à la recherche de ses racines...

par Maurice Glaymann,
IREM de Lyon

A la mémoire de mon Maître et Ami,
ISAAC TARRAB
assassiné le 31 décembre 1985,
quelque part au Liban.

Il existe dans la littérature mathématique, de multiples méthodes pour déterminer les racines d'un réel. Ce sujet passionne les mathématiciens depuis l'Antiquité et tout particulièrement à partir de la découverte de l'existence des irrationnels ; c'est le fait de ne pouvoir exprimer le réel $\sqrt{2}$ par un développement décimal *fini* qui a conduit à *encadrer* ce réel par des décimaux. C'est avec ce type de problème qu'est née l'analyse mathématique et que par ailleurs l'arithmétique a progressé.

On enseignait, lorsque j'étais petit, la méthode que voici pour calculer $\sqrt{2}$:

2 , 00 00 00 00 00 ...	1,41421
1	
1 00	24 × 4 = 96
96	
4 00	281 × 1 = 281
2 81	
1 19 00	2824 × 4 = 11 296
1 12 96	
6 04 00	28282 × 2 = 56 564
5 65 64	
38 36 00	282841 × 1 = 282 841
28 28 41	
10 07 59	etc...

Faut-il rappeler que ce fut très longtemps la seule et très mauvaise méthode enseignée, souvent sans aucune justification ; cependant, une théorie était faite en classe de Mathématiques Elémentaires et elle faisait l'objet d'une question de cours au baccalauréat !

Entre la touche $\sqrt{\ }$ des calculatrices modernes et cette méthode archaïque et dogmatique, il ne faut pas oublier les tables de logarithmes et la règle à calculer, reléguées aujourd'hui au Musée, mais qui ont rendu beaucoup de services...

Cet article, sans être exhaustif, présente quelques méthodes pour approcher des racines et montrer au passage la fécondité du sujet ; en outre, il met en évidence la constance avec laquelle l'homme cherche sans cesse à affiner ses outils et rappelle ainsi que la mathématique est une œuvre humaine.

1. Encadrements par le calcul direct

Pour déterminer des encadrements du réel $\sqrt{2}$, partons de la table des carrés :

n	1	2	3	...
n^2	1	4	9	...

qui donne l'encadrement $1<2<4$ et qui permet de déduire $1<\sqrt{2}<2$. Construisons alors la table des carrés :

n	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5 ...
n^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25 ...

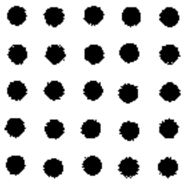
De l'encadrement $1{,}96< \ 2<2{,}25$, nous tirons
$1{,}4 \ <\sqrt{2}<1{,}5$.

L'étape suivante conduit à l'encadrement
$$1{,}9881< \ 2<2{,}0164$$
et donne
$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$$

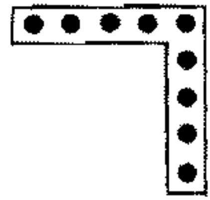
Cette méthode permet, avec de la patience, d'encadrer $\sqrt{2}$ avec la précision que l'on veut. En outre, elle est accessible à de jeunes élèves du collège.

2. Comment les Grecs auraient-ils pu calculer une racine carrée ?

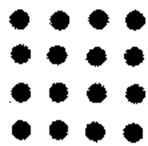
Avec Pythagore, créateur des mathématiques "pures", naît la volonté *de réduire le monde du réel à de simples abstractions "calculables"* : il se développe pour elle-même et pour des raisons esthétiques une arithmétique géométrique. On classe des naturels selon certaines configurations et on essaie de déterminer ce qu'il faut ôter d'une configuration pour obtenir une configuration analogue. Ainsi, par exemple, si de la figure :



on ôte



on obtient



Cette configuration se traduit en notations actuelles par :

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$$

ou encore
$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

Il en résulte que

$$1^2 - 0^2 = 1$$
$$2^2 - 1^2 = 3$$
$$3^2 - 2^2 = 5$$
$$\cdots\cdots$$
$$n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

et en additionnant membre à membre, il vient :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

Le résultat permet de calculer une racine carrée par des *soustractions successives*. A ma connaissance, cette méthode n'a jamais été utilisée en tant que telle.

Voici comment calculer $\sqrt{169}$:

$169 - 1 = 168$	$133 - 13 = 120$
$168 - 3 = 165$	$120 - 15 = 105$
$165 - 5 = 160$	$105 - 17 = 88$
$160 - 7 = 153$	$88 - 19 = 69$
$153 - 9 = 144$	$69 - 21 = 48$
$144 - 11 = 133$	$48 - 23 = 25$
	$25 - 25 = 0$

Il a fallu effectuer 13 soustractions, donc $13^2 = 169$.

Il est facile de contrôler que $1+3+\ldots+25=169$ et ici $2n-1=25$, donc $n=13$.

Il est alors possible de réduire le volume des calculs en notant par exemple que

$$169=100+69 \qquad \text{avec } 100=10^2$$

Ainsi, pour $n=10$, $2n-1=19$ et
$$\begin{aligned} 69-21 &= 48 \\ 48-23 &= 25 \\ 25-25 &= 0 \end{aligned}$$

Compte-tenu de $\quad 100=1+3+\ldots+19$

et de $\quad 69=21+23+25$

il vient alors $\quad 169=1+3+\ldots+23+25$.

Si le naturel positif k n'est pas *un carré*, la méthode fournit un encadrement de $\sqrt{k}$.

Voici par exemple le calcul de $\sqrt{1985}$:

$k=1985=1600+385$

$n=40$, $2n-1=79$ et $2n+1=81$

$n=41 \qquad 1600+81=1681$

$n=42 \qquad 1681+83=1764$

$n=43 \qquad 1764+85=1849$

$n=44 \qquad 1849+87=1936$

$n=45 \qquad 1936+89=2025$

ainsi $\qquad 1936<1985<2025$

et $\qquad 44<\sqrt{1985}<45$

Il est facile maintenant d'améliorer cette méthode pour déterminer des encadrements décimaux d'un réel $\sqrt{k}$ et en particulier $\sqrt{2}$. Ainsi, en partant de

$$1<\sqrt{2}<2$$

on considère alors $k=2.10^2$ avec

$169=13^2$ et $n=13$, $2n+1=27$

d'où $\quad 169+27=196$

$\quad 196+29=225$

donc $\quad 196<2.10^2<225$ ou $14^2<2.10^2<15^2$

et $\qquad 1,4<\sqrt{2}<1,5$

On prend alors $k=2.10^4$ avec

$140^2=14^2\times10^2=19600$ et $n=140$, $2n+1=281$

d'où $\quad 19600+281=19881$

$\quad 19881+283=20164$

donc $\quad 141^2<2.10^4<142^2$

et $\qquad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

Pour $k = 2.10^6$ on trouve $\qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

et pour $k = 2.10^8$, on trouve $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$, etc.

Notez que la technique des soustractions successives pourrait être utilisée pour le calcul des racines carrées à l'aide des anciennes calculatrices mécaniques de bureau.

3. Babylone (– 2000) nous propose un premier algorithme

On veut calculer le côté u d'un carré d'aire 50.

$$u^2 = 50$$

Or $\quad 7^2 < u^2 < 8^2 \quad$ soit l'encadrement $\quad 7 < u < 8$

7 est *une approximation par défaut* de u : $7 < u$

qui donne $\qquad 1 < \frac{u}{7}$ soit $u < \frac{u^2}{7}$ et $u < \frac{50}{7}$

Ainsi $\frac{50}{7}$ est *une approximation par excès* de u.

Posons $a_0 = 7$ et $b_0 = \frac{50}{a_0}$

La moyenne arithmétique $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ est une nouvelle approximation et $b_1 = \frac{50}{a_1}$ en est une autre, etc...

Ainsi, on calcule successivement

$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$ et $b_n = \frac{50}{a_n}$ avec $a_0 = 7$.

Avec 6 décimales, on a la table suivante :

a_n	b_n
7,	7,142857
7,071429	7,070707
7,071068	7,071068

Plus généralement, pour calculer $\sqrt{k}$ avec $k > 0$, on détermine le plus grand naturel a_0 tel que $a_0^2 \leqslant k$ puis on calcule successivement $b_0 = \frac{k}{a_0}$ et $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{k}{a_{n-1}})$. Cette suite converge vers $\sqrt{k}$ (voir par exemple [6]).

Ainsi, pour $\sqrt{2}$ et avec 6 décimales, on a la table ci-dessous :

a_n	b_n
1	2
1,5	1,333333
1,416667	1,411765
1,414216	1,414211
1,414214	1,414214

4. Ce que 35 siècles plus tard, Bombelli (1570) propose

On veut calculer $\sqrt{A}$, $(A>0)$
a est le plus grand naturel tel que $a^2 \leqslant A$.
Il en résulte que $a^2 \leqslant A < (a+1)^2$.
Posons $A = a^2 + r$, si x est une approximation de $\sqrt{A}$:

$$x^2 \simeq a^2 + r \qquad x^2 - a^2 \simeq r$$

d'où $x - a \simeq \dfrac{r}{x+a}$ et $x \simeq a + \dfrac{r}{x+a}$

Bombelli envisage alors l'algorithme :

$$\boxed{x_n = a + \frac{r}{a + x_{n-1}} \quad \text{avec} \quad x_0 = a}$$

La suite (x_n) *converge* vers $\sqrt{A}$ (voir par exemple [6].)
Ainsi, par exemple pour $\sqrt{2}$, on a $A = 2$, $a = 1$, $r = 1$

et $$x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1}} = \frac{2 + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$$

D'où avec six décimales :

$x_0 = 1$ $\quad$ $x_6 = 1,414201$
$x_1 = 1,5$ $\quad$ $x_7 = 1,414216$
$x_2 = 1,4$ $\quad$ $x_8 = 1,414213$
$x_3 = 1,416667$ $\quad$ $x_9 = 1,414214$
$x_4 = 1,413793$ $\quad$ $x_{10} = x_9$
$x_5 = 1,414286$ $\quad$ ....

5. Mais il y avait eu entre-temps Théon de Smyrne (IIe siècle avant J.C.)

Pour calculer $\sqrt{2}$, il calcule deux suites (a_n) et (b_n) avec $a_0 = b_0 = 1$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

La suite de terme général $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ *converge* vers $\sqrt{2}$.

On a $u_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \dfrac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$ avec $u_0 = 1$

Ce n'est autre que l'algorithme de Bombelli.

Pour calculer $\sqrt{A}$, Théon de Smyrne utilise l'algorithme :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + Ab_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \qquad \text{et } u_{n+1} = \frac{u_n + A}{u_n + 1}$$

Pour effectuer les calculs, on peut considérer la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et écrire } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exemple : $\sqrt{2}$ avec $a_0 = b_0 = 1$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$u_1 = \dfrac{3}{2} = 1,5$	$u_1^2 = 2,25$
$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$	$u_2 = \dfrac{7}{5} = 1,4$	$u_2^2 = 1,96$
$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix}$	$u_3 = \dfrac{17}{12} = 1,416...$	$u_3^2 = 2,0069442$
$\begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 29 \end{pmatrix}$	$u_4 = \dfrac{41}{29} = 1,4137936$	$u_4^2 = 1,9988109$
$\begin{pmatrix} a_5 \\ b_5 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 41 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 70 \end{pmatrix}$	$u_5 = \dfrac{99}{70} = 1,4142857$	$u_5^2 = 2,0002040$

Cette méthode permet d'encadrer $\sqrt{2}$ par des *rationnels*.

6. Où interviennent les fractions continues

Soit le réel x, *irrationnel positif.*

$a_1 = [x]$ est la partie entière de x :

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{avec} \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1 \ , \ a_1 \geqslant 1$$

or $\quad x_2 = \dfrac{1}{x - a_1}$ est aussi irrationnel supérieur à 1 et :

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \ \text{avec} \ 0 < \frac{1}{x_3} < 1 \ , \ a_2 \geqslant 1 \ \text{et} \ a_2 = [x_2].$$

....

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{avec} \quad x_{n+1} > 1 \ , \ a_n \geqslant 1 \ \text{et} \ a_n = [x_n].$$

$a_1, \ldots, a_n$ sont *naturels* et $x_1, \ldots, x_n$ des *irrationnels* ; le processus est *infini* (il est fini lorsque x est *rationnel*). On a

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_4}}} = \ldots$$

que l'on note $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$; c'est le *développement en fraction continue* du réel x.

Exemple : $\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots \quad [\sqrt{2}] = 1 \quad \text{et} \quad a_1 = 1$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{avec} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Or $\quad x_2 = 1 + \sqrt{2} = 2{,}144\ldots \quad \text{et} \quad a_2 = 2 \quad \text{avec} \quad x_2 = 2 + \dfrac{1}{x_3}$

$\quad x_3 = 1 + \sqrt{2} \quad$ etc...

d'où $\quad \sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots, 2, \ldots] = [1, \bar{2}]$

pour indiquer que le développement est périodique.

Revenons alors à l'algorithme de Théon de Smyrne, qui consiste à remplacer $\dfrac{a}{b}$ par $\dfrac{a+2b}{a+b} = 1 + \dfrac{b}{a+b} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{b}}$.

Autrement dit, au réel u, on associe le réel $1+\dfrac{1}{1+u}$, avec

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1+\frac{1}{1+u_0} = 1+\frac{1}{1+1} = 1+\frac{1}{2}$$

$$u_2 = 1+\frac{1}{1+u_1} = 1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

$$u_3 = 1+\frac{1}{1+u_2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

et plus généralement,

$$u_n = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

Les rationnels $u_0, \ldots, u_n$ sont *les réduites* de $[1\ ,\ \overline{2}] = \sqrt{2}$.

Remarques

1) $\sqrt{2}$ est la racine positive de $x^2-2 = 0$.

Nous avons alors

$$x^2-1 = 1$$

$$(x-1)(x+1) = 1$$

$$x-1 = \frac{1}{x+1}$$

d'où

$$x = 1+\frac{1}{1+x}$$

Nous retrouvons ainsi l'algorithme de Théon de Smyrne, appliqué au calcul de $\sqrt{2}$.

2) Posons $\sqrt{2} = 1+\dfrac{1}{\alpha}$

Il en résulte que $\alpha = 1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} = \alpha-1$

d'où $\alpha-1 = 1+\dfrac{1}{\alpha}$ et $\alpha = 2+\dfrac{1}{\alpha}$

Ainsi $$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha}}} = \text{etc} \ldots$$

7. Vers l'analyse avec Newton

Supposons que la fonction f soit *analytique*, ce qui a été longtemps *l'hypothèse implicite* des mathématiciens ; le réel a est une racine de l'équation $f(x)=0$. En posant $a=x_0+\varepsilon$ où x_0 est une approximation de a, le théorème de Taylor permet alors d'écrire :

$$f(x_0+\varepsilon)=f(x_0)+\varepsilon f'(x_0)+\frac{\varepsilon^2}{2}f''(x_0)+\ldots+\frac{\varepsilon^p}{p!}f^{(p)}(x_0)+\frac{\varepsilon^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(x_0+\theta\varepsilon).$$

avec $0<\theta<1$ et $f(a)=f(x_0+\varepsilon)=0$.

Au voisinage de a et en première approximation :

$f(x_0)+\varepsilon f'(x_0)=0$ d'où $a=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Il en résulte l'algorithme de Newton (1) :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Appliquons cet algorithme à l'équation $x^2-A=0$ avec $f(x)=x^2-A$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-A}{2x_n}$$

et

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{A}{x_n})$$

Nous retrouvons ainsi l'algorithme de Babylone.

Appliquons alors l'algorithme à l'équation $x^p-A=0$ avec $f(x)=x^p-A$.

Il vient $\quad x_{n+1}=\dfrac{1}{p}\left[(p-1)\,x_n+\dfrac{A}{x_n^{p-1}}\right]$

En particulier, pour

$$p=3 \qquad x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{A}{x_n^2})$$

$$p=-2 \qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n(3-A\,x_n^2)$$

Notez que pour calculer $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$, il n'y a pas de division à effectuer !

Voici maintenant un algorithme pour résoudre l'équation $x=f(x)$; on prend $x_{n+1}=f(x_n)$ avec x_0 donné. La seule question qui se pose est de

(1) Pour l'étude de la convergence, voir par exemple [6].

savoir si la suite (x_n) converge et dans ce cas si elle converge vers une racine de l'équation.

Voici quelques exemples :

Considérons d'abord l'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$.

a) Posons $x = \frac{a}{x}$ et $x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$) avec x_0. donné

Ainsi $x_1 = \frac{a}{x_0}$, $x_2 = x_0$, $x_3 = x_1$, etc...

La suite ne converge pas.

b) Posons $2x = x + \frac{a}{x}$ et $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$; ce qui donne

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Nous retrouvons l'algorithme de Babylone.

c) Posons $x + x^2 = x + a$ et $x(x+1) = x + a$

d'où $x = \frac{x+a}{x+1}$ avec $x_{n+1} = \frac{a + x_n}{1 + x_n}$

Nous retrouvons l'algorithme de Bombelli.

Considérons maintenant l'équation $x^3 = a$ que nous transformons successivement en

$$x^4 = ax$$
$$x^2 = \sqrt{ax}$$
$$x = \sqrt{\sqrt{ax}} \text{ avec } x > 0$$

d'où l'algorithme $x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{ax_n}}$ avec x_0 donné.

Exemple : Pour $a = 9$

$x_0 = 2$	$x_6 = 2{,}0800063$
$x_1 = 2{,}0597671$	$x_7 = 2{,}0800078$
$x_2 = 2{,}0749858$	$x_8 = 2{,}0800825$
$x_3 = 2{,}0788081$	$x_9 = 2{,}0800835$
$x_4 = 2{,}0797648$	$x_{10} = 2{,}0800837$
$x_5 = 2{,}0800040$	$x_{11} = 2{,}0800838$

8. Un retour aux approximations par des rationnels

Supposons que le rationnel $u_1 = \dfrac{x_1}{y_1}$ soit une approximation de $\sqrt{A}$ avec $A > 0$ et x_1, y_1 des naturels.

Nous allons construire une suite de rationnels de terme général $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ qui converge vers $\sqrt{A}$; posons a priori :

$$Q = x_1 - y_1\sqrt{A}$$

On a $Q^2 = x_2 - y_2\sqrt{A}$ avec $\begin{cases} x_2 = x_1^2 + A\,y_1^2 \\ y_2 = 2x_1\,y_1 \end{cases}$

et on prend $u_2 = \dfrac{x_2}{y_2}$.

Plus généralement, $x_{n+1} - y_{n+1}\sqrt{A} = (x_n - y_n\sqrt{A})^2$

avec $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + A\,y_n^2 \\ y_{n+1} = 2x_n y_n \end{cases}$

et $u_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$

Notons que $u_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + A\,y_n^2}{2\,x_n y_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_n}{y_n} + A\dfrac{y_n}{x_n}\right)$

donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right)$

C'est l'algorithme de Babylone : la suite (u_n) converge vers $\sqrt{A}$.

Pour utiliser cet algorithme, il faut connaître une première approximation $u_1 = \dfrac{x_1}{y_1}$; dans ce but, cherchons une solution en nombres entiers à l'équation de PELL (1610-1685) : $x^2 - Ay^2 = 1$

qui s'écrit $A = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{1}{y^2}$

et pour y "grand", $\sqrt{A} \simeq \dfrac{x}{y}$.

Calculons par exemple $\sqrt{2}$; l'équation de Pell associée est $x^2-2y^2=1$ qui admet la solution particulière $x_1=3$ et $y_1=2$; ainsi, nous pouvons prendre $u_1=\frac{3}{2}$. Nous avons alors successivement :

$$Q=3-2\sqrt{2} \qquad u_1=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$Q^2=17-12\sqrt{2} \qquad u_2=\frac{17}{12}=1{,}4155\ldots$$

$$Q^4=577-408\sqrt{2} \qquad u_3=\frac{577}{408}=1{,}4142156\ldots$$

$$Q^8=665\,857-470\,832\sqrt{2} \qquad u_4=\frac{665\,857}{470\,832}=1{,}4142135\ldots$$

qui est une excellente approximation de $\sqrt{2}$.

9. Pour conclure

Voici pour terminer quelques algorithmes qui font appel à l'analyse.

1. Utilisons le développement en série entière

$$(1+x)^u=1+\frac{u}{1!}x+\frac{u(u-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{u(u-1)\ldots(u-p+1)}{p!}x^p+\ldots$$

pour calculer $\sqrt{A}$ avec $A>0$.

Posons $\sqrt{A}=\sqrt{A\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{q}{p}\right)^2}=\frac{p}{q}\left(\frac{p^2}{Aq^2}\right)^{-1/2}$

puis posons $p^2=Aq^2-1$ (équation de Pell) ; il vient

$$\sqrt{A}=\frac{p}{q}\left(1-\frac{1}{Aq^2}\right)^{-1/2}=\frac{p}{q}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{Aq^2}+\ \ldots\right)$$

Ainsi, par exemple pour $\sqrt{2}$, l'équation de Pell est $2q^2-p^2=1$ dont une solution particulière est $q=5$ et $p=7$ et

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{50^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{50^3}+\ldots\right)$$

D'où les approximations :

$$u_1=\frac{7}{5}=1{,}4$$

$$u_2=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{100}\right)=1{,}414$$

$$u_3=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2500}\right)=1{,}41421 \quad \text{etc.}$$

2) α est une approximation de $\sqrt{A}$. Posons

$$x = \frac{A}{\alpha^2} - 1 \quad \text{soit} \quad A = \alpha^2(1+x)$$

et $\sqrt{A} = \alpha\sqrt{1+x} = \alpha(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \ldots)$

Ainsi, pour $A = 2$ et $\alpha = 1,4$

$$x = \frac{2}{1,4^2} - 1 = 0,02040816$$

et $u_1 = \alpha = 1,4$

$$u_2 = \alpha(1 + \frac{x}{2}) = 1,4 \times (1 + \frac{0,02040816}{2}) = 1,414285715$$

$$u_3 = \alpha(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}) = 1,414212828 \text{ etc.}$$

3) Proposons-nous d'étudier *le produit infini :*

$$u = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{q_k}) \quad \text{avec} \quad q_0 = \frac{a+1}{a-1} \quad \text{et} \quad q_k = 2\,q_{k-1}^2 - 1$$

où a est un réel positif donné.

Nous allons montrer que la suite (u_n) définie par

$u_n = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{q_k})$ converge vers $\sqrt{a}$.

Il est facile de montrer par récurrence, en posant

$q_0 = \frac{a+1}{a-1} = \text{ch}\,\theta$, que $q_n = \text{ch}\,2^n\,\theta$

car $q_{n+1} = 2\,\text{ch}^2\,2^n\,\theta - 1 = \text{ch}\;2^{n+1}\,\theta$

puis d'établir que $u_n = \coth\frac{\theta}{2} \cdot \text{th}\,2^n\theta$.

Il en résulte que $u = \coth\frac{\theta}{2}$.

Or $$u^2 = \frac{\text{ch}\,\theta + 1}{\text{ch}\,\theta - 1} = \frac{1 + \frac{a+1}{a-1}}{\frac{a+1}{a-1} - 1} = a$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Considérons l'exemple du calcul de $\sqrt{2}$:

Avec $q_0 = \dfrac{a+1}{a-1} = 3$ $\qquad u_0 = 1 + \dfrac{1}{q_0} = \dfrac{4}{3} = 1,33...$

$q_1 = 2\,q_0^2 - 1 = 17$ $\qquad u_1 = u_0(1 + \dfrac{1}{q_1}) = \dfrac{18}{17}\,u_0 = 1,41765$

$q_2 = 2\,q_1^2 - 1 = 577$ $\qquad u_2 = u_1(1 + \dfrac{1}{q_2}) = \dfrac{578}{577}u_1 = 1,414211$

etc.

4) Je livre à la réflexion du lecteur les calculs qui suivent[1]

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{15} = \frac{3}{16-1} = \frac{3}{16} \quad \frac{1}{1 - \dfrac{1}{16}}$$

$$\frac{1}{5} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{4n}}$$

$$\sqrt[5]{A} = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[2^{4n}]{A^3}$$

D'où l'algorithme de calcul :

$a_0 = A^3$

$a_1 = \sqrt{a_0}$

$a_2 = \sqrt{a_1}$

.....

$a_n = \sqrt{a_{n+1}}$ etc. $\sqrt[5]{A} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_{4n}$

Il est connu que quelque soit A, si on calcule à l'aide d'une calculatrice la suite a_n, on finit par obtenir 1, qui sera le test d'arrêt du calcul.

(1) Cet exemple est dû à Daniel Ponasse.

Voici l'exemple de $\sqrt[5]{49}$:

$x = \sqrt[5]{49}$	x^5
2,074 449 200	38,420 129 56
2,171 294 59	48,260 714 97
2,177 492 596	48,953 464 70
2,177 880 358	48,997 090 27
2,177 904 808	48,999 818 15
2,177 906 324	48,999 988 64
2,177 906 418	48,999 999 27
2,177 906 424	48,999 999 93

Bibliographie

[1] J. DHOMBRES, *Nombre, mesure et continu.* CEDIC 1978.

[2] J. EDGE, *Square Roots, Mathematics in School,* Vol. 8, N° 1, Jan. 79.

[3] M. GLAYMANN, *Initiation au calcul numérique et usage des machines à calculer,* A.P.M.E.P., N° 254.5, 1966 ; Educational Studies in Mathematics, Vol. 1 - 1968.

[4] J. ITARD, *Arithmétique et théorie des nombres.* Que sais-je ? N° 1093.

[5] C.D. OLDS, *Continued Fractions.* Randon House. 1963.

[6] A. ENGELS, *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique.* CEDIC 1979 (traduit de l'allemand par D. REISZ).

[7] N. VILENKINE, *Méthode des approximations successives.* Ed. Moscou. 1975.

[8] J. SINGER, *Elements of Numerical Analysis.* Academic Press. 1964.

[9] C.E. FROBERG, *Introduction to Numerical Analysis.* Addison-Wesby. 1965.

[10] E. DURAND, *Solutions numériques des équations algébriques.* Tome I. Masson. 1960.

[11] L. EPISTEMON : *Analyse,* Vol. I CEDIC

[12] *Analyse,* Bulletin Inter-IREM.