lyrique des "mathématiques modernes, formatrices de la pensée"

Les deux questions posées au début de cette introduction semblent très différentes l'une de l'autre : la première est "datée" (certains la diront même "dépassée"), alors que la seconde est "éternelle". Pourtant, il me semble que dans l'esprit de ceux qui les posent, il existe un lien entre ces deux questions. A l'époque où la vogue des "Maths modernes" s'est répandue (fin des années 60) ses défenseurs, qui comptaient dans leurs rangs la majorité des mathématiciens de renom (sauf quelques exceptions notables comme J. LERAY, R. THOM...), avançaient souvent l'argument suivant : l'enseignement traditionnel cherche avant tout à inculquer des connaissances qui trop souvent se réduisent à de simples "RECETTES" étayées seulement par l'autorité du professeur ; au contraire, les élèves qui auront reçu l'enseignement nouveau seront formés dans l'art du "RAISONNEMENT", qui leur permettra d'être des esprits libres capables de former leur propre jugement ; à cet égard, la Mathématique est une discipline privilégiée, car c'est la seule où l'élève, une fois qu'il en a compris les règles, puisse être certain d'avoir raison même contre l'autorité du maître.

Cette opinion très idéaliste appellerait de nombreux commentaires. Pour le moment je me contenterai de trois remarques :

1) En relisant les textes des pionniers de l'introduction de la théorie des ensembles dans l'enseignement élémentaire (Papy, etc...), on trouve effectivement des idées intéressantes d'activités mathématiques originales, pouvant initier les élèves à la découverte et au raisonnement mathématique ;

2) L'art de raisonner juste n'est pas une invention du 20ème siècle, et les bons professeurs savaient initier leurs élèves à la découverte et au raisonnement mathématique bien avant que le langage des ensembles ait envahi l'enseignement secondaire ;

3) Pendant la période de grande vogue des "Maths modernes", les manuels de l'enseignement secondaire se sont mis à rivaliser de pédantisme et de dogmatisme ; comment les élèves auraient-ils mieux appris à former leur propre jugement ? Leurs maîtres eux-mêmes n'y arrivaient pas toujours ! Certains venaient nous consulter comme si nous étions des juristes : "a-t-on le droit de dire que... ?" ; d'autres, complètement découragés, professaient l'opinion que "les maths s'apprennent par cœur, il ne faut pas chercher à comprendre" !

Dans une telle situation, où des intentions aussi nobles aboutissent au résultat exactement inverse de celui espéré, peut-on simplement parler d'"excès" (ou "bavures") ? N'y aurait-il pas quelque vice profond, quelque gigantesque malentendu caché derrière les intentions proclamées ? Et puisque certains mots, comme le mot "raisonnement", reviennent si souvent dans le débat, sommes nous sûrs que le sens de ces mots soit aussi clair qu'il y paraît au premier abord ?

3 - Raisonner ?

Considérons l'exercice suivant (extrait d'un manuel de 4ème en usage actuellement) :

"1/3 de l'aire d'un lotissement est partagé en 5 lots dont les aires sont égales. Quelle est la fraction de l'aire totale du lotissement représentée par chacun de ces lots ?"

Pour quelqu'un qui a assimilé l'idée de multiplication des fractions, la réponse peut s'énoncer en une ligne :

(1) "la fraction demandée est un cinquième de un tiers, c'est-à-dire 1/15, car $3 \times 5 = 15$."

Mais, surprise ! Voici un enfant qui, en début de Quatrième, ne "voit" pas immédiatement cette "évidence" ! (il est vrai que, pendant toute l'année de Cinquième, il n'a plus entendu parler de fractions). Comment le mettre sur la voie de la solution ? Peut-être vais-je lui suggérer

(2) de dessiner, sous une forme géométrique simple, un premier partage d'une aire en 3 parties égales, suivi d'un second partage de chacune des 3 parts précédentes en 5 parties égales.

Et en effet, après quelques tâtonnements où il a choisi des formes de partage peu suggestives, le voilà qui arrive à "visualiser" ainsi le résultat. Mais comme il s'agit tout de même d'un élève de Quatrième, qui a commencé à apprendre à résoudre des problèmes de façon FORMELLE, en symbolisant par des lettres les données et inconnues du problème, je veux l'inciter à chercher aussi à résoudre le problème de cette manière plus "noble". J'attends sans doute quelque chose comme

(3) "soit a l'aire totale du lotissement, c l'aire de chacun des lots ; on a

$$\frac{1}{3}a = 5c \text{ donc } c = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{3}a = \frac{1}{15}a.$$

Mais la démarche de mon élève prend une tournure légèrement plus compliquée :

(4) "soit a l'aire totale du lotissement, b l'aire du "tiers à repartager", c l'aire de chacun des lots ; l'inconnue x est la fraction

$$x = \frac{c}{a} = \frac{\frac{b}{5}}{a} = \frac{\frac{b}{5}}{3b}\text{..."}$$

... il hésite, puis "simplifie par b" et obtient $\frac{5}{3}$! Voilà le professeur en terrain connu, devant un type d'erreur dont il sait pouvoir venir à bout par un entrainement intensif et purement MECANIQUE à la manipulation formelle des fractions. Mais ce que j'ai découvert avec perplexité, moi qui n'ai jamais enseigné les fractions à des élèves de Quatrième, c'est LA TRES GRANDE DIVERSITE DES FAÇONS D'EXPRIMER UNE IDEE QUE JE CROYAIS TRES SIMPLE. Laquelle est la plus adéquate ? La méthode graphique, accessible même à un élève de l'école primaire, n'est-elle pas la plus suggestive ? Mais elle suppose la conviction que le résultat ne doit pas dépendre de la forme du partage. Est-ce une raison pour lui préférer la méthode formelle (3) ou (4) ? Celle-ci requiert une plus grande maîtrise des techniques de calcul des fractions, et sommes nous sûrs que la maîtrise de ces TECHNIQUES soit ce qui manquait à l'enfant pour comprendre l'IDEE de multiplication des fractions ? L'usage d'expressions littérales, qui distingue les formulations (3) et (4) des formulations (1) et (2), n'est-il pas une source de difficulté supplémentaire plutôt qu'une aide ? Et quel profit retire-t-on pour ce problème-là de l'investissement supplémentaire que requiert la méthode formelle ? Certains diront peut-être qu'une solution comme (3) ou (4) est plus "rigoureuse" que (1) ou (2). Mais leur conviction est-elle basée sur autre chose que sur la croyance qu'un texte mathématique est d'autant plus "rigoureux", d'autant plus digne du nom de "raisonnement", qu'il est plus formel ? Du point de vue de la SIGNIFICATION du texte, peuvent-ils dire ce que la formulation (3) contient de plus que (1) ? Et demander à l'élève une telle formulation peut-il être justifié autrement que comme un entraînement en vue d'exercices plus compliqués, où la méthode formaliste s'avérera la plus praticable ? (De ces exercices qu'on peut difficilement résoudre autrement que "par l'algèbre", comme on disait du temps où j'étais en Sixième) ?

Si je me suis étendu un peu longuement sur cet exemple, ce n'est pas pour donner mes réflexions en modèle : d'autres professeurs ont certainement mieux et davantage réfléchi sur la façon de faire acquérir aux enfants la notion de multiplication des fractions ; mais, et c'est là-dessus que je voudrais insister, je serais très étonné qu'une notion aussi riche puisse être bien assimilée si l'on s'est contenté d'en présenter le seul aspect FORMEL. Par contraste avec cette richesse, que penser de l'exercice suivant, extrait d'un manuel de Cinquième ?

> "a, b, c, d désignent quatre entiers naturels qui vérifient les inégalités $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$.
>
> 1) Comparez $a+c$ et $b+c$, puis $b+c$ et $b+d$
>
> 2) Démontrez l'implication $(\ a \geqslant b$ et $c \geqslant d\ ) \Longrightarrow (\ a+c \geqslant b+d\ )$"

Ayant à faire l'exercice pour le lendemain, mon fils est resté perplexe devant la question 2) : "l'implication est évidente, me dit-il, que veut dire "démontrez" ?". Fort embarrassé moi-même, je me suis reporté à la leçon du livre, où j'ai lu :

> "Soient a et b deux entiers naturels ; supposons que l'on ait : $a \leqslant b$.
> Ajoutons un même entier naturel c aux deux membres de cette inégalité ; nous obtenons les entiers $a+c$ et $b+c$. Nous admettons que l'on a : $a+c \leqslant b+c$.
> Nous avons donc l'implication : $(\ a \leqslant b\ ) \Longrightarrow (\ a+c \leqslant b+c\ )$"

Bon, "admettons" ! Mais l'implication 2) de l'exercice n'est-elle pas aussi évidente, et pourquoi ne pas l'admettre aussi ? Au fait, l'élève a-t-il la liberté d'"admettre" quoi que ce soit ? N'est-ce pas là un privilège réservé au seul professeur, ou même au seul LIVRE, détenteur du SAVOIR ? Ne faut-il pas être très savant en Mathématiques pour comprendre les mystères profonds qui se cachent derrière d'apparentes "évidences" ? Vous vous demandez pourquoi certaines évidences sont "admises", alors que d'autres doivent être "démontrées" ? Mais en Mathématiques, il n'y a pas d'"évidences" (n'utilisez jamais ce mot !), il n'y a que des définitions, des axiomes, et des théorèmes ! Vous êtes encore trop jeunes pour qu'on vous enseigne LES véritables axiomes des Mathématiques, c'est pourquoi on vous fait travailler avec des axiomes provisoires (introduits par l'expression "nous admettons") ; admettez donc sans discussion ce qu'on vous demande d'admettre, et apprenez à RAISONNER ! Pour quoi faire ? Question à ne pas poser !

4 - Pourquoi les ensembles ?

Pour quelles raisons (bonnes ou mauvaises) a-t-on décidé d'enseigner, sous le nom de "Maths Modernes", des notions de théorie des ensembles aux écoliers ?

Ce qui rend difficile de discuter sainement de cette question, c'est que beaucoup de gens sont plus ou moins vaguement au courant de l'existence d'une sorte de culte ésotérique, avec ses "mystères" (célébrés en première année d'Université : "axiome de choix", "théorème de Zermelo", ...), ses "saints fondateurs" (Cantor, Hilbert,...), son grand-prêtre (Bourbaki)... C'est pourquoi je voudrais consacrer quelques-uns des paragraphes qui suivent à parler de la naissance du culte, des intentions de ses fondateurs, de la façon dont on le célèbre aujourd'hui.

A la fin du 19ème siècle, alors que le calcul différentiel semblait être arrivé à un point proche de la perfection, les progrès mêmes du calcul différentiel et de la théorie des fonctions révélaient aux mathématiciens des phénomènes étonnants : courbes continues n'ayant de tangentes nulle part, fonctions dont les "accidents" (ou singularités) étaient distribués de façon extrêmement bizarre le long de la droite ou du plan complexe... Comme toutes ces bizarreries étaient liées au fait que les mathématiciens admettent l'idée de "nombre réel" (ou de point d'une droite) DETERMINE AVEC UNE PRECISION INFINIE, on a recommencé à se poser les éternelles questions sur l'infini mathématique, questions auxquelles Georg CANTOR devait proposait des réponses très hardies, longtemps controversées par ceux-là même dont les travaux étaient au cœur de ces questions (cf. par exemple [9]). Nonobstant ces controverses sur les "nombres transfinis" de Cantor, les nouveaux "ensembles" acquéraient plein droit de cité dans la pratique mathématique, qu'il s'agisse de parties bizarres de la droite ou du plan (sous-ensembles "de Cantor", etc..) ou d'"espaces abstraits" dont l'étude était motivée par le souci d'étendre l'utilisation du calcul différentiel à des problèmes où la variable n'était plus un nombre ou une collection finie de nombres mais un "système à une infinité de degrés de liberté", comme disent les physiciens (exemple d'une telle variable : la distribution des vitesses à l'intérieur d'un fluide en mouvement). La théorie des ensembles est donc née d'un souci très pragmatique, celui de pousser plus loin encore l'utilisation de l'outil extraordinaire qu'était le calcul différentiel. Mais la hardiesse de la nouvelle démarche en rendait l'utilisation plus délicate, des paradoxes apparaissaient qui laissaient les mathématiciens embarrassés et inquiets, poussant même certains d'entre eux à vouloir complètement extirper "l'infini" du discours mathématique (exemple extrême de cette attitude : on n'a pas le droit de parler du nombre π, puisqu'on n'en connaîtra jamais toutes les décimales !).

C'est dans ce contexte que David HILBERT a écrit son article "*Über das Unendliche*" ("Sur l'infini") (1925), article dont la volonté, nettement proclamée, sonne comme un manifeste :

"Nous allons étudier soigneusement les façons de former des notions et les modes d'inférence qui sont féconds ; nous allons les choyer, les étayer, et les rendre utilisables, chaque fois qu'il y a la moindre promesse de succès. Personne ne pourra nous chasser du paradis que Cantor nous a créé !".

L'idée essentielle de l'article est de faire une distinction très nette entre deux niveaux de lecture possible d'un texte mathématique : le niveau du CONTENU (signifié), où la véracité des affirmations est examinée par référence au sens du discours ; le niveau FORMEL, où la justesse du raisonnement se réduit à la stricte observation de règles de syntaxe convenues à l'avance, indépendamment du sens que l'on attache aux symboles. L'arithmétique élémentaire (celle de l'école primaire) est le seul domaine où la lecture au niveau du contenu suffise à entraîner la conviction du mathématicien, grâce à l'intuition universellement partagée de ce que signifie un nombre entier. Au-delà de ce domaine, la pensée mathématique s'évade en forgeant des concepts "idéaux" (quelques exemples en vrac : la notion de "suite décimale illimitée" ; le "point à l'infini", intersection de deux droites parallèles ; le "nombre imaginaire" i dont le carré vaut -1 ; etc...). Les propositions portant sur ces concepts sont donc des propositions IDEALES, sans véritable significations de contenu (leur examen ne peut se réduire à de simples vérifications portant sur des nombres entiers explicites). Comment donc les manipuler ? En FORMALISANT intégralement le discours mathématique, comme plusieurs auteurs avaient entrepris de le faire vers les années 1900. Ainsi traduit en un "discours codé", simple assemblage de signes cabalistiques soumis à des règles de syntaxe tenant lieu de logique, le discours mathématique complètement dépouillé de sa fonction signifiante devient un OBJET aussi explicite, et justiciable du même type d'étude, que les objets (nombres) de l'arithmétique élémentaire ; bref, le discours mathématique peut être transformé en objet d'étude mathématique ! La pensée mathématique peut s'étudier elle-même ! Et l'on peut ainsi faire entrer dans le champ des mathématiques des questions qui semblaient réservées aux philosophes, comme : tout problème mathématique bien posé peut-il en principe être résolu ? Hilbert répond par l'affirmative, et dans la même foulée propose une solution d'un problème mathématique qui avait jusqu'alors défié toutes les attaques : la démonstration de l'"hypothèse du continu" de Cantor (selon laquelle il n'existerait pas d'ensemble "plus nombreux" que l'ensemble des nombres entiers et "moins nombreux" que l'ensemble des points d'un segment de droite). Malheureusement cette partie de l'article de Hilbert est restée obscure à tous ceux qui ont essayé de la lire, et il y avait une bonne raison à cela : en 1963, Paul COHEN devait démontrer que l'HYPOTHESE DU CONTINU EST INDEMONTRABLE, c'est-à-dire que si un système formel du type de celui de Hilbert est non contradictoire quand on lui adjoint l'hypothèse du continu, il l'est aussi quand on lui adjoint la négation de cette hypothèse !

Par ailleurs, l'idée que tout problème bien posé peut être résolu était contredite dès 1931 par un résultat de GÖDEL (non-complétude de l'arithmétique axiomatique) : dans tout système axiomatique contenant les axiomes "usuels" de l'arithmétique, il existe des propositions d'arithmétique qui ne sont NI DEMONTRABLES NI REFUTABLES !

Cela ne défie-t-il pas le bon sens ? N'est-il pas "évident" que toute proposition concernant des nombres entiers (ces objets si familiers !) doit être vraie ou fausse ? Mais sommes-nous si sûrs que l'arithmétique axiomatique nous parle vraiment des "nombres entiers" qui nous sont familiers ? Ne vous souvenez-vous pas d'avoir ressenti une inquiétude lorsqu'au sortir de l'école primaire vous avez vu votre professeur de mathématiques faire des calculs où des LETTRES x, y, z..., censées représenter des nombres INCONNUS, étaient traitées comme de "vrais" nombres ?

Formaliser, n'est-ce pas un peu l'aventure ?

5 - La méthode formaliste...

Par delà l'échec de ses ambitions, l'article de Hilbert reste précieux par son analyse pénétrante du rôle de la "METHODE FORMALISTE" en Mathématiques. Dans sa pratique quotidienne, le mathématicien essaie souvent de réduire sa pensée en "FORMULES" qu'il pourra manipuler de façon mécanique en oubliant (provisoirement !) la signification des symboles. Cela ne signifie nullement que l'idéal du mathématicien soit de se transformer en automate : l'étape de formalisation intervient au bout d'un long processus de maturation au cours duquel il a intériorisé un réseau d'idées, d'intuitions, de correspondances plus ou moins vagues entre diverses bribes de son expérience ; la réduction de tout ce réseau en formules n'est pas un but en soi, mais le SIGNE que le processus de maturation est arrivé à son terme ; c'est aussi le moyen pour le mathématicien de se libérer l'esprit, et un tremplin pour de nouvelles idées, de nouvelles intuitions.

IDEALISATION, et FORMALISATION (la seconde étant l'instrument de la première) sont les deux mots-clefs de la description de la pratique mathématique selon Hilbert. Et la conclusion de son article mériterait d'être citée en exergue de tous les ouvrages d'enseignement de mathématiques : "LA LOGIQUE SEULE NE SUFFIT PAS ; L'INTUITION EST INDISPENSABLE".

Mais l'article de Hilbert n'est pas seulement description de la pratique mathématique, il est aussi programme : il propose au mathématicien de s'astreindre à une discipline très stricte, qui consiste à éviter tout amalgame entre ses deux niveaux de pensée : niveau du "contenu signifié", niveau "formel".

Nul ne doutera aujourd'hui que cette discipline soit une gymnastique stimulante et féconde. Mais est-il réaliste d'y voir davantage qu'une gymnastique, et de l'ériger en règle absolue ? La conduite d'un raisonnement mathématique ne met-elle pas souvent en jeu des glissements subtils, difficiles à déceler, entre la forme et le sens ? Questions délicates, que l'idéologie dominante tend à ignorer délibérément, faisant semblant de croire que les mathématiciens sont capables de "décanter" complètement leur pensée, de la réduire en formulations que l'on puisse vider de toute signification. En parlant ici d'"idéologie", j'emprunte à Georges REEB sa distinction entre "l'idéologie formaliste" (qu'il dénonce) et la "méthode formaliste" (en laquelle il reconnaît une composante importante de la pensée mathématique). La distinction est parfois délicate à déceler, et tient par exemple dans l'humour de V. ARNOLD écrivant dans l'introduction d'un de ses articles :

"Dans ce qui suit, j'ai tâché, conformément à l'appel de N. Bourbaki, de substituer toujours les calculs aveugles aux idées lucides d'Euler". [1]

6 - ... et l'idéologie formaliste

Un texte précieux pour qui veut analyser l'idéologie formaliste est l'introduction du traité de Nicolas BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques, Théorie des Ensembles* (éd. de 1970).

"Depuis les Grecs — commence Bourbaki — *qui dit mathématique dit démonstration". Or la recherche de la "correction" (ou "rigueur") dans les démonstrations pousse le mathématicien à rédiger ses textes de façon "FORMALISEE". L'un des traits originaux de la mathématique contemporaine est d'avoir systématisé l'emploi de la "METHODE AXIOMATIQUE", ou "art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir". Le bénéfice est double : RIGUEUR d'une part, GENERALITÉ de l'autre ("cette faculté de donner des contenus multiples aux mots ou notions premières d'une théorie est même une importante source d'enrichissement de l'intuition du mathématicien..."). Un autre trait original de la Mathématique contemporaine est la possibilité de concevoir un LANGAGE FORMALISE UNIQUE, UNIVERSEL : "Alors qu'autrefois on a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières qui lui fournissaient notions et vérités premières, ce qui eût entraîné pour chacune la nécessité d'un langage formalisé qui lui appartînt en propre, on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles".*

En principe, un texte mathématique est d'autant plus "PARFAIT" qu'il est rédigé dans un langage plus proche de ce langage formalisé universel. Malheureusement un texte "parfait" serait d'une longueur rédhibitoire, c'est pourquoi on s'autorise des "ABUS DE LANGAGE", grâce auxquels le traité de Bourbaki est finalement écrit "COMME LE SONT EN PRATIQUE TOUS LES TEXTES MATHEMATIQUES, c'est-à-dire en partie en langage courant et en partie au moyen de formules constituant des FORMALISATIONS PARTIELLES, PARTICULIERES ET

INCOMPLETES, et dont celles du calcul algébrique fournissent l'exemple le plus connu''. ''Souvent même on se servira du langage courant de manière plus libre encore...'' par des indications intraduisibles en langage formalisé... par des ''commentaires destinés à rendre plus claire la marche des idées, au besoin par un appel à l'intuition du lecteur...''.

Ce texte de Bourbaki, que je viens de tenter de résumer, ne peut pas être discuté et critiqué comme un texte quelconque. Bourbaki est un mathématicien aux talents trop multiples pour ne pas être conscient de la diversité des formes que peut prendre la pensée mathématique, et si son texte en privilégie certains aspects cela ne veut pas dire que les autres aspects lui soient étrangers. Mais ce texte est remarquable en sa façon de condenser de façon très claire quelques ''idées-forces'' qui ont imprégné les mathématiques de ces dernières décennies à tous les niveaux. Il est donc une référence très commode pour quiconque veut critiquer la trace que ces idées ont laissée dans la pratique des mathématiques, et surtout dans leur enseignement.

1ère IDEE : La RIGUEUR passe nécessairement par la FORMALISATION, dont elle est le but essentiel.

Pourtant, un mathématicien d'aujourd'hui qui relit les textes d'Archimède concernant les calculs d'aires et de volumes (''quadrature de la parabole'', etc...) trouve là des démonstrations écrites en langage non formalisé, qui pourtant ''du point de vue de la rigueur ne laissent rien à désirer'' (ce n'est pas seulement moi qui le pense, c'est aussi Bourbaki : cf. *Eléments de Mathématiques, fonctions d'une variable réelle*, note historique des chap. 1, 2, 3).

Inversement, la naissance du calcul intégral à partir du 17ème siècle s'est caractérisée par une FORMALISATION AUX DEPENS DE LA RIGUEUR, et il a fallu attendre la fin du 19ème siècle pour réconcilier l'efficacité de cette formalisation avec la rigueur d'Archimède.

Toujours à propos de cette première idée, on notera l'absence, dans le texte de Bourbaki, de toute référence à l'''IDEALISATION'', qui pour Hilbert était la motivation principale de la formalisation. Est-ce un hasard si l'enseignement secondaire d'aujourd'hui évite autant qu'il le peut d'idéaliser quoi que ce soit ? Si l'on continue à dire aux enfants qu'un ''point géométrique'' est une ''idéalisation'' du point marqué sur une feuille de papier par un crayon très bien taillé, c'est parce que (Dieu merci !) on n'a pas trouvé le moyen de présenter les choses autrement à ce niveau là ! Mais on se garde bien dans les Lycées de définir les nombres complexes en adjoignant aux nombres usuels un ''nombre imaginaire'' i dont le carré vaut -1 : ça n'a pas l'air sérieux, et les mathématiques sont une chose sérieuse ! On préfère dire qu'un nombre complexe est un ''couple de nombres'' (en parachutant la loi de multiplication), ou bien une matrice 2×2, et peu importe si la définition est complètement artificielle, au moins elle a l'air sérieux !

2ème IDEE : Il existe une FORMALISATION UNIVERSELLE...

Il est certes agréable, d'un point de vue philosophique, de se dire que tous les concepts mathématiques peuvent, si l'on veut, être formulés en termes de théorie des ensembles...

Mais cela justifie-t-il qu'on fasse apprendre aux enfants ce chef-d'œuvre de pédantisme qu'est la définition suivante :

"Un nombre est PREMIER si l'ensemble de ses diviseurs est une paire" ?

En quoi cette définition est-elle plus précise que

"Un nombre est premier si on ne peut pas l'écrire comme produit de deux nombres différents de 1" ?

définition qui a au moins l'avantage de la transparence !

2ème IDEE (suite)...

et tout ce qui s'en écarte n'est qu'ABUS DE LANGAGE.

"Nous dirons, par abus de langage..."

Combien de fois avez-vous lu cette expression dans des ouvrages récents d'enseignement de mathématique ? Faut-il en déduire que le mathématicien prend un plaisir pervers à "abuser du langage" en toutes occasions ? Ou, au contraire, que la haute conscience qu'il a des "bons usages" du langage l'a rendu tellement scrupuleux qu'il se sent obligé, chaque fois qu'il ouvre la bouche, de s'excuser de ne pas s'y conformer ? J'inclinerais pour la seconde interprétation, tout en faisant remarquer à ces gens si scrupuleux qu'ils n'ont pas besoin de s'excuser à chaque fois, puisque Bourbaki s'est excusé (et nous a excusés) une fois pour toutes dans son introduction, en avouant que le seul texte mathématique qui ne soit pas abus de langage est LE TEXTE MYTHIQUE DONT L'EXISTENCE POTENTIELLE (jamais réalisée) EST POSTULEE AU DEBUT DE SON OUVRAGE.

Soyons donc rassurés : Bourbaki nous autorise, par son exemple, à utiliser des formalisations "partielles et incomplètes" comme celle du calcul algébrique usuel !

... et il nous autorise même à UTILISER LE LANGAGE POUR EXPRIMER DES IDEES !

7 - Des polynômes, des mathématiciens, et des ordinateurs

Mais trêve d'ironie facile ! Et parlons un peu du calcul algébrique, ce domaine où la formalisation semble n'avoir laissé aucune zone d'ombre. Une des notions de base est celle de "POLYNÔME", dont les écoliers *rencontrent* assez tôt des exemples, comme le "trinôme du second degré". Par exemple un élève de Quatrième comprendra sans peine le sens d'une expression comme $9x^2 + 6x + 1$; il saura en calculer la valeur numérique pour toute valeur donnée à x, autrement dit il saura interpréter cette expression comme définissant une "fonction" de la "variable" x; il saura aussi effectuer des "calculs formels" comme

$$9x^2 + 6x+1 = (3x+1)^2 ,$$

indépendamment de toute valeur numérique attribuée à x, et même INDEPENDAMMENT DE TOUTE SIGNIFICATION ATTACHÉE A x ! Il est amusant de remarquer que la tendance spontanée au formalisme aveugle chez l'apprenti mathématicien (les élèves ont si souvent tendance à oublier la signification de ce qu'ils écrivent !) rejoint ici l'attitude du mathématicien chevronné, qui pour avoir eu l'occasion d'attribuer à x des significations très diverses ("variable complexe", "matrice", etc...) connait l'efficacité de la notion PUREMENT FORMELLE de POLYNÔME à UNE INDETERMINEE X (cf. la phrase déjà citée de Bourbaki : "cette faculté de donner des contenus multiples aux mots..." etc.).

Voilà donc un domaine où la mathématicien semble savoir parfaitement séparer les deux aspects "forme" / "contenu signifié" de ce qu'il écrit. Et s'il en est ainsi, le calcul formel des polynômes devrait pouvoir être effectué mécaniquement par un ordinateur convenablement programmé. Et effectivement, une recherche est en cours sur ce problème depuis plusieurs années, avec déjà des programmes "qui tournent". Mais l'un des chercheurs les plus engagés dans cette voie, Michel DEMAZURE (géomètre algébriste bien connu) s'amuse ces temps-ci à choquer ses collègues mathématiciens en leur disant :

"Je n'ai toujours pas compris ce que c'est qu'un polynôme !"

Son problème est le suivant : on sait déjà "expliquer à un ordinateur" les règles de calcul (addition, multiplication, division euclidienne, etc.) des polynômes dont les coefficients sont des nombres donnés (comme les polynomes écrits ci-dessus), ou même de ceux dont les coefficients sont des paramètres non donnés au départ (comme le polynôme ax^2+bx+c, par exemple) ; mais il arrive aux mathématiciens de faire des calculs portant sur d'autres types de polynômes, par exemple

"le polynôme $x^n - 1$"

où la lettre n désigne un nombre entier NON PRECISÉ.

Puisque les mathématiciens ont su expliquer à l'ordinateur leur façon de traiter des expressions formelles où la lettre x désigne une "indéterminée", on pourrait les croire capables de lui expliquer aussi comment faire de l'exposant n une indéterminée : en fait, ils n'en sont pas capables, du moins pour le moment !

Pourtant eux-mêmes savent calculer avec de tels polynômes : mais c'est parce que lorsqu'ils lisent

$$x^n - 1$$

ils INTERPRETENT n comme symbolisant l'un quelconque des nombres de la suite indéfinie 0, 1, 2, 3, etc... ; le problème que M. Demazure ne sait pas résoudre est celui de dégager des REGLES FORMELLES permettant de se passer de cette interprétation.

Et pourtant, que d'encre a été dépensée, dans de savants ouvrages universitaires, à écrire des définitions formelles des polynômes, définitions tellement sophistiquées qu'on a bien du mal à y reconnaître les êtres mathématiques somme toutes très simples dont j'ai parlé plus haut ! Si ces définitions hyperformalisées ne sont d'aucun secours pour résoudre un problème aussi naturel que celui de Demazure, à quoi servent-elles ? — Autant que je sache, à RIEN ! Ce ne sont que des "coquetteries de style", dont le seul avantage (?!) sur la façon naïve que j'ai eue de présenter ici les polynômes est de donner l'ILLUSION d'une définition plus proche du "langage formalisé universel" dans lequel, selon le mythe formaliste, les mathématiques sont censées pouvoir être écrites !

8 - "Prendre les mathématiques à leur début..."

Il y a quelques années, des étudiants de première année du 1[er] cycle de "Sciences de la vie", à qui j'enseignais les mathématiques, m'ont reproché de leur proposer des exercices trop "abstraits". Fort étonné de ce reproche, car je m'étais efforcé de fabriquer beaucoup d'énoncés d'exercices non purement mathématiques (désintégration d'atomes radioactifs, vitesse de mobiles, etc...), je leur demandai ce que seraient pour eux des exercices "concrets" : "Eh bien — me dirent-ils — ce sont des exercices où il y a des formules". J'ai d'abord mis cette réponse sur le compte de l'enseignement trop formel qu'ils avaient reçu au Lycée. Puis, à la réflexion, j'ai trouvé que leur réponse n'était pas si paradoxale qu'elle m'avait paru d'abord : de même que le bois est le matériau concret sur lequel travaille le menuisier, n'est-il pas juste de dire que les FORMULES SONT LE MATERIAU CONCRET DU MATHEMATICIEN ? Ceci dit, apprendre à travailler le bois, ce n'est pas seulement acquérir les automatismes du maniement de la scie, de la râpe, etc., c'est aussi apprendre à adapter ces automatismes au BUT à atteindre, en un mot c'est acquérir l'INTELLIGENCE du travail du bois. De même, apprendre les mathématiques c'est apprendre à acquérir l'INTELLIGENCE DES FORMULES, c'est-à-dire apprendre à s'en servir à bon escient, apprendre à passer d'un niveau de formalisation à un autre (comme le menuisier change d'outil en fonction du but à atteindre)... Il y a chez les apprentis mathématiciens un "formalisme naïf" qui croit que les formules A ELLES SEULES détiennent la capacité de résoudre tous les problèmes. Ce qui fait la difficulté des mathématiques (aussi bien de leur apprentissage que de la recherche la plus avancée), c'est que le DESIR de simplification qu'exprime ce formalisme naïf (désir présent au fond de tout mathématicien) se heurte à une REALITE toujours plus complexe qu'on le souhaiterait, qui nous oblige non pas à rejeter mais à DEPASSER ce formalisme *naïf*. C'est ainsi que les difficultés d'adaptation d'un formalisme à son objet, ou bien les difficultés inhérentes à ce formalisme, provoquent une réflexion qu'on tentera peut-être de réduire par le recours à un formalisme "de niveau supérieur" (par exemple, l'"arithmétique formelle" de la classe de Sixième, c'est-à-dire la pratique des quatre opérations sur des nombres entiers non connus explicitement, devient très vite impraticable du fait que la soustraction n'est pas toujours possible — ce qui n'avait aucune importance dans l'arithmétique de l'école primaire, où l'on pouvait toujours s'arranger pour n'écrire que des soustractions "permises" — ; c'est pour résoudre cette difficulté que l'on introduit les "nombres négatifs"). Mais c'est une grave erreur que de croire qu'un formalisme "de niveau supérieur" soit nécessairement "meilleur", dans un sens absolu, que le formalisme dont il est issu : par exemple si belle que soit la géométrie algébrique complexe, elle rejette dans l'ombre de nombreuses questions très naturelles de géométrie algébrique réelle. Passer au niveau supérieur de formalisation simplifie la réflexion, mais c'est un peu une fuite devant certaines difficultés de la réalité mathématique. Ce qui est le plus important, et aussi le plus difficile, dans l'apprentissage des mathématiques, c'est donc d'apprendre à adapter la formalisation à son objet : cela implique qu'on se pose la question du "pour quoi faire", et qu'on apprenne à "lire le sens" derrière la forme. Or c'est précisément ce que l'idéologie formaliste nous incite à ne pas faire !

On comprend trop bien le succès de cette idéologie auprès des enseignants : il est tellement plus confortable de faire semblant de croire que la pensée mathématique se réduit à un discours formel à un seul niveau, que l'on peut dérouler sans discontinuité en suivant des règles de pure logique ! S'il y a des trous dans la compréhension des élèves, ce n'est pas parce qu'il y a des trous dans le discours qu'on leur tient, c'est parce que leur "habitude du raisonnement mathématique" leur "pouvoir d'abstraction" sont encore insuffisants : employons-nous donc à les doter de ce "pouvoir d'abstraction", en leur donnant dès leur plus jeune âge un enseignement aussi formel que possible, à base de théorie des ensembles bien entendu ! Commençons la classe de Sixième en leur faisant enfermer des lettres de l'alphabet *a, b, c*... dans des "patates", de façon à leur expliquer ce qu'est l'union etc... de deux ensembles, ce qui les aidera(?) à comprendre ce qu'est la somme $a+b$ de deux nombres entiers (tiens ! voilà que a et b sont des nombres à présent !). En Cinquième, les mêmes patates zébrées de flèches (gratifiées du beau nom de "diagrammes sagittaux") permettront, après seulement un mois d'efforts, de parler de relations d'équivalence et d'ensembles-quotients, grâce à quoi on pourra définir les nombres négatifs comme classes d'équivalence de couples... etc. — Qu'y a-t-il là de consternant ? N'est-ce pas LA vraie définition selon le traité de Bourbaki, qui fait autorité ? Et puisque ce traité "prend les mathématiques à leur début", le rôle de tout professeur de mathématiques n'est-il pas d'amener les élèves à acquérir le plus tôt possible le "pouvoir d'abstraction" nécessaire pour comprendre les définitions de Bourbaki ?

Qu'on me comprenne bien : je ne suis pas du tout en train de faire le procès de Bourbaki, mais seulement celui d'une certaine façon de percevoir son message. Que son traité prétende "prendre les mathématiques à leur début" ne me choque en aucune façon : les mathématiciens aiment bien faire semblant de "tout reprendre à zéro" ; voir des notions élémentaires, assimilées par eux depuis longtemps, trouver une place naturelle dans leur formalisme tout neuf augmente leur confiance en ce formalisme. Mais c'est une grave erreur de perspective que de voir en un formalisme "de niveau supérieur", conçu pour répondre à des besoins plus sophistiqués, la justification de notions élémentaires que l'on peut introduire de façon plus naïve.

Quel problème délicat que celui de choisir le "niveau de naïveté" (ou le niveau de formalisme) adéquat ! Et lorsqu'on a goûté au confort du niveau le plus élevé de formalisation, qu'il est tentant de s'y installer définitivement, soit par préférence délibérée, soit même parfois parce que les sauts d'un niveau à un autre nous sont devenus si familiers que nous n'avons même plus conscience de leur existence ! Il y a une dizaine d'années, à l'occasion d'une grève, nos étudiants de Maîtrise de mathématiques de Nice ont pris l'initiative d'une "table ronde" au cours de laquelle ils nous ont dit ce qu'ils pensaient de notre enseignement :

"Quand nous étions au Lycée — nous ont-ils dit en substance — nous comprenions où nos professeurs de mathématiques nous emmenaient ; depuis que nous sommes à l'Université, nous avons l'impression d'être conduits en aveugles, sans savoir où nous allons : pourquoi ces "foncteurs", ces "suites exactes", etc. ?"

"Ne vous inquiétez pas, — leur répondit l'un de leur assistants — j'ai eu le même sentiment que vous pendant toutes mes études universitaires, et c'est seulement maintenant que je commence à comprendre où j'allais !".

Belle conception ésotérique de l'enseignement, à laquelle il faut bien reconnaître une certaine efficacité si le but est de sélectionner quelques "initiés" ! (l'assistant auteur de cette réponse est aujourd'hui un expert mondialement reconnu en géométrie algébrique).

9 - Le langage des mathématiques modernes

L'expression "Mathématiques modernes" évoque dans l'esprit du public l'idée d'un changement radical, alors que les mathématiciens professionnels insistent sur la CONTINUITE de l'évolution des mathématiques. Mais si cette continuité est indéniable sur le plan des IDEES, il est bien vrai que la FAÇON D'ECRIRE LES MATHEMATIQUES a subi au cours de ce siècle une transformation radicale. Ce phénomène mériterait une longue étude, et je me bornerai à esquisser quelques réflexions personnelles. Il est courant aujourd'hui d'entendre des mathématiciens se plaindre de la difficulté qu'ils ont à lire les textes mathématiques anciens (disons, vieux de plus d'un demi-siècle), auxquels ils reprochent surtout le manque de précision dans l'expression, pouvant prêter parfois à de sérieuses ambiguïtés. D'un autre côté, la lecture de la plupart des textes mathématiques modernes présente un autre type de difficulté dont même un profane peut se faire une idée rien qu'à regarder l'apparence du texte : ça n'a pas l'air d'être du langage humain, c'est encombré de signes cabalistiques qui occupent parfois plus de place que les phrases en langage courant. Ne voir en ce phénomène qu'un effet de mode, produit par l'idéologie formaliste, serait sans doute trop schématique. Réduite à des formules cabalistiques, l'expression de la pensée se trouve figée sous une forme que les erreurs d'interprétation du lecteur ne peuvent altérer, ce qui présente un avantage certain pour un texte écrit. Mais comme le décryptage d'un texte écrit de cette façon demande au lecteur un plus gros effort de concentration (même pour un mathématicien professionnel rompu à cette gymnastique), un rédacteur soucieux de ses lecteurs devrait se demander chaque fois, avant de transcrire sa pensée sous forme cabalistique, si une transcription bien choisie "en langage humain" ne pourrait pas offrir le même degré de précision. Là encore la paresse des rédacteurs trouve un auxiliaire précieux en l'idéologie formaliste, car il est tellement plus facile de ne pas se poser ce genre de question !

Que le rédacteur d'un article de recherche cède à ce genre de paresse n'est encore pas trop grave, car après tout l'essentiel est que ses idées soient transmises, peu importe comment. De plus,les textes écrits ne sont pour les chercheurs qu'un moyen parmi d'autres de transmettre leurs idées, et deux chercheurs discutant devant un tableau noir utilisent en général un langage beaucoup plus proche du langage courant que celui de leurs textes écrits : le danger de malentendu est dans ce cas amoindri par la possibilité du dialogue. Mais dans un système d'enseignement où la part du dialogue est si réduite, comment s'étonner que le recours trop systématique au langage cabalistique fasse tant de dégâts ? Comment s'étonner que certains professeurs, coupés de toute forme de recherche ou de dialogue avec les chercheurs, voient en l'apparence absconse de tant d'écrits mathématiques un reflet fidèle de la façon dont pensent les mathématiciens ? Comment les rendre responsables de l'escalade du pédantisme dans l'enseignement secondaire, alors que l'image des mathématiques transmise par l'enseignement universitaire présente toutes les apparences de ce même pédantisme ?

Les mathématiciens ont trop facilement tendance à oublier l'importance du rôle du langage dans l'acquisition des concepts (cf. [6] [10] [12]). Une conception trop formaliste du langage mathématique peut être stérilisante en conduisant à négliger les ressources très riches du langage courant : l'idée de "distributivité" n'est-elle pas en germe dans l'utilisation des substantifs "dizaines", "douzaines", etc... du langage courant (par exemple 5 douzaines + 2 douzaines = 7 douzaines) ? Bien sûr il ne faudrait pas tomber dans l'excès inverse, et minimiser le rôle capital que joue la formalisation dans la pensée mathématique. Mais encore faut-il savoir la faire intervenir au bon moment ! Une formalisation précoce fige les idées avant que l'esprit en ait assimilé toute la richesse : tel élève de Sixième qui sait parfaitement que "la distributivité c'est

$(a+b)c = ac+bc$" est incapable de faire le moindre exercice où intervient l'idée de distributivité ; tel bachelier qui sait parfaitement écrire la définition de la dérivée d'une fonction, calculer des dérivées et dresser des "tableaux de variation", révèle à l'occasion d'exercices simples mais inhabituels son incompréhension totale de la notion de dérivée, etc.

Enfin, dénoncera-t-on assez le verbalisme pédant, le respect maniaque d'une terminologie étriquée, la tyrannie d'une syntaxe tatillonne que l'on a trop tendance à confondre avec la rigueur de pensée !

Acceptons l'idée que le langage doit servir la pensée et non se substituer à elle, et qu'il doit donc garder une certaine souplesse, indispensable à l'expression de toute pensée humaine. On verra alors que la langue mathématique est une langue simple, telle qu'un élève ayant compris une idée soit parfaitement capable de l'exprimer avec ses propres mots, sans avoir à apprendre par cœur des formulations boursouflées !

10 - Apprendre à réfléchir...

Après les considérations qui précèdent, on comprendra pourquoi le dilemme "apprendre à raisonner ou apprendre des recettes", évoqué dans l'introduction, m'a toujours paru suspect : ce que j'ai appelé l'"intelligence des formules" recouvre un savoir-faire aux multiples facettes, dont le raisonnement formalisé n'est qu'un aspect ; utiliser intelligemment de bonnes recettes ne nécessite pas forcément la connaissance de leur démonstration ; inversement, savoir suivre le mot à mot d'un raisonnement ne signifie pas qu'on ait compris l'idée qui l'a guidé ; bref, on peut être intelligent sans "raisonner", et l'exemple de la fin du paragraphe 3 montre comment on peut raisonner inintelligemment !

A la question "qu'apprendre à nos élèves ?" je ne sais pas répondre autre chose que : "APPRENONS LEUR A REFLECHIR !" — réponse facile, certes ; mais tâche d'une extrême difficulté pour le professeur ! Elle implique que celui-ci reconnaisse aux élèves le DROIT A L'ERREUR, car il y a des erreurs fécondes, et multiplier les "garde-fous" pour prémunir les élèves contre tous les types d'erreur imaginables est le meilleur moyen de les conduire à une paralysie stérile. Le professeur devra aussi leur reconnaître le DROIT A L'À-PEU-PRÈS, car la formulation parfaite de l'idée, qui mérite le nom de "raisonnement", n'est que l'aboutissement de travaux d'approche qui sont essentiels pour la formation de l'idée, et qui doivent donc être récompensés même s'ils n'aboutissent pas tout à fait (il ne s'agit pas de nier l'importance de la recherche de l'exactitude en mathématiques ! Je dis seulement que cette RECHERCHE est aussi importante que son aboutissement). Enfin, et c'est le plus difficile, le professeur devra accepter le risque d'être PRIS AU DÉPOURVU PAR L'IMAGINATION DES ÉLÈVES, car s'il a réussi à stimuler chez eux une véritable réflexion, il est impossible pour lui de prévoir les tours inattendus qu'elle pourra prendre.

On voit trop bien tous les obstacles que rencontre un tel programme : pour n'en citer qu'un, mentionnons l'idée (plaisamment évoquée dans [8]) selon laquelle "mathématique" est synonyme d'"exact", idée dont un corollaire est la croyance chez les correcteurs de copie en la possibilité d'une notation parfaitement objective (si on se met à permettre l'à-peu-près, la correction d'un devoir de maths va devenir aussi subjective que celle d'un devoir de philo ! — et pourquoi pas ?).

L'enjeu est important, car en démystifiant les mathématiques on contribue à lutter contre une forme d'obscurantisme moderne par laquelle des gens ayant pourtant reçu une formation scientifique (experts en sciences de la vie, sciences sociales, etc.) renoncent à tout esprit critique devant une affirmation quelconque relevant de leur compétence, pourvu que cette affirmation ait été "authentifiée" par une estampille mathématique (modèle statistique, etc.).

Il me paraît approprié de terminer par une citation d'un grand mathématicien qui a beaucoup écrit sur l'enseignement :

"... *La méthode d'exposition synthétique est en général la plus brève ; c'est aussi la plus facile à employer ; c'est enfin, dans l'enseignement qui s'adresse à de jeunes élèves, la plus commode au point de vue pédagogique de la "tenue de la classe". Voilà bien plus de raisons qu'il n'en faut pour expliquer qu'elle ait été presque exclusivement employée. Mais elle a de graves défauts : elle rebute bien des esprits ; elle donne à beaucoup d'autres une idée fausse de l'importance de la logique déductive dans la conduite de la vie ; cette dernière influence est très caractéristique chez certains élèves des grandes Ecoles où ils ont appris beaucoup de mathématiques, qu'ils ont oubliées pour se consacrer à la pratique, mais en conservant de cette éducation déductive un esprit trop logique, trop disposé à traiter toutes les questions comme un théorème*"...

(Emile BOREL, *La logique et l'intuition en mathématiques* (1907)).

Bibliographie

[1] V.I. ARNOLD, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier 16, 1 (1966), 319-361.

[2] S. BARUK, *Echec et maths*
Fabrice ou l'école des mathématiques
L'âge du capitaine
(coll. Science ouverte, éd. du Seuil).

[3] E. BOREL, *Oeuvres complètes* (éd. du CNRS 1972)
Lire notamment, dans le tome 3 : *La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions* (1909),
et dans le tome 4 : *La logique et l'intuition en mathématiques* (1907), *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire* (1904), etc.

[4] N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques* (Hermann 1940-19..).

[5] A. BOUVIER, *La mystification mathématique* (Hermann 1981).

[6] Y. CHEVALLARD, *Mathématique, langage, enseignement : la réforme des années soixante* (revue Recherches n° 41, sept. 1980).

[7] J. DIEUDONNÉ, *Devons-nous enseigner les "mathématiques modernes"* ? Bull. A.P.M.E.P. 292 (févr. 1974).

[8] G. TH. GUILBAUD, *Leçons d'à-peu-près* (Christian Bourgois, éd. 1985).

[9] J. HADAMARD, R. BAIRE, H. LEBESGUE, E. BOREL, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (reproduites dans [3]).

[10] N. HAUCHARD, *L'appropriation du concept de suite et de limite de suite chez les élèves du secondaire*. (Thèse, Université catholique de Louvain).

[11] D. HILBERT, *Über das Unendliche* (trad. anglaise : *On the infinite*, dans le volume collecté par J. van Heijenoort, *"From Frege to Gödel, a source book in Mathematical Logic"* Harvard Univ. Press 1967).

[12] C. LABORDE, *Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : langue naturelle et écriture symbolique*. Thèse d'état, Université de Grenoble I, 1982 (cf. compte rendu dans *Recherches en didactique des Mathématiques* 1983, vol. 4.2).

[13] J. LERAY, *L'initiation aux Mathématiques*, l'Enseignement Mathématique XII *3* (1966), *Les Mathématiques "modernes"*, Gazette des Mathématiques, G4 (1971).

[14] R. THOM, *"Modern" mathematics : an education and philosophic error ?* American Scientist (nov. 1971).

[15] M. WOLF, *La bosse des maths est-elle une maladie mentale ?* (éd. La Découverte, 1985).

[16] M. ZERNER, F. EYSSETTE, M. GUYOT, D. THILLAUD, Bull. A.P.M.E.P. 318 (avril 1979).