les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour leur caractère esthétique ou astucieux, voire récréatif, et dont la résolution nécessite des initiatives, une démarche inventive, une recherche demandant un effort intellectuel.

Priorité est donnée aux énoncés composés par des collègues, et au dialogue entre ces derniers par l'intermédiaire des réponses et des solutions. Cette rubrique est pour tous ceux qui aiment inventer ou chercher de "beaux problèmes",... parfois trouver des solutions, et pour que chacun puisse donner libre cours à son imagination créatrice.

Les énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante : (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)

M. Dominique ROUX
85 bis rue Aristide BRIAND
87100 LIMOGES

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 104 (E. EHRHART, Strasbourg)

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n la fraction $\dfrac{1}{n(n+3)}$ est-elle décimale ?

Remarque : Cette question a également été posée par R. CUCULIERE (Paris) et par A. VIRICEL (Nancy).

ÉNONCÉ N° 105 (Compétition JÓZSEF KÜRSCHÁK)

Si P(x) est un trinôme du second degré à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ P(x) > 0$$

P(x) peut-il toujours s'écrire comme quotient de deux polynômes dont tous les coefficients sont des réels strictement positifs ?

ÉNONCÉ N° 106 (D. ROUX, Limoges)

Pour quelles valeurs de n existe-t-il une permutation $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $1, 2, \ldots, n$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos \frac{2k\pi}{n} = 0 \ ?$$

car $x^n = 1$: somme des √ · $\sum \cos \frac{2k\pi}{n}$ et on les regroupe 2 par 2

n impair sauf $n = 1$. Réciproque : sauf si $n \not\equiv 0$ [4]

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 63 (TISSIER, Montfermeil)

Soient n et p deux naturels tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Déterminer le nombre de naturels x dont l'écriture en base n utilise une fois et une seule chaque entier de 1 à p et tels que $2x$ possède la même propriété.

SOLUTION DE L'AUTEUR, avec amélioration (pour I) dûe à Charles AUQUE (Clermont-Ferrand).

I) Conditions sur n et p :

Il y a dans l'écriture de $2x$ des chiffres impairs, donc des retenues dans le calcul de $2x$, donc $p > \frac{n-1}{2}$.

Le chiffre $E(\frac{n-1}{2})$ figure dans x donc $2\,E(\frac{n-1}{2}) \leqslant p$. Ceci démontre que $p = n-2$ ou $p = n-1$.

Appliquons la "preuve par 9" : x et $2x$ sont congrus à la somme de leurs chiffres : $\frac{p(p+1)}{2}$ modulo $(n-1)$ donc $\frac{p(p+1)}{2}$ est congru à 0 modulo $(n-1)$.

Pour $p = n-2$ ou $p = n-1$ cette condition équivaut à n est pair. Finalement $n = 2m$ et $p = 2m - 2 + \varepsilon$ où ε vaut 0 ou 1.

II) Structure des solutions :

Soit $x = (x_1 x_2 \ldots x_p)_n$ une solution. Si $2x = (y_1 y_2 \ldots y_p)_n$ on associe à x la permutation φ de $[1, p]$ définie par $\varphi(x_i) = y_i$.

Observons que $\varphi(a) \in \{2a, 2a+1, 2a-n, 2a-n+1\}$.

Considérons les quatre ensembles suivants :

A $= \{a \in [1, m-1]$ tels que $\varphi(a) = 2a\}$
A' $= \{a \in [1, m-1]$ tels que $\varphi(a) = 2a+1\}$
B $= \{a \in [m, p]$ tels que $\varphi(a) = 2a-2m\}$
B' $= \{a \in [m, p]$ tels que $\varphi(a) = 2a-2m+1\}$

Il est clair que : $m \in B'$

si $\varepsilon = 0$, alors $m-1 \in A$

A' et B ont le même nombre d'éléments : q et alors A contient $m-q-1$ éléments, B' contient $m-q-1+\varepsilon$ éléments. On a forcément $q \leqslant m-q-2+\varepsilon$ car $m \in B'$.

A toute solution $x = (x_1 x_2 \ldots x_p)_n$ associons la séquence :

$S = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ où X_i est celui des ensembles A, A', B, B' auquel appartient x_i.

Etudions S. Montrons que, à droite du dernier A' de S ainsi qu'entre deux A' consécutifs de S, il existe au moins un B : si c'était faux, il n'y aurait dans les intervalles considérés que des B' (si l'on raisonne de gauche à droite) et que des A (si l'on raisonne de droite à gauche) et ces intervalles ne peuvent pas être vides.

Comme A' et B ont le même nombre d'éléments, il n'y a dans chacun des intervalles qui viennent d'être considérés qu'un seul B. Il reste à placer les symboles A et B' : les A sont à gauche du premier A', et à droite du dernier B, et dans tout intervalle situé à gauche d'un A' et à droite d'un B.

Finalement la structure de S est du type :

$(AA\ldots A)\,A'(B'B'\ldots B')\,B(AA\ldots A)A'\ldots\ \ldots A'(B'B'\ldots B')B(AA\ldots A)$

III) Dénombrement

Notons u_0, v_1, u_1, $v_2, \ldots, v_q$, u_q les tailles des paquets de A et de B' intervenant dans S et pris dans cet ordre, de gauche à droite.
Les u_i et v_i vérifient :

$$\sum_{i=0}^{q} u_i = m-q-1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{q} v_i = m-q-1+\varepsilon.$$

Utilisons le résultat classique suivant :

Le nombre des suites de k entiers naturels de somme s est : C_{s+k-1}^{k-1}

Il résulte que pour φ fixé il y a $N(\varphi) = \mathrm{C}_{m-1}^{q}\ \mathrm{C}_{m-2+\varepsilon}^{q-1}$ séquences S vérifiant les conditions demandées.

Chaque séquence S donne lieu à des solutions en remplissant ses cases par des éléments convenables : il y a $q\,!$ permutations des éléments de A', $q\,!$ permutations de ceux de B, $(m-q-1)\,!$ permutations pour ceux de A et $(m-q-1+\in)\,!$ permutations pour ceux de B'. On constate que cette construction respecte dans tous les cas les règles de l'addition avec retenues.

Le nombre des solutions du problème **63** pour φ donné est donc :
$P(\varphi) = N(\varphi)\,(q!)^2\,(m-q-1)!\,(m-q-1+\varepsilon)! = q(m-1)!\,(m-2+\varepsilon)!$

En faisant varier d'abord φ pour q fixé (ceci revient à choisir B parmi les parties de $[m+1,p]$ à q éléments : $C_{m-2+\varepsilon}^{q}$ choix) puis q, on trouve le nombre total des solutions :

$$\sum_{q=1}^{m-2+\varepsilon} C_{m-2+\varepsilon}^{q}\; q(m-1)!\,(m-2+\varepsilon)! =$$

$$(m-1)!(m-2+\varepsilon)!(m-2+\varepsilon)\sum_{q=1}^{m-2+\varepsilon}\frac{(m-3+\varepsilon)!}{(q-1)!(m-q-2+\varepsilon)!}$$

$$= (m-1)!(m-2+\varepsilon)!(m-2+\varepsilon)\sum_{k=0}^{m-3+\varepsilon} C_{m-3+\varepsilon}^{k}$$

$$= (m-1)!(m-2+\varepsilon)!(m-2+\varepsilon)2^{m-3+\varepsilon}$$

$$= \left|\begin{array}{ll} (m-1)!(m-2)!(m-2)\,2^{m-3} & \text{si } \varepsilon = 0 \\ [(m-1)!]^2\,(m-1)\,2^{m-2} & \text{si } \varepsilon = 1 \end{array}\right.$$

Conclusion :

$n = 2m$ et $p = 2m-2$ ou $p = 2m-1$, et le nombre de solutions est :

$(m-2)(m-2)!(m-1)!2^{m-3}$ si $n = 2m$ *et* $p = 2m-2$

$(m-1)\,[(m-1)!]^2\,2^{m-2}$ si $n = 2m$ et $p = 2m-1$

Autres bonnes solutions : J. LEMAIRE (Lille) et première solution de l'auteur ; *solutions partielles :* G. FRAISSE (Lézignan-Corbières) et LAFRANCHI (Grenoble).

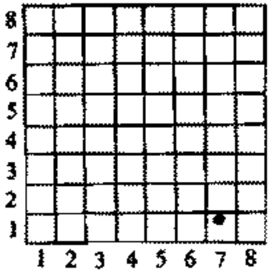
ÉNONCÉ N° 65 (LELOUSTRE, Salon de Provence)

Un jeu de patience, vendu dans le commerce, consiste à placer 16 pions sur un échiquier de 64 cases de sorte qu'il n'y ait pas plus de 2 pions sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque oblique.

Combien y a-t-il de configurations convenables différentes ?

SOLUTION (J. LEMAIRE, Lille)

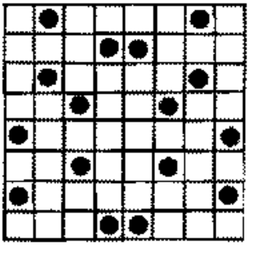
Des solutions seront dites indépendantes si parmi elles, il ne s'en trouve pas deux qui se correspondent dans une rotation ou une symétrie axiale. En adoptant la numérotation des lignes et des colonnes suivante :



l'écriture de chaque solution comprendra 8 couples de chiffres séparés par des tirets, chaque chiffre représentera le numéro de la colonne, et le rang de chaque couple de chiffres écrit entre tirets, celui de la ligne correspondante.

1) Ainsi la solution A(45 - 18 - 36 - 18 - 36 - 27 - 45 - 27) correspond au diagramme suivant :

Solution A :

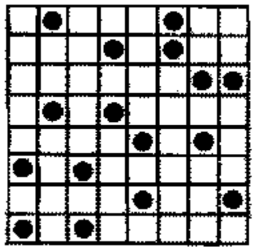


Elle présente un axe de symétrie médian. Hormis les solutions qui s'en déduisent par rotations successives de 90°, il n'en existe pas d'autres ayant cette propriété. Cela fait donc 4 solutions.

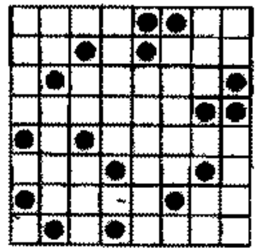
2) On dénombre 5 solutions indépendantes possédant un axe de symétrie diagonal : par exemple les solutions B(13 - 58 - 13 - 57 - 24 - 78 - 46 - 26)

C(24 - 16 - 47 - 13 - 78 - 28 - 35 - 56), D(26 - 13 - 28 - 46 - 78 - 14 - 57 - 35)

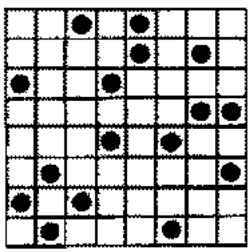
E(26 - 17 - 35 - 78 - 35 - 18 - 24 - 46) et F(17 - 48 - 46 - 23 - 68 - 35 - 17 - 25)



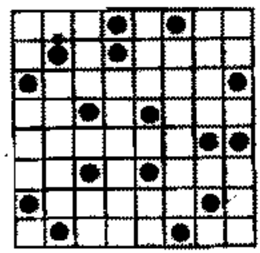
Solution B



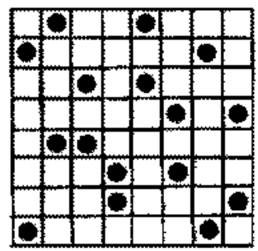
Solution C



Solution D



Solution E



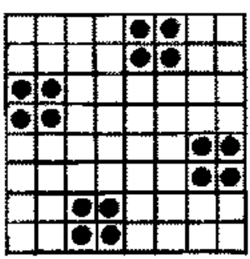
Solution F

En leur adjoignant les solutions déduites par rotations de 90° on obtient 20 solutions.

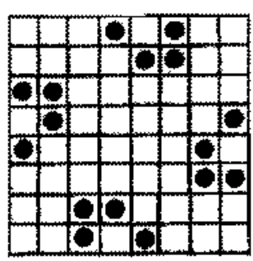
3) On trouve 4 solutions indépendantes invariantes par rotations de 90°. Il en est ainsi des solutions :

G(34 - 34 - 78 - 78 - 12 - 12 - 56 - 56) , H(35 - 34 - 78 - 17 - 28 - 12 - 56 - 46)

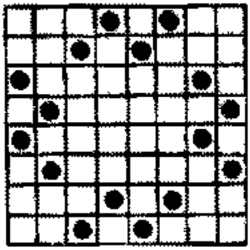
I(35 - 46 - 28 - 17 - 28 - 17 - 35 - 46) , J(35 - 56 - 28 - 12 - 78 - 17 - 34 - 46)



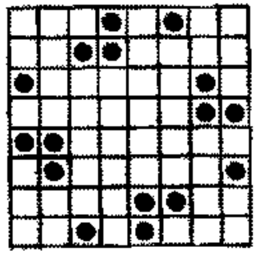
Solution G



Solution H



Solution I



Solution J

Avec les solutions déduites par symétries axiales on compte 8 solutions.

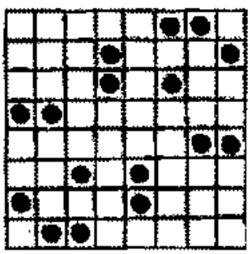
4) Il existe 7 solutions invariantes par rotation de 180° :

K(23 - 15 - 35 - 78 - 12 - 46 - 48 - 67) , L(24 - 35 - 17 - 68 - 13 - 28 - 46 - 57)

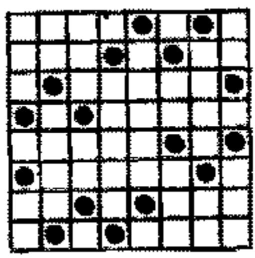
M(24 - 57 - 13 - 68 - 13 - 68 - 24 - 57) , N(25 - 46 - 28 - 16 - 38 - 17 - 35 - 47)

O(35 - 24 - 28 - 13 - 68 - 17 - 57 - 46) , P(35 - 26 - 58 - 17 - 28 - 14 - 37 - 46)

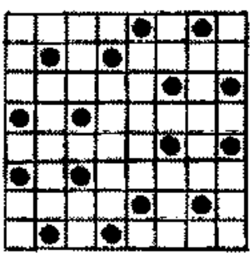
Q(13 - 46 - 24 - 17 - 28 - 57 - 35 - 68) .



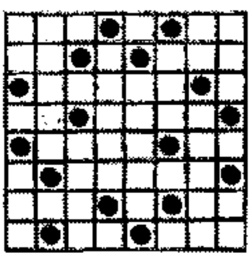
Solution K



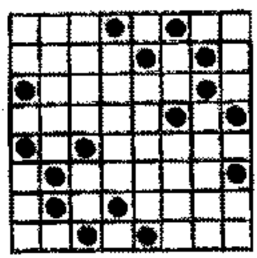
Solution L



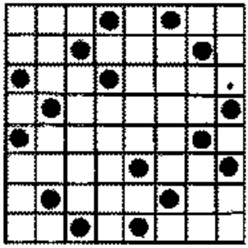
Solution M



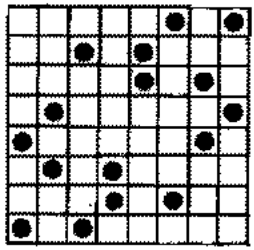
Solution N



Solution O



Solution P



Solution Q

Chacune d'elles compte pour 4 solutions : elle-même et ses images par rotations de 90° ou par symétries d'axes médian ou diagonal. Cela donne 28 solutions.

5) Il n'existe pas de solution admettant deux axes de symétrie. Finalement il y a 17 solutions symétriques indépendantes. Elles font partie d'un total de 60 solutions symétriques différentes.

G. HECQUET et C. SACRÉ de l'IREM de Lille ont réussi à programmer ce problème et en utilisant les ordinateurs de la Faculté ont aussi obtenu ces 60 solutions symétriques, ainsi que 40 solutions non symétriques indépendantes. Chacune comptant pour 8 cela donne 320 solutions non symétriques différentes. Le nombre total des solutions est donc 380.

Autre solution : J. LAGRANGE, à la Faculté des Sciences de Reims a réalisé un programme qui écrit toutes les dispositions de pions répondant à l'énoncé. Mais (question de crédit) il n'a pas laissé tourner l'ordinateur assez longtemps pour aller jusqu'au bout du calcul.

Malgré toute la confiance que nous pouvons accorder au travail de l'équipe de Lille, il serait cependant intéressant qu'un autre calcul sur ordinateur vînt confirmer les résultats précédents. Amateurs... à vos claviers !

ÉNONCÉ N° 90 (VIDIANI, Dijon)

Trouver la limite de la suite définie par $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{u_{n+1} + u_n}$$

Réponse de l'auteur :

Par une récurrence immédiate on prouve que tous les termes de la suite sont strictement positifs et que pour tout n, $u_n + u_{n+1}$ est non nul : donc tous les termes de la suite sont définis.

De plus on a :

$$u_{n+2}-u_{n+1} = \frac{u_n(u_n-u_{n+1})}{u_n+u_{n+1}} \text{ et } u_{n+2}-u_n = \frac{u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)}{u_{n+1}+u_n}$$

par conséquent signe $(u_{n+2}-u_{n+1}) = -$ signe $(u_{n+1}-u_n)$ et
signe $(u_{n+2}-u_n)$ = signe $(u_{n+1}-u_n)$

Cas 0 : $u_1 = u_2$ alors $\forall n \geqslant 1$, $u_n = u_1$.

Cas 1 : $u_1 > u_2$ alors la suite (u_{2k}) est croissante, la suite (u_{2k+1}) est décroissante et $u_{2k} < u_{2k+1}$.

Cas 2 : $u_1 < u_2$ alors la suite (u_{2k}) est décroissante, la suite (u_{2k+1}) est croissante et $u_{2k} > u_{2k+1}$.

Dans le cas 1 la suite (u_{2k}) croissante et majorée par u_1 converge vers une limite $L_2>0$ et la suite (u_{2k+1}) décroissante et minorée par u_2 converge vers une limite $L_1>0$. On procède de même dans le cas 2.

Par passage à la limite dans la relation : $u_{2k+1} = \dfrac{(u_{2k})^2+(u_{2k-1})^2}{u_{2k}+u_{2k-1}}$

on déduit $L_1 = \dfrac{(L_2)^2+(L_1)^2}{L_2+L_1}$ d'où $L_1L_2 + L_1^2 = L_2^2 + L_1^2$
donc $L_2(L_1-L_2) = 0$ ce qui entraîne $L_1 = L_2 = L$.

Donc les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent vers la même limite L, par conséquent la suite (u_n) converge vers la limite L non nulle, qui dépend des "conditions initiales" u_1 et u_2.

La question de la convergence de la suite (u_n) est un classique exercice de taupe : c'est le n° 7 page 62 du traité de mathématiques spéciales de CAGNAC - RAMIS - COMMEAU tome 2, Analyse, édité chez MASSON en 1970 ; et on peut trouver une autre solution dans Bréal crus 80-81 de J. AUBONNET et D. GUINNIN pages 43-44.

Par contre ; bien qu'il soit aisé d'écrire un petit programme pour calculatrice qui permette, u_1 et u_2 étant donnés à la machine, d'obtenir en quelques secondes une bonne approximation de L (par exemple $u_1=1$ et $u_2=2$ donnent $L=1,79194055...$) ; trouver une expression de la limite L en fonction des valeurs initiales u_1 et u_2 semble beaucoup plus délicat. Malgré les tentatives (trigonométriques, géométriques, analytiques...) de plusieurs lecteurs, cette question n'a, à ma connaissance, pas encore reçu de réponse. Allons nous tous baisser les bras, ou bien quelque esprit subtil parviendra-t-il à relever ce défi ?

COURRIER DES LECTEURS

Mademoiselle Lucienne FELIX (de Paris) a étudié la généralisation du problème 90 à des "suites de moyennes" (u_n) définies par leurs deux premiers termes u_1 et u_2 positifs et par une relation de récurrence :

pour $n > 0$ $u_{n+2} = F(u_n, u_{n+1})$ où $F(x,y)$ est une fonction positivement homogène de degré 1, vérifiant $F(x,x) = x$.

En développant des idées de nature géométrique (affine ou projective) Melle FELIX montre comment calculer la limite $L(u_1, u_2)$ en fonction de $u_1 = a$ et $u_2 = b$ dans des cas simples :

$F(x,y) = \dfrac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}$ (moyenne barycentrique) : $L(a,b) = \dfrac{\alpha a + (\alpha + \beta)b}{2\alpha + \beta}$

$F(x,y) = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique) : $L(a,b) = \dfrac{a+2b}{3}$

$F(x,y) = \dfrac{2xy}{x+y}$ (moyenne harmonique) : $L(a,b) = \dfrac{3ab}{2a+b}$

$F(x,y) = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) : $L(a,b) = a^{1/3}\, b^{2/3}$

puis après avoir étudié le calcul plus complexe de la moyenne "arithmético-géométrique" au moyen de la transformation de LANDEN, aborde le cas de la moyenne *"contraharmonique"* :

$$F(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x+y}$$

(qui est celui de l'énoncé 90) en suggérant une méthode analytique pour le calcul de $L(a,b)$.

A cause de son ampleur (16 pages) ce travail ne peut pas être détaillé ici, mais sa qualité et son intérêt justifieraient sa publication dans la rubrique "études" d'un prochain bulletin.

Toujours au sujet de l'énoncé 90, Monsieur J.-P. CARPENTIER (Fontaine les Dijon) prouve que *$L(a,b)$ n'est pas une fraction rationnelle en a et b*, de la façon suivante :

puisque F est positivement homogène de degré 1, L l'est aussi. Posons $f(v) = F(1,v)$ et $\ell(v) = L(1,v)$.

De la construction de (u_n) il résulte l'égalité $L(b, F(a,b)) = L(a,b)$ d'où $b\, L(1, \frac{a}{b} F(1, \frac{b}{a})) = a\, L(1, \frac{b}{a})$ et par suite : $v\, \ell(\frac{f(v)}{v}) = \ell(v)$, ce qui, compte tenu de $F(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ donc de $f(v) = \dfrac{1+v^2}{1+v}$, s'écrit :

$\ell(v) = v\, \ell(\dfrac{1+v^2}{v+v^2})$ (I)

Le problème revient à résoudre cette équation fonctionnelle.

Supposons que ℓ soit une fraction rationnelle. L'identité (I) vérifiée par ℓ sur $]0, \infty[$ s'étend à $\mathbb{C}$, écrivons $\ell(v) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (v-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{m} (v-\beta_j)}$ (on peut supposer ℓ normalisée), alors (I) donne :

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} (v-\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{m} (v-\beta_j)} = \frac{v}{(v+v^2)^{n-m}} \, \frac{\prod_{i=1}^{n} [1+v^2-\alpha_i(v+v^2)]}{\prod_{j=1}^{m} [1+v^2-\beta_j(v+v^2)]}$$

On peut supposer que les deux ensembles $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m\}$ sont d'intersection vide, de ce fait les trinômes

$$1+v^2 - \alpha_i(v+v^2) \text{ et } 1+v^2-\beta_j(v+v^2)$$

n'ont pas de racine commune. Observons de plus qu'ils n'ont ni 0, ni -1 comme racines.

Dans (II) la fraction du membre de gauche est réduite. On réduit celle du membre de droite en simplifiant par v si $n \neq m$, alors les numérateurs et les dénominateurs sont respectivement égaux.

Si tous les α_i sont différents de 1, le degré du numérateur du membre de droite dans (II) est au moins $2n$, alors qu'à gauche le numérateur est de degré n. Donc $n=0$, mais alors v est en facteur au numérateur à droite et pas à gauche : contradiction.

Si au contraire $1 \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ alors tous les β_j sont différents de 1, le degré du dénominateur du membre de droite dans (II) est au moins $2m$, alors qu'à gauche le dénominateur est de degré m. Donc $m=0$, mais alors $(1+v)$ est en facteur au dénominateur à droite et pas à gauche : contradiction. Ce qui achève la démonstration.

Ce résultat, bien qu'étant négatif, est intéressant dans la mesure où il invite à penser que l'expression de $L(a,b)$ en fonction de a et b est peut-être difficile, voire impossible, à écrire à l'aide des fonctions élémentaires. La suite du travail pourrait consister à rechercher des propriétés de la fonction ℓ à partir de l'équation fonctionnelle (I).