études

du dessin géométrique au conditionnement d'un système

par Daniel Reisz

L'objet de cet article est de montrer comment on peut sensibiliser des élèves (de la Troisième à la Terminale selon le degré d'approfondissement qu'on donnera aux activités proposées) à quelques problèmes simples liés à la résolution numérique approchée des systèmes d'équations linéaires. C'est un de ces sujets qui permettent d'utiliser calculatrices ou moyens informatiques, mais aussi de pénétrer dans des problèmes que posent précisément de façon cruciale l'utilisation de ces outils de calcul.

D'une façon plus générale, l'idée est de développer des démarches mathématiques moins formelles, plus proches des applications réelles (et par là assez différentes des exercices à usage purement scolaire), mettant en œuvre le graphique, le numérique, l'affine, le vectoriel sur différentes facettes d'une même problématique.

I - UN PEU DE DESSIN GEOMETRIQUE

Tout élève sait qu'une droite est définie par deux points distincts A et B, ou encore, en posant $\vec{AB} = \vec{u}$, par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. On notera par la suite une telle droite indifféremment $\triangle(A,B)$ ou $\triangle(A,\vec{u})$.

Première activité

Tracer une droite passant par deux points donnés A et B. (Malgré l'hétérogénéité des classes et le niveau qui baisse, presque tous les élèves réussissent cet exercice !).

Deuxième activité

Sur une feuille de papier quadrillé (ou millimétré), reproduite par photocopie et distribuée à tous les élèves (*Fig. 1*), tracer les droites $\triangle(A,B)$, $\triangle(C,D)$, $\triangle(E,F)$. En repérant, par exemple, les endroits où ces droites aboutissent sur les bords de la feuille, il sera facile de montrer que le tracé de $\triangle(A,B)$ est plus précis que celui des droites $\triangle(C,D)$ ou $\triangle(E,F)$.

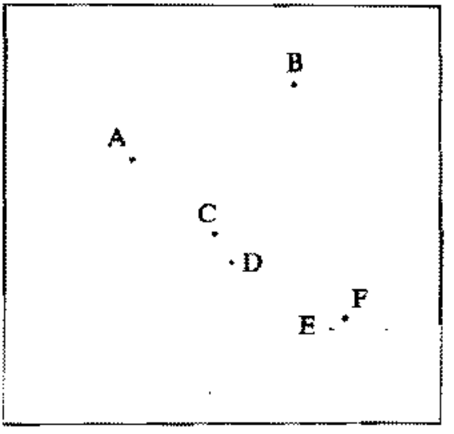

Fig. 1

Objectif : Faire *sentir* aux élèves que, si d'un point de vue formel deux points distincts définissent bien une droite et une seule, le tracé pratique, physique, de la droite est *conditionné* par la distance séparant les deux points ou encore par la norme du vecteur directeur :

$\|\vec{u}\|$ petit : le tracé est imprécis, peu fiable, la droite est *mal conditionnée*

$\|\vec{u}\|$ grand : le tracé est (relativement) précis, plus fiable, la droite est *bien conditionnée*.

Troisième activité

Objectif : Quels sont les paramètres qui influencent la précision de la détermination de l'intersection de deux droites ? Un premier paramètre est évident, c'est le bon conditionnement de chacune des deux droites : à des droites au tracé imprécis correspond une intersection imprécise (voir par exemple l'intersection des droites $\triangle(C,D)$ et $\triangle(E,F)$ sur la figure 1). Un second paramètre l'est moins. Si nous prenons des droites, même relativement bien conditionnées, mais *presque* parallèles, une toute petite imprécision sur le tracé de l'une des droites aura une influence très grande sur la situation du point d'intersection.

La mise en place de l'activité est laissée à l'initiative de chacun, selon le niveau de la classe. Cela peut aller de simples activités graphiques (prise de conscience) jusqu'à la mise en place de procédures de calcul déterminant l'influence d'une petite variation de l'une des droites sur la détermination de l'intersection.

Remarque

Il n'est pas interdit de regarder sur ce sujet des livres de topographie, d'usinage, d'astronomie pour trouver de nombreux exemples illustrant ces faits.

II - DETERMINANT DE DEUX VECTEURS

Soit, dans un repère orthonormal deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a, a') et (b, b'). On appelle déterminant de ces deux vecteurs, le nombre

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = a\,b' - a'\,b$$

Presque toujours nous adoptons avec nos élèves une attitude manichéenne : nullité ou non nullité du déterminant. Il est évidemment déjà intéressant d'analyser les conditions de nullité :

— l'un des vecteurs est nul
— les deux vecteurs, sans être nuls, sont colinéaires.

Un formaliste dira que cela peut se résumer à la colinéarité, mais un praticien sait bien qu'il y a là deux situations physiques assez différentes.

Pour des raisons de *visibilité*, il est intéressant d'avoir au plus tôt le résultat suivant :

$|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ = aire du parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Il est en effet beaucoup plus parlant pour un élève de *voir* un parallélogramme dont l'aire devient nulle que de *concevoir* un nombre qui devient nul.

Lorsque les coordonnées a, b, a', b' sont toutes positives la *figure 2* permet une démonstration très élémentaire (et d'ailleurs généralisable moyennant quelques précautions).

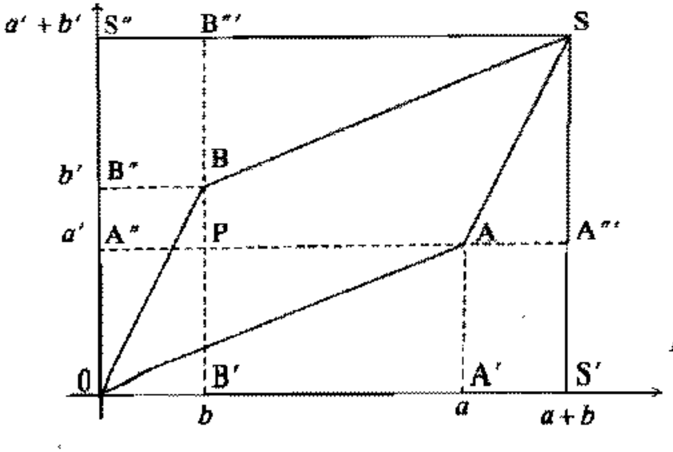

Fig. 2

On peut, en effet, écrire successivement :

$$\begin{aligned}
\text{aire (OASB)} &= \text{aire (OS'S S'')} \\
&\quad -[\text{aire (A'S'A'''A)} + \text{aire (B''B B''' S'')}] \\
&\quad -[\text{aire (OAA')} + \text{aire (SBB''')}] \\
&\quad -[\text{aire (OBB'')} + \text{aire (SAA''')}] \\
&= \text{aire (OS' SS'')} \\
&\quad - 2 \times \text{aire (OB'PA'')} \\
&\quad - \text{aire (OA'AA'')} \\
&\quad - \text{aire (OB'BB'')} \\
&= (a+b)\,(a'+b') \\
&\quad -2\,a'b \\
&\quad -aa' \\
&\quad -bb' \\
&= ab' - a'b
\end{aligned}$$

On peut alors (se) poser le problème suivant : quelles sont les configurations de deux vecteurs qui donnent des déterminants voisins de 0, ou, en termes plus dynamiques, qu'est-ce qui fait tendre un déterminant vers 0 ? Ce sont évidemment les mêmes raisons, qui font tendre l'aire du parallélogramme vers 0, c'est-à-dire :

— l'un des cotés devient petit,

— les deux cotés adjacents, sans devenir forcément petits, tendent vers des positions parallèles (parallèlogramme aplati).

Si nous revenons au problème étudié en I (intersection de deux droites) le parallélisme (sic) est éclatant :

situation mal conditionnée	⟷	*déterminant petit*

et plus précisément

droite mal conditionnée	⟷	*vecteur directeur petit* donc *déterminant petit*
droites presque parallèles	⟷	*vecteurs directeurs presque colinéaires* donc *déterminant petit*

C'est cet aspect des choses que nous essayerons de voir d'un peu plus près dans la partie suivante.

III - SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Sauf pour deux exemples et afin de garder à ce texte un niveau proche d'activités normales en classe, il ne sera question que de systèmes de deux équations à deux inconnues.

Un premier point important est de faire comprendre l'équivalence des problèmes suivants :

(α)

Déterminer les nombres réels x et y tels que

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

(β)

φ étant un endomorphisme de matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

et $\vec{v}(c,c')$ un vecteur donné, trouver les vecteurs $\vec{u}(x,y)$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

(γ)

$\vec{u}(a,a')$, $\vec{v}(b,b')$, $\vec{w}(c,c')$ étant trois vecteurs donnés, exprimer $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de u et de $\vec{v}$, c'est-à-dire déterminer x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\Leftrightarrow$

(δ)

Déterminer l'intersection des droites (D) et (D') d'équations respectives :

(D) : $ax + by = c$

(D') : $a'x + b'y = c'$

Pour les conditions d'existence et d'unicité de la solution de ce quadruple problème, le résultat classique est le suivant :

1) $\det(\Sigma) = \det(\Phi) = \det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$
alors il existe un unique couple (x,y), un unique vecteur $\vec{u}$, un unique point d'intersection. La détermination de cette unique solution se fait selon des algorithmes classiques.

2) $\det(\Sigma) = \det(\Phi) = \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
alors deux situations sont possibles :

— aucune solution
— une infinité de solutions.

Une première activité, essentielle, est de bien traduire cela selon chacun des aspects α, β, γ ou δ.

Venons en maintenant à la résolution approchée d'un système. En général les coefficients a, a', b, b', c, c' sont connus avec une certaine précision et le calcul de l'éventuelle solution est elle-même faite avec une certaine approximation.

Exemple :

$$\begin{cases} 1{,}42\,x + 2{,}52\,y = 14{,}07 \\ 3{,}57\,x - 0{,}12\,y = 8{,}28 \end{cases}$$

dont la solution, à 10^{-2} près, est $x = 2{,}43$ et $y = 3{,}25$.

L'aspect (γ) [déterminer x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\vec{v}$] permet une approche assez parlante du problème de l'approximation. Soit x^* et y^* des valeurs approchées de la solution (x,y). On pose alors

$$\vec{w}^* = x^*\vec{u} + y^*\vec{v}$$

et $$\vec{r} = \vec{w} - \vec{w}^*$$

On pourrait alors estimer que si $\vec{r}$ est petit (i.e si $|\vec{r}|$ est petit) l'approximation est bonne et $|x - x^*|$ et $|y - y^*|$ sont eux-mêmes petits et en déduire que (x^*, y^*) est une bonne approximation de (x,y).

Il en est effectivement ainsi lorsque le problème (c'est-à-dire le système, la base, les droites) est bien conditionné et cela est clairement apparent sur la *figure 3*.

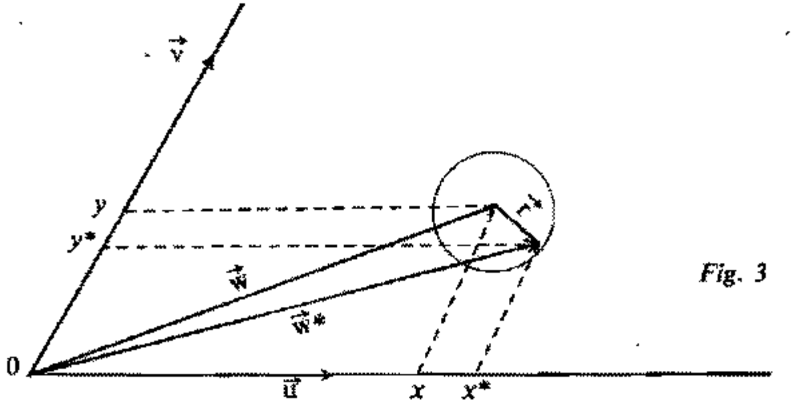

Fig. 3

Mais cela tombe en défaut dans des situations mal conditionnées : $|\vec{r}|$ peut être très petit alors que $|x - x^*|$ ou $|y - y^*|$ peuvent être relativement grands. Regardons plusieurs exemples :

1) Exemple dû à W. KAHAN (1966)

$$(\Sigma)\quad \left|\begin{array}{l} 1,2969\,x + 0,8648\,y = 0,8642 \\ \\ 0,2161\,x + 0,1441\,y = 0,1440 \end{array}\right.$$

Le couple $x^* = 0,9911$, $y^* = -0,4870$ donne

$$\vec{r} = \vec{w} - \vec{w}^* = \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{-8} \end{pmatrix}$$

d'où $\|\vec{r}\| = \sqrt{2}.10^{-8} < 10^{-7}$

On pourrait donc penser que le couple (x^*, y^*) est une excellente approximation de (x, y), puisque $\vec{w}^*$ est une très bonne approximation de $\vec{w}$.

On en est loin :

$x^* = 0,9911$ et $x = 2$!!!

$y^* = -0,4870$ et $y = -2$!!!

Regardons le déterminant : $\det(\Sigma) = 10^{-8}$

Il y a là bien le signe qu'on est dans une situation mal conditionnée. La *figure 4* est très parlante : la base (u, v) n'est vraiment pas d'un usage très commode !

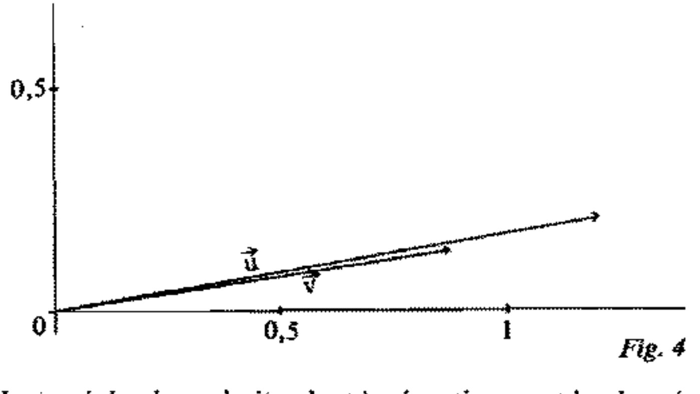

Fig. 4

Le tracé des deux droites dont les équations sont les deux équations du système (Σ) (problème (δ)) ne manque pas non plus d'intérêt : on regardera les points

$$M\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^*\begin{pmatrix} 0,9911 \\ -0,4870 \end{pmatrix}$$

intersection *exacte* et intersection *approchée* de ces deux droites.

2) *Quelques autres exemples*

a) Le système

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 0{,}845 \\[2mm] \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 0{,}5875 \end{cases}$$

donne, pour la solution approchée (1 ; 1)

$\|\vec{r}\| < 0{,}013$

alors que la solution exacte est (1,11 ; 0,87) c'est-à-dire que la précision n'atteint même pas 10^{-1} !

b) Le système

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{7} = \dfrac{107}{210} \\[2mm] \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{7} + \dfrac{z}{8} = \dfrac{73}{168} \\[2mm] \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{8} + \dfrac{z}{9} = \dfrac{191}{504} \end{cases}$$

a pour solution exacte (1 ; 1 ; 1) ; la méthode du pivot de Gauss, avec un micro-ordinateur travaillant avec une précision de 10^{-5}, donne comme solution approchée

(1,03845 ; 0,89673 ; 1,0667)

c'est-à-dire une précision inférieure à 10^{-1} pour y, à 10^{-2} pour x et z, alors que

$$\|\vec{r}\| \leqslant 1{,}4 \times 10^{-5}$$

c) Le système suivant est le classique du genre. Il est dû à R.S. WILSON

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

La solution *"approchée"* (−7,2 ; 14,6 ; −2,5 ; 3,1) assure $\|\vec{r}\| < 0{,}2$

et la solution *"approchée"* (0,18 ; 2,36 ; 0,65 ; 1,21)

assure $\|\vec{r}\| < 0{,}02$. Or la solution exacte est (1 ; 1 ; 1 ; 1) !!!

Le déterminant de ce système est égal à 1 : il n'est que *relativement* petit. Cela montre aussi que nous sommes loin d'avoir fait le tour complet des problèmes liés à la solution numérique des systèmes linéaires (cf. l'annexe).

IV - CONCLUSION

Comme on l'a vu dans tout cet article, il n'est pas question d'aborder de façon précise les problèmes de conditionnement des systèmes, ni d'étudier de façon exhaustive les rapports entre conditionnement et précision mais simplement de proposer un premier éclairage sur ces questions avec la volonté de ne pas restreindre l'enseignement des mathématiques au trop simpliste manichéisme du *vrai* ou *faux*. L'étude et, ultérieurement, le contrôle de l'*à peu près* sont aussi digne d'intérêt, surtout à l'époque où les moyens de calculs permettent à n'importe qui d'aborder des problèmes de *grande taille* où les propagations d'erreurs réservent parfois de grosses surprises : "Petites causes, grands effets !".

ANNEXE

A titre d'information et en dehors de toute activité raisonnablement accessible en classe on peut se poser le problème d'un indicateur fiable du conditionnement d'un système.

Avec les notations de la problématique (β) du paragraphe III, si $\vec{u}$ est solution de

$$\Phi \vec{u} = \vec{v}$$

alors une "petite variation" $\vec{v} + \delta\vec{v}$ sur $\vec{v}$ provoque une "petite variation" $\vec{u} + \delta\vec{u}$ sur la solution $\vec{u}$ d'où

$$\Phi(\vec{u} + \delta\vec{u}) = \vec{v} + \delta\vec{v}$$

soit encore

$$\Phi\, \delta\vec{u} = \delta\vec{v}$$

$$\delta\vec{u} = \Phi^{-1}\, \delta\vec{v}$$

Si à la norme vectorielle $\|\vec{x}\|$, on associe la norme matricielle

$$\|A\| = \operatorname*{Max}_{\vec{x}\neq\vec{0}} \|A\vec{x}\| \,/\, \|\vec{x}\|$$

on a alors (cf. un traité d'Algèbre linéaire)

$$\|\delta\vec{u}\| \leqslant \|\Phi^{-1}\|\ \|\delta\vec{v}\|$$

et

$$\|\Phi\|\ \|\vec{u}\| \geqslant \|\vec{v}\|$$

d'où

$$\frac{\|\delta\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \leqslant k(\Phi) \frac{\|\delta\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

avec

$$\boxed{k(\Phi) = \|\Phi\|\ \|\Phi^{-1}\|}$$

C'est ce nombre $k(\Phi)$ qui, en réalité, gouverne la propagation des erreurs et "mesure" la qualité du conditionnement d'un système ou d'une matrice.

BIBLIOGRAPHIE

Les références bibliographiques qui suivent permettront d'aller au cœur de ces problèmes.

BJÖRCK-DAHLQUIST : *Numerische Methoden* (Oldenbourg, 1979)

STEWART (G.W.) : *Introduction to matrix computations* (Academic Press, 1973)

HILDEBRAND (F.B.) : *Introduction to numerical analysis* (Mc Graw Hill, 1956).

CIARLET (P.G.) : *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* (Masson, 1982).