étude

papier quadrillé et calcul de pi

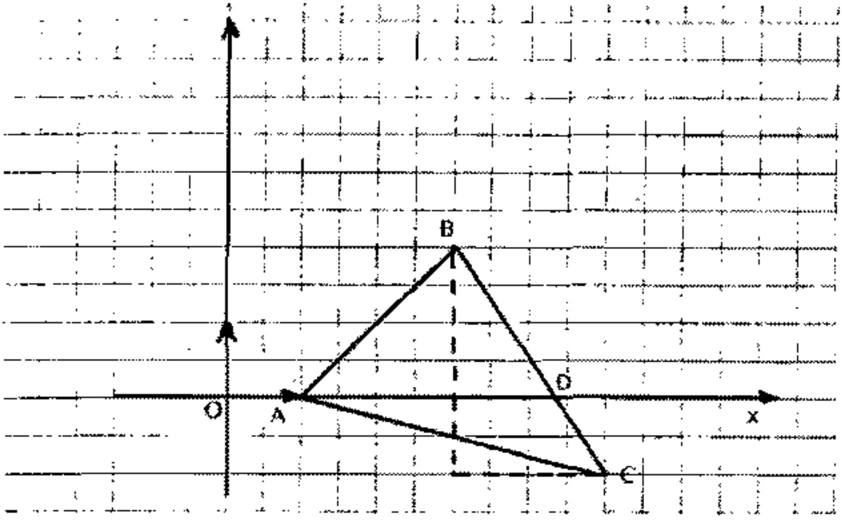
par Bruno Gréco,
Toulouse

L'usage conjugué du papier quadrillé et de l'informatique de poche a motivé et permis cette étude. On y fabrique une famille de formules adaptées au calcul effectif de π et un critère théorique mesure la rapidité de chacune d'elles. La course au record est d'ailleurs ouverte...

A quoi est dûe la fascination exercée sur tant d'esprits (j'espère bien ne pas être le seul en tout cas) par le papier quadrillé ? Ses possibilités au plan ludique (du morpion au jeu de la vie) sont pratiquement infinies. Dans la pratique mathématique élémentaire, il est le support naturel et obligé des notions de coordonnées et de coefficient directeur. Voici deux exemples récents qui montrent clairement son utilité :

1 - (Bac F1 Toulouse Juin 85) : *On donne $A(1,0)$ $B(3,2)$ $C(5,-1)$ et $\{D\} = (Ox) \cap (BC)$... Calculer à 0,1 degré près les angles du triangle ABC.* L'énoncé était accompagné de la figure sur papier non quadrillé, ce qui empêchait de lire la réponse la plus simple :

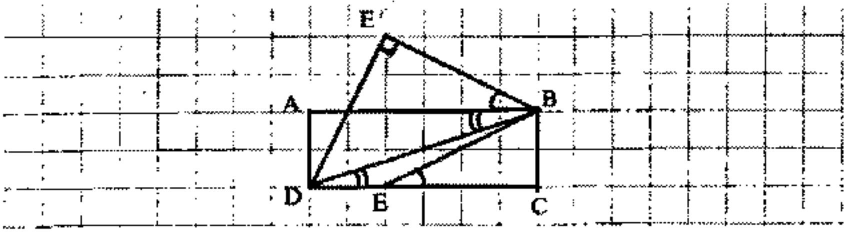
$\hat{A} = 45° + \tan^{-1}(1/4)$ $\quad\quad \hat{B} = 45° + \tan^{-1}(2/3)$
et $\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$ bien sûr.



2 - (page 6 bull. APMEP régionale toulousaine Avril 85) : *le rectangle ABCD est tel que AB = 3AD; on marque sur [DC] le point E tel que DE = DA. Quelle relation existe-t-il entre BEC et BDC ?* Là encore, figure sur papier non quadrillé. Comment dès lors voir simplement que le triangle DBE′ (E′ symétrique de E par rapport à (AB))est rectangle isocèle en E′ ? Notons que la relation

$$\tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3) = \pi/4$$

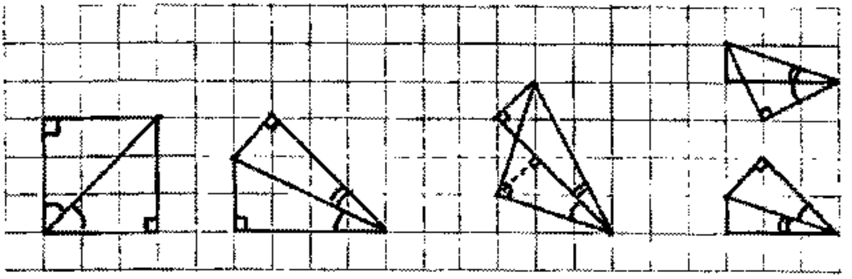
établie dans cet exercice, fait l'objet du B du problème Bac C Amiens 83 (où elle résulte de manipulations d'analyse plutôt alambiquées).



Nous allons généraliser l'esprit de ce dernier exercice pour trouver d'autres formules donnant π (dont la célèbre formule de MECHIN), en cherchant, de plus, une efficacité du point de vue du calcul pratique de ses décimales.

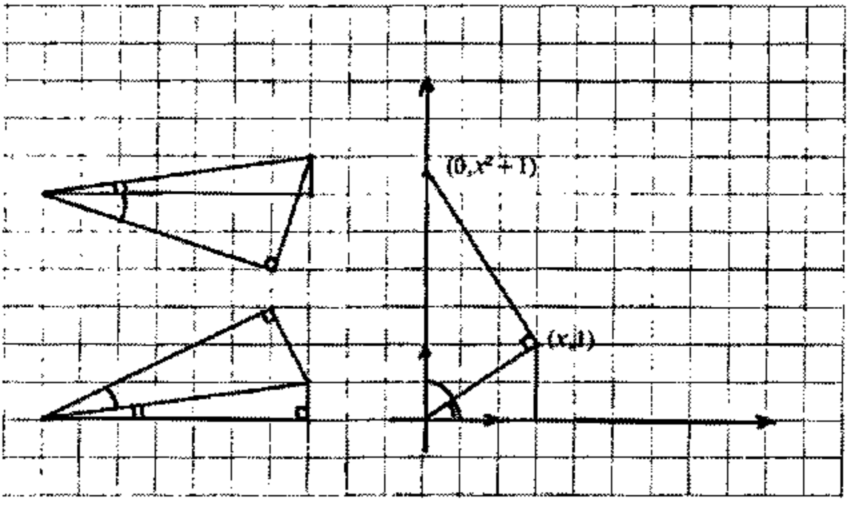
L'exposé qui suit se présente sous forme de thème avec activités de niveau terminale et parfois plus (de nombreuses notions du programme de Terminale s'y trouvent investies). Papier (quadrillé !), crayon et moyens de programmation sont à prévoir.

1. Des dessins à observer



A : $\pi/2 = 2\tan^{-1}(1)$ soit $\pi/4 = \tan^{-1}(1)$

B : $\pi/4 = \tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$



C : $\tan^{-1}(1/2) = \tan^{-1}(1/3) + \tan^{-1}(1/7)$

D : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(1/x) = \dfrac{\pi}{2} \text{ mod. } \pi$

ACTIVITÉS

A1 - Illustrer les relations :

* $\tan^{-1}(1/3) = \tan^{-1}(1/5) + \tan^{-1}(1/8)$
* $\pi/4 = 2\tan^{-1}(1/3) + \tan^{-1}(1/7)$
* $\tan^{-1}(1/3) = \tan^{-1}(1/4) + \tan^{-1}(1/13)$

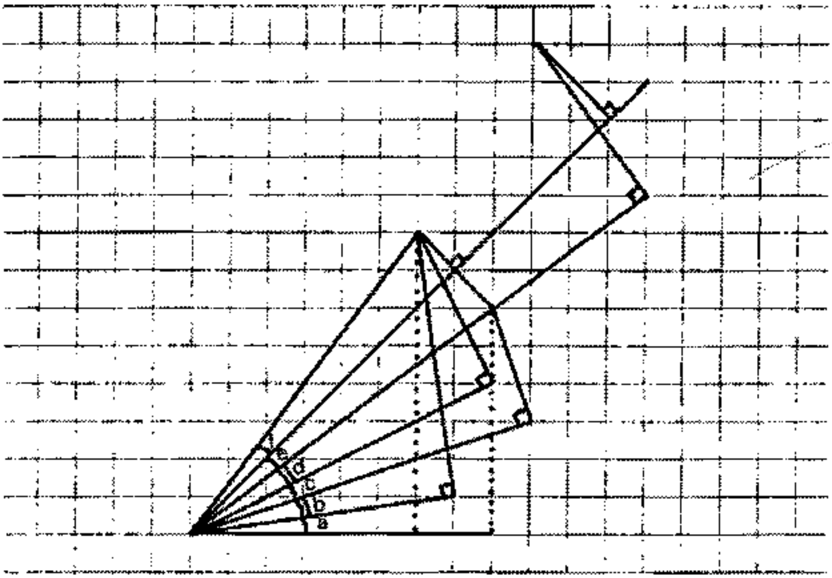
A2 - Quelles relations lisez-vous sur la figure ci-dessous (en particulier les valeurs de $2\tan^{-1}(1/2)$ et $2\tan^{-1}(1/3)$)

Montrer que :

$a = c = e = f = \tan^{-1} 1/7$ *et que* $b = d = \tan^{-1} 2/11$

Compléter la figure pour montrer que

* $2\tan^{-1} 1/7 = \tan^{-1} 7/24$



Ce dernier exemple montre qu'il est temps de trouver un procédé algébrique pour établir de telles relations si on ne veut pas gaspiller trop de papier quadrillé ! Voyons maintenant l'intérêt pratique de ces petits dessins pour le calcul de π.

2. Calcul effectif de $\tan^{-1} 1/x$ (pour x entier > 1)

Pour u réel et n entier naturel, posons :

$S_{2n+1}(u) = u - u^3/3 + u^5/5 \ldots + (-1)^n u^{2n+1}/2n+1$

On démontre :

Théorème 1 : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\tan^{-1}u - S_{2n+1}(u)| < \frac{|u|^{2n+3}}{2n+3}$$

A3 - Démontrer le théorème au niveau terminale, en utilisant $\tan^{-1}u = \int_0^u \frac{dt}{1+t^2}$
A4 - Ecraser la même mouche avec le marteau de la théorie des séries entières (pour $u \in [-1,1]$*)*

Fixons u dans l'intervalle $[-1,1]$. Le théorème 1 montre alors que $S_{2n+1}(u)$ converge vers $\tan^{-1}u$ (puisqu'on peut majorer par $\frac{1}{(2n+3)}$, S_{2n+1} converge même uniformément vers $\tan^{-1}u$ sur $[-1,1]$).

On écrit : $\forall u \in [-1,1]$ $\tan^{-1}u = u/1 - u^3/3 + u^5/5 - u^7/7 + \ldots$ ce qui constitue le *développement en série entière* de $\tan^{-1}$ sur $[-1,1]$.

Mais le théorème 1 donne surtout une mesure de la vitesse de convergence (d'autant meilleure que u est proche de 0).

La formule ci-dessus est particulièrement adaptée au calcul pratique si on prend $u = 1/x$ avec x entier et qu'on utilise la *forme de HORNER*.

formule 2 : $$S_{2n+1}(1/x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{3x^2}\left(1 - \frac{3}{5x^2}\left(\ldots\left(1 - \frac{2n-1}{(2n+1)x^2}\ldots\right)\right)\right)\right)$$

En effet, sous cette forme (et si x et $2n+1$ sont inférieurs à 2^{16}), le calcul avec beaucoup de décimales s'effectue *sur un seul nombre multi-précision* avec $n-1$ multiplications, $3n+1$ divisions par des nombres simple précision et n complémentations à 1. De plus cette forme évite la propagation des erreurs d'arrondi.

A5 - Calculer $S_{13}(1/18)$ *avec 20 décimales.*

Occupons nous maintenant du temps de calcul. Pour avoir p décimales de $\tan^{-1}1/x$, il suffit de choisir n tel que

$$2n+3 > \frac{p.\ell n10}{\ell nx} \text{ et de calculer } S_{2n+1}(1/x).$$

A6 - Démontrer cette affirmation.

Donc à p fixé n est à peu près proportionnel à $1/\ell n x$. Or nous avons vu que le nombre d'opérations nécessaires est à peu près proportionnel à n et le temps de calcul à peu près proportionnel au nombre d'opérations. Donc :

***Résultat 3 :* à p fixé, le temps de calcul de $\tan^{-1}\frac{1}{x}$ avec p décimales par la formule 2 est à peu près proportionnel à $1/\ell n x$.**

A7 - A x fixé, le temps de calcul est-il à peu près proportionnel à p ?

Revenons au calcul de π ; le jeu va consister à écrire π comme une somme d'arctangentes d'inverses d'entiers aussi grands que possible, avec aussi peu d'entiers que possible.

Considérons la formule : $\pi = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \tan^{-1}(\frac{1}{x_i})$

avec a_i et x_i entiers. Si on néglige les multiplications par a_i et les additions des arctangentes (ce qui est d'autant plus légitime que p est grand), le temps de calcul est alors à peu près proportionnel à $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell n x_i}$, toujours à p fixé bien sûr.

***Définition et propriété 4 :* on appelle facteur de convergence (FC) de l'expression $\sum_{i=1}^{n} a_i \tan^{-1}(\frac{1}{x_i})$ le réel**

$$\mathrm{FC} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\ell n x_i}$$

A p fixé, le temps de calcul de cette expression par la formule 2 est à peu près proportionnel à FC.

Remarque : la série de *Leibniz :* $\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \ldots)$ résulte de la formule $\pi = 4\tan^{-1} 1$. Son facteur de convergence est *infini*, ce qui se vérifie bien en pratique !

Exemples : 4 formules donnant $\pi/4$ ont déjà été établies. Voici leurs facteurs de convergence, leur temps réel de calcul sur un microordinateur (avec 64 décimales) et le temps théorique obtenu par règle de trois à partir du FC de la première :

Formule	*FC*	*t réel (s)*	*t théorique (s)*
$\tan^{-1} 1/2 + \tan^{-1} 1/3$	2,35	55	—
$2\tan^{-1} 1/3 + \tan^{-1} 1/7$	1,42	33	33,23
$\tan^{-1} 1/2 + \tan^{-1} 1/5 + \tan^{-1} 1/8$	2,58	59	59,44
$2\tan^{-1} 1/4 + \tan^{-1} 1/7 + 2\tan^{-1} 1/13$	1,625	38	38,03

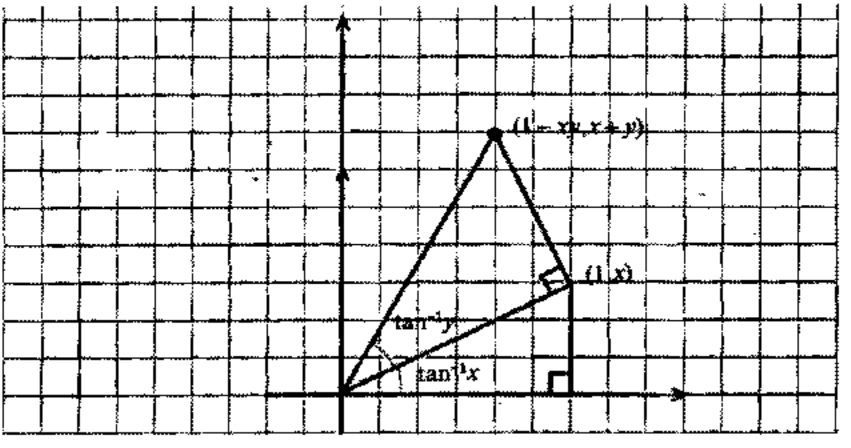
3. Des outils algébriques pour fabriquer d'autres formules

Voici l'outil fondamental : soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (\infty)$ avec les conventions habituelles de calcul.

Propriété 5 : $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\forall y \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \mod. \pi$$

Le dessin ci-dessous en est une illustration :



A8 - Démontrer la propriété 5 par composition de 2 similitudes directes d'écritures complexes $z' = (1 + ix)z$ et $z' = (1 + iy)z$

A9 - La démontrer en utilisant une formule bien connue de trigonométrie.

Allégeons nos notations :

Définition et propriété 6 : $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\forall y \in \overline{\mathbb{R}}$, on pose : $x \oplus y = \dfrac{x+y}{1-xy}$

On a alors : $x \oplus y = z \iff \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} z \quad \mod. \pi$

Cette loi $\oplus$ résulte bien sûr du transfert de l'addition de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ par la bijection tan : $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$.

($\mathbb{R}$, $\oplus$) est donc un groupe commutatif, dans lequel l'opposé de x est $-x$ (car tan est impaire). On utilisera donc les écritures : $x \ominus y$ et $a.x (a \in \mathbb{Z})$. On écrira par exemple : $1 = 2.(1/3) \oplus (1/7)$, $(1/3) \ominus (1/4) = 1/13$, etc.

A10 - Vérifier que $\dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd-ac}$

Dans le cas a, b, c, d entiers relatifs, programmer ce calcul en prévoyant la simplification de la fraction résultat.

A11 - Vérifier que : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+1} \oplus \dfrac{1}{x^2+x+1}$

et que : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+2} \oplus \dfrac{2}{(x+1)^2}$

A12 - On pose $F_0 = F_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ *(suite de Fibonacci).*

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{F_{2n-1}} = \dfrac{1}{F_{2n}} \oplus \dfrac{1}{F_{2n+1}}$

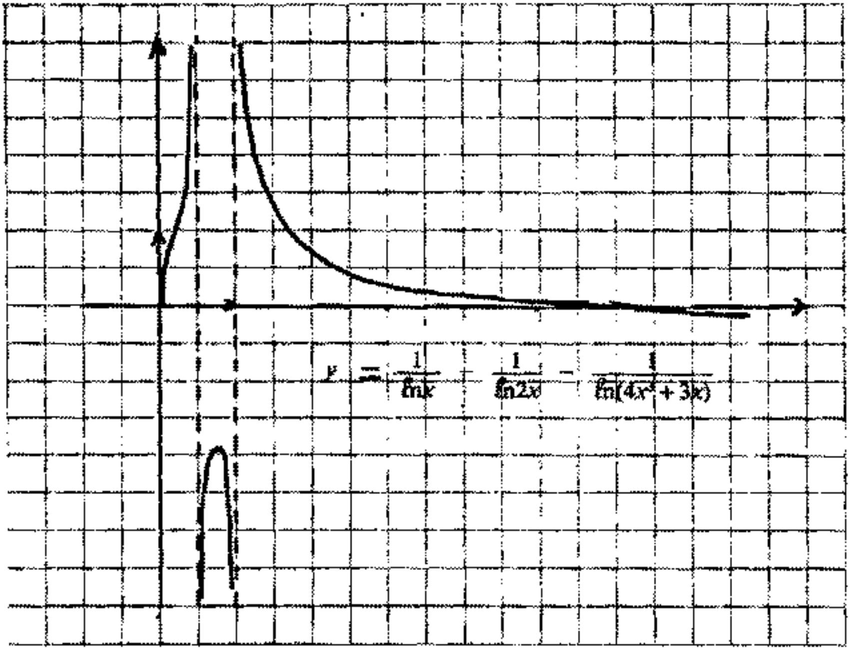
A13 - Vérifier que $\dfrac{1}{x} = 2.(\dfrac{1}{2x}) \ominus \dfrac{1}{4x^3+3x}$

Remarque : si on compare les FC des 2 membres de *A13* en traçant le graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{\ell n x} - \dfrac{1}{\ell n 2x} - \dfrac{1}{\ell n(4x^3+3x)}$

on constate que le second membre est plus performant que le premier pour $x \in]1,6]$.

La formule 2 est adaptée au calcul si x est un entier. Aussi allons nous essayer de décomposer dans ($\mathbb{R}$, $\oplus$) un rationnel quelconque en "somme" d'inverses d'entiers. Soit donc l'équation en (x,y) entiers relatifs :

(E) : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y}$ avec a et b premiers entre eux donnés.



A14 - Montrer que (E) équivaut à : $(ax-b)(ay-b)=a^2+b^2$.

A15 - Ramener (E) à la recherche des points de coordonnées entières sur une hyperbole. En déduire qu'on peut restreindre le choix de x à l'intervalle : $[\frac{b-\sqrt{S}}{a}, \frac{b+\sqrt{S}}{a}]$, où $S=a^2+b^2$

Soit d un diviseur de $S=a^2+b^2$ congru à $-b$ modulo a. Alors S/d est aussi congru à $-b$ modulo a car a et b sont premiers entre eux. Ceci, joint à *A14*, démontre le théorème 7.

***Théorème 7 :* les solutions de (E) sont les couples $(\frac{b+d}{a}, \frac{(b+S/d)}{a})$**

où d est tout diviseur de S congru à $-b$ modulo a.

A16 - 2 algorithmes sont envisageables pour résoudre (E) :

1 - faire varier x de $\frac{b-\sqrt{S}}{a}$ *à* $\frac{b+\sqrt{S}}{a}$

2 - décomposer S en facteurs premiers et chercher parmi les diviseurs ceux qui sont congrus à $-b$ modulo a.

Discuter suivant les valeurs de a et b, l'efficacité respective des deux méthodes.

Exemple : d'après A2, $1 = 3.(1/7) \oplus 2.(2/11)$.

Décomposons $2/11$: $S = 125 = 5^3$; les 8 diviseurs de S sont congrus à -11 modulo 2 et on a essentiellement 4 solutions pour $d = \pm 1$ et $d = \pm 5$:

d	-5	-1	1	5
x	3	5	6	8
y	-7	-57	68	18

Donc $2/11 = (1/3) \ominus (1/7)$, ce qui se lisait sur la figure, mais aussi $2/11 = 1/8 \oplus 1/18$ d'où l'on tire :
$1 = 3.(1/7) \oplus 2.(1/8) \oplus 2.(1/18)$ FC = 1,34.
En utilisant $1/7 = 1/8 \oplus 1/57$ (A11), il vient :

$1 = 5.(1/8) \oplus 2.(1/18) \oplus 3.(1/57)$ (F1) FC = 1,07

A17 - Exploiter les 2 autres formules : $\dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{5} \ominus \dfrac{1}{57} = \dfrac{1}{6} \oplus \dfrac{1}{68}$

A18 - Etudier l'équation en (x,y) :
(E') $\dfrac{a}{b} = 2.\dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y}$ *(x,y,a,b entiers relatifs).*

On établira par exemple que (E') équivaut à : $(ay-b)(ax^2-2bx-a) = 2x(a^2+b^2)$ et que si (x,y) est solution, $ax^2-2bx-a$ divise $S' = 2(a^2+b^2)$, la réciproque étant fausse.

4. Trois formules efficaces

1 - Une voie à explorer est de découper $\pi/4$ en multiples d'un angle plus petit en espérant un résidu simple.
Ainsi,
$1 \ominus 1/3 = 1/2$; $1/2 \ominus 1/3 = 1/7$ d'où $1 = 2.1/3 \oplus 1/7$ (déjà vu)
$1 \ominus 1/4 = 3/5$; $3/5 \ominus 1/4 = 7/23$; $7/23 \ominus 1/4 = 5/99$; or en décomposant par Th 7 : $5/99 = 1/20 \oplus 1/1985$ donc $1 = 3.(1/4) \oplus (1/20) \oplus (1/1985)$ (bonne année !)
$1 \ominus 1/5 = 2/3$; $2/3 \ominus 1/5 = 7/17$; $7/17 \ominus 1/5 = 9/46$; $9/46 \ominus 1/5 = -1/239$ d'où la célèbre formule de MECHIN :

$1 = 4.(1/5) \ominus (1/239)$ (F2) FC = 0,804

2 - D'après la remarque suivant A13, on peut améliorer F2 en remplaçant $1/5$ par $2.1/10 \ominus 1/515$. Il vient

$1 = 8.(1/10) \ominus (1/239) \ominus 4.(1/515)$ (F3) FC = 0,777

3 - En reprenant F1, on peut se débarrasser économiquement de $1/8$:
$1/8 = 1/9 \oplus 1/73$ (*A11*) ; $1/9 = 2.1/18 \ominus 1/2943$ (*A13*) soit
$1/8 = 2.1/18 \oplus (1/73 \ominus 1/2943) = 2.1/18 \oplus 7/524$ mais si on décompose $7/524$ on trouve :
$S = 274625 = 5^3.13^3$ et pour $d = -125$, on a $x = 57$ et $y = -239$, d'où

$1 = 12.(1/18) \oplus 8.(1/57) \ominus 5.(1/239)$ (F4) FC = 0,776

A19 - Fabriquer d'autres formules, en essayant bien sûr de minimiser FC.

5. Points entiers (i.e de coordonnées entières) sur les cercles de centre O

La présence abondante d'angles droits dans les figures du 1 et l'apparition insistante de $a^2 + b^2$ dans l'étude des équations (E) et (E') conduit naturellement au sujet de ce paragraphe.

A20 - (O,i,j) repère orthonormé du plan. On suppose que l'ensemble E des points entiers du cercle C de centre O est non vide. Déterminer le groupe des isométries du plan laissant E invariant (c'est le groupe diédral d'indice 4, engendré par les 2 symétries d'axes (Ox) et la première bissectrice). Montrer que le cardinal de E est divisible par 4.

Notation et propriété 8 :
Soit A et B 2 points d'un cercle $\mathcal{C}$. On notera $\widehat{AB}$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par : $\widehat{AB} = \tan(MA,MB)$ où M est un point quelconque de $\mathcal{C}$.
Si A,B,C sont 3 points de $\mathcal{C}$ on a la relation de Chasles : $\widehat{AC} = \widehat{AB} \oplus \widehat{BC}$

Prenons un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. Le lemme 9 permet alors le calcul effectif de $\widehat{AB}$:

Lemme 9
Si $\mathcal{C}$ est de centre O, si A a pour coordonnées x,y et B x',y' alors :

$$\widehat{AB} = \frac{y'-y}{x'+x} = \frac{x-x'}{y+y'}$$

A21 - Démontrer le lemme 9.

Le résultat suivant résoud, en un sens, complètement notre recherche de formules pour π :

Théorème 10: **les points entiers sur les cercles de centre O donnent toutes les formules du type $1 = a.X \oplus b.Y \oplus \ldots$ avec $a,b\ldots$ entiers et $X,Y\ldots$ rationnels.**

Tout cercle contenant des points entiers fournit en effet une formule : Soit $A(x,y)$ un point entier de $\mathcal{C}$, $B(-y,x)$ et A_1, A_2,... A_n les points entiers situés entre A et B. On a $\widehat{AB} = 1$ et d'après Chasles :

$$1 = \widehat{AA_1} \oplus \widehat{A_1A_2} \oplus \ldots \widehat{A_nB}$$

où $\widehat{AA_1}$,... $\widehat{A_nB}$ sont rationnels d'après lemme 9.

Exemples : le cercle de rayon 5 contient $A(5,0)$ $A_1(4,3)$ $A_2(3,4)$ et $B(0,5)$. $\widehat{AA_1} = 1/3 = \widehat{A_2B}$ et $\widehat{A_1A_2} = 1/7$; donc $1 = 2.(1/3) \oplus (1/7)$
De même, sur le cercle de rayon $\sqrt{65}$, on a les points $A(8,1)$ $A_1(7,4)$ $A_2(4,7)$ $A_3(1,8)$ et $B(-1,8)$, qui donnent :
$1 = (1/5) \oplus (3/11) \oplus (1/5) \oplus (1/8)$

La réciproque est basée sur le lemme 11

Lemme 11
Si A est entier et $\widehat{AB}$ rationnel alors B est à coordonnées rationnelles.

(Pour la démonstration, utiliser le lemme 9).

Soit alors une formule $1 = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ avec a_1, $a_2\ldots a_n$ rationnels. Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et A le point (1,0). Plaçons le point A_1 sur $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AA_1} = a_1$.

Par lemme 11, A_1 est à coordonnés rationnelles. Mais alors par une homothétie de centre O de rapport entier, on peut "rendre A_1 entier". On place alors A_2 tel que $\widehat{A_1A_2} = a_2$. A_2 étant à coordonnées rationnelles, on peut le rendre entier par homothétie, etc...

Exemple : la formule $1 = 1/2 \oplus 1/5 \oplus 1/8$
Déterminons A_1 sur le cercle trigo tel que $\widehat{AA_1} = 1/2$: ses coordonnées x,y vérifient :

$$y - 0 = 1/2(x + 1)$$
$$1 - x = 1/2(0 + y)$$

soit $x = 3/5$ et $y = 4/5$. Par homothétie de rapport 5, on a donc $A(5,0)$ et $A_1(3,4)$ sur le cercle de rayon 5. Cherchons alors A_2 tel que $\widehat{A_1A_2} = 1/5$: les coordonnées de A_2 vérifient :

$$y - 4 = 1/5(x + 3)$$

$3 - x = 1/5(4 + y)$ d'où $x = 16/13$ et $y = 63/13$. Par homothétie de rapport 13 on obtient alors les points $A(65,0)$ $A_1(39,52)$ et $A_2(16,63)$ sur le cercle de rayon $65 = 5.13$. En posant $B(0,65)$ on vérifie que $\widehat{A_2B} = 1/8$.

Il reste à chercher les cercles les plus riches en points entiers.

Les deux propriétés suivantes constituent une approche géométrique de l'équation en nombres entiers : $x^2+y^2=n$ dont la théorie, entièrement élucidée, n'est plus accessible en terminale.

Propriété 12 :
Soit R entier. Les cercles de rayon $\sqrt{R}$ et $\sqrt{2R}$ contiennent autant de points entiers.

Pour la démonstration, utiliser la similitude $z'=(1+i)z$ et des considérations de parité.

Propriété 13 :
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O contenant des points entiers et f la similitude $z'=(a+ib)z$ avec a et b entiers.
Si l'angle de f n'est pas un multiple entier de $\pi/4$, alors f($\mathcal{C}$) contient plus de points entiers que $\mathcal{C}$.

Démonstration : soit E(resp. E') l'ensemble des points entiers de $\mathcal{C}$ (resp. f($\mathcal{C}$)).

D'après l'écriture complexe de f, f(E) $\subset$ E'.

D'après A20, les seuls axes de symétrie de E' sont (Ox), (Oy) et les deux bissectrices du repère. Or f(Ox), qui n'est aucune de ces 4 droites vu l'hypothèse sur l'angle de f, est axe de symétrie de f(E).
Donc : f(E) $\neq$ E' cqfd.

A22 - Quel est le plus petit cercle contenant 20 (resp. 24) points entiers ?

A23 - Soit $f:z \longmapsto (2+3i)z$. En appliquant plusieurs fois f à partir du cercle trigo, vérifier que le cercle de rayon $169=13^2$ contient les points $A(0,169)$, $B(65,156)$ et $C(119,120)$. En déduire la formule de Méchin (calculer BD où $D(120,119)$).

Le rapport de f est $\sqrt{a^2+b^2}$. On n'a donc plus qu'à tester les cercles dont le rayon est un produit de tels rapports.

Remarque : les premières valeurs premières de a^2+b^2 sont :
2 ($a=1$ $b=1$) inintéressant d'après prop. 12
5 ($a=1$ $b=2$)
13 ($a=2$ $b=3$)
17 ($a=1$ $b=4$)
29 ($a=2$ $b=5$) etc.

Remarque : on peut tirer des formules intéressantes de cercles de rayon modeste, à condition d'utiliser conjointement les méthodes algébriques du 3.

Ainsi sur le cercle de rayon 13, on a les points A(0, 13) B(5, 12) C(12, 5) et D(13, 0).
$\widehat{AB} = \widehat{CD} = 1/5$ et $\widehat{BC} = 7/17$. Donc : $1 = 2.1/5 \oplus 7/17$
Etudions alors la décomposition $7/17 = 2.1/x \oplus 1/y$ (voir *A18*) :
$2.(7^2 + 17^2) = 676 = 2^2.13^2$ a 18 diviseurs et pour le diviseur $d = -2$, l'équation $7x^2 - 34x - 7 = d$ admet la solution entière $x = 5$ d'où l'on tire $7y - 17 = (676.5)/(-2)$ soit $y = -239$.
On récupère donc la formule de MECHIN.

A24 - Chercher les points de coordonnées entières sur le cercle de rayon $\sqrt{325}$ ($325 = 5^2.13$). Décomposer 2/29 et 49/257 et retrouver la formule F4.

A25 - Utiliser le cercle de rayon $\sqrt{785}$ pour trouver une formule commençant par $1 = 22.(1/28)$... et de $FC = 0,710$ (ce qui constitue le FC record dans l'état actuel de mes connaissances).

Annexe

1020 décimales de π

Calculées par la formule $1 = 22.\ \frac{1}{28} \oplus 2.\ \frac{1}{443} \ominus 5.\ \frac{1}{1393} \ominus 10.\ \frac{1}{11018}$

(temps de calcul : 17 min sur l'ordinateur de cartable CANON X07 programmé en FORTH).

3.	1415	9265	3589	7932	3846	2643	3832
7950	2884	1971	6939	9375	1058	2097	4944
5923	781	6406	2862	899	8628	348	2534
2117	679	8214	8086	5132	8230	6647	938
4460	9550	5822	3172	5359	4081	2848	1117
4502	8410	2701	9385	2110	5559	6446	2294
8954	9303	8196	4428	8109	7566	5933	4461
2847	5648	2337	8678	3165	2712	190	9145
6485	6692	3460	3486	1045	4326	6482	1339
3607	2602	4914	1273	7245	8700	6606	3155
8817	4881	5209	2096	2829	2540	9171	5364
3678	9259	360	113	3053	548	8204	6652
1384	1469	5194	1511	6094	3305	7270	3657
5959	1953	921	8611	7381	9326	1179	3105
1185	4807	4462	3799	6274	9567	3518	8575
2724	8912	2793	8183	119	4912	9833	6733
6244	656	6430	8602	1394	9463	9522	4737
1907	217	9860	9437	277	539	2171	7629
3176	7523	8467	4818	4676	6940	5132	5
6812	7145	2635	6082	7785	7713	4275	7789
6091	7363	7178	7214	6844	901	2249	5343
146	5495	8537	1050	7922	7968	9258	9235
4201	9956	1121	2902	1960	8640	3441	8159
8136	2977	4771	3099	6051	8707	2113	4999
9998	3729	7804	9951	597	3173	2816	963
1859	5024	4594	5534	6908	3026	4252	2308
2533	4468	5035	2619	3118	8171	100	313
7838	7528	8658	7533	2083	8142	617	1776
6914	7303	5982	5349	428	7554	6873	1159
5628	6388	2353	7875	9375	1957	7818	5778
532	1712	2680	6613	19	2787	6611	1959
921	6420	1989	3809	5257	2010	6548	5863

Histoire de concrétiser ce qui précède....