courrier des lecteurs

oui ! on doit poser $0^0 = 1$

Dans son article intitulé "0^0 existe ! Je l'ai rencontré" paru dans le Bulletin 346 de l'A.P.M.E.P. de décembre 1984, P. Gagnaire donne de bonnes raisons de poser $0^0 = 1$. Nous pensons utile de donner des raisons très générales qui conduisent à la même conclusion.

L'addition et la multiplication étant acquises dans N, proposons-nous, étant donné $a \in \mathbf{N}$, de définir a^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Le rôle de a apparaît plus clairement en supposant qu'il est élément d'un monoïde E, c'est-à-dire d'un ensemble muni d'une loi associative (que nous noterons multiplicativement) et possédant un élément neutre e. Dans ce cadre général, on définit a^n pour tout $n \in \mathbf{N}$ en posant :

(1) $$a^0 = e \;,\; a^{n+1} = a^n a \; (n \in \mathbf{N}).$$

Suivant le niveau des élèves, cette définition demandera plus ou moins d'explications. Le point essentiel est qu'on a une définition récurrente, ce qui nécessite une initialisation. Dans un monoïde, on doit initialiser avec la règle $a^0 = e$, afin de prendre en compte toutes les possibilités de calcul avec l'élément a. Si E était seulement un demi-groupe (loi associative), on initialiserait avec la règle $a^1 = a$, et a^n ne serait alors défini que pour $n \in \mathbf{N}^*$.

On déduit de la définition (1) la formule (récurrence sur m) :

(2) $$a^{n+m} = a^n a^m \; (n, m \in \mathbf{N}).$$

La validité de (2) pour $n, m \in \mathbf{N}$ peut être invoquée comme justification supplémentaire de la règle $a^0 = e$. Cette justification apparaît comme fondamentale si on l'exprime en termes de morphismes. Un morphisme de monoïdes de $(\mathbf{N}, +)$ dans E est par définition une application $\mathrm{f} : \mathbf{N} \to \mathrm{E}$ telle que :

(3) $$\mathrm{f}(0) = e \;,\; \mathrm{f}(n+m) = \mathrm{f}(n)\,\mathrm{f}(m) \;\; (n, m \in \mathbf{N}) .$$

Le fait que (1) implique (2) a pour conséquence que l'application f_a de N dans E, définie par $\mathrm{f}_a(n) = a^n$, est un morphisme de $(\mathbf{N}, +)$ dans E. De plus f_a est l'unique morphisme de $(\mathbf{N}, +)$ dans E transformant 1 en a. En effet, si f est un morphisme de $(\mathbf{N}, +)$ dans E transformant 1 en a, on a $\mathrm{f}(0) = 1$ et $\mathrm{f}(n+1) = \mathrm{f}(n)\,\mathrm{f}(1) = \mathrm{f}(n)a$, d'où $\mathrm{f}(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Lorsqu'on opère dans le cadre qui précède, il apparaît qu'il n'y a vraiment aucune raison de remettre en cause la règle d'initialisation $a^0 = e$ pour un élément particulier a, sous le prétexte qu'il posséderait telle ou telle particularité. Donc, si l'on prend $\mathrm{E} = (\mathbb{N}, \times)$ ou $(\mathbb{R}, \times)$ et $a = 0$, on doit poser sans hésiter $0^0 = 1$.

La raison qui fait hésiter à poser $0^0 = 1$ est que la fonction de deux variables réelles x^y n'a pas de limite lorsque le point (x,y) tend vers le point $(0,0)$. Mais aucun choix de la valeur de 0^0 ne peut remédier à cela. Alors posons $0^0 = 1$, puisque cela satisfait l'algébriste sans gêner l'analyste.

Bernard CHARLES
Institut de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques
34060 Montpellier Cedex