

# les problèmes de l'a.p.m.e.p.

---

*Cette rubrique propose des problèmes choisis pour leur caractère esthétique ou astucieux, voire récréatif, et dont la résolution nécessite des initiatives, une démarche inventive, une recherche demandant un effort intellectuel.*

*Priorité est donnée aux énoncés composés par des collègues, et au dialogue entre ces derniers par l'intermédiaire des réponses et des solutions. Cette rubrique est pour tous ceux qui aiment inventer ou chercher de "beaux problèmes", ... parfois trouver des solutions, et pour que chacun puisse donner libre cours à son imagination créatrice.*

*Les énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante : (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.)*

M. Dominique ROUX  
5, avenue Pierre et Marie CURIE  
CHADRAC 43000 LE PUY

## ENONCÉS

**ÉNONCÉ N° 101** (Rallye Mathématiques de Franche-Comté 1976)

Soient  $D$  et  $D'$  deux droites de l'espace.

Peut-on trouver deux rotations, l'une  $R$  d'axe  $D$ , l'autre  $R'$  d'axe  $D'$ , telles que  $R(D') = R'(D)$  ?

**ÉNONCÉ N° 102** (ROUX, LE PUY)

Quels sont tous les couples d'entiers naturels  $(x, y)$  pour lesquels  $x^6 + 27y^6$  admet au moins trois diviseurs premiers distincts ?

**ÉNONCÉ N° 103** (CUCULIERE, PARIS)

Deux demi-cercles de diamètres  $AC = a$  et  $AE = b$  sont tangents intérieurement. On construit le cercle  $C_1$  tangent à  $AC$  et aux deux demi-cercles, puis le cercle  $C_2$  tangent à  $C_1$  et aux deux demi-cercles, et ainsi de suite... Calculer la somme des aires des cercles  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$

**Remarque :**

L'auteur nous dit que ce problème lui a été suggéré par la figure 38 de la planche 8 des "Récréations Mathématiques et Physiques" de OZANAM (de l'Académie Royale des Sciences, et Professeur en Mathématique) éditées à PARIS chez JOMBERT rue St. Jacques, au coin de la rue des Mathurins, à l'Image Notre-Dame en 1698, avec privilège du Roy (voir page 734).

**SOLUTIONS****ÉNONCÉ N° 27 (Gérard LETAC)**

Addition et soustraction sont gratuites. La multiplication de deux nombres réels, quels qu'ils soient, coûte 1 franc. On peut descendre à 4 francs le prix de revient du calcul de

$$1 + a + a^2 + \dots + a^7 = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$$

Est-ce bien le coût minimum ?

**SOLUTION de l'auteur :**

La question est imprécise ; il faut convenir que le coût du calcul de 1 est 0, et par suite que les entiers ont un calcul gratuit.

D'autre part, si  $a = \sqrt{2}$  est donné, le nombre cherché est  $15 + 15\sqrt{2}$  qui est calculable avec uniquement des additions donc qui est de calcul gratuit.

Pour ces raisons nous proposons de reformuler la question en "modélisant" le problème comme suit :

Soit  $Z[a]$  l'anneau des polynômes en  $a$  à coefficients dans  $Z$ . Un module  $M$  est un sous-groupe de  $Z[a]$  pour l'addition tel que :

$$\text{si } P \in M \text{ et } n \in Z \text{ alors } nP \in M$$

$M_0$  est le module formé des polynômes en  $a$  de degré inférieur ou égal à 1.

Une chaîne est une suite finie croissante de modules  $(M_k)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , telle que pour tout  $k$ ,  $0 < k \leq n$ , il existe  $q_k$  et  $q'_k$  dans  $M_{k-1}$  tels que

$$p_k = q_k q'_k \notin M_{k-1} \text{ et } M_k = Zp_k + M_{k-1}$$

Par exemple une chaîne  $(M_k)$ ,  $0 \leq k \leq 4$ , est construite à l'aide des polynômes suivants :

$$\begin{array}{lll} q_1(a) = a & , & q'_1(a) = a & , & p_1(a) = a^2 \\ q_2(a) = a^2 & , & q'_2(a) = a^2 & , & p_2(a) = a^4 \\ q_3(a) = 1 + a & , & q'_3(a) = 1 + a^2 & , & p_3(a) = (1 + a)(1 + a^2) \\ q_4(a) = 1 + a^4 & , & q'_4(a) = (1 + a)(1 + a^2) & , & p_4(a) = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \end{array}$$

Si  $P$  est dans  $Z(a)$ , on peut convenir d'appeler calcul de  $P$  la donnée d'une chaîne  $M_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , telle que  $P \in M_n$  mais  $P \notin M_{n-1}$  et  $n$  le coût du calcul de  $P$ .

Le problème posé se reformule alors ainsi : Si  $E$  est le polynôme  $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$  et si  $(M_k)$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , est une chaîne, montrer que  $E \in M_3$  est impossible.

Supposons donc qu'il existe une chaîne  $M_0, M_1, M_2, M_3$  avec  $E \in M_3$ . Comme  $\deg q_1 \leq 1$  et  $\deg q_1' \leq 1$ ,  $\deg p_1 \leq 2$  ; donc  $\forall P \in M_1$   $\deg P \leq 2$ .

On en déduit que  $\deg p_2 = \deg(q_2 q_2') \leq 4$ , donc  $\forall P \in M_2$   $\deg P \leq 4$ .

Comme  $E \in M_3 = p_3 Z + M_2$  et que  $\deg E = 7$  il faut  $\deg p_3 = 7$ .

Or  $p_3 = q_3 q_3'$  avec  $q_3 \in M_2$  et  $q_3' \in M_2$ . Deux cas se présentent :

— ou bien  $\deg p_2 \leq 3$  alors  $\deg q_3 \leq 3$  et  $\deg q_3' \leq 3$  donc  $\deg p_3 \leq 6$ , contradiction.

— ou bien  $\deg p_2 = 4$  alors  $M_2 = p_2 Z + M_1$  ne contient aucun polynôme de degré 3. Par suite  $\deg q_3 q_3' \leq 6$  ou  $\deg q_3 q_3' = 8$ , contradiction avec  $\deg p_3 = 7$  ; ce qui achève la démonstration : 4 est bien le coût minimal.

#### AUTRE SOLUTION : TISSIER (Montfermeil)

#### ENONCÉ N° 83 (AUQUE, Clermont-Ferrand)

De combien de façons peut-on placer les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, dans un carré  $6 \times 6$ , de sorte que chaque nombre apparaisse une fois dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales ?

**SOLUTIONS :** (ce dossier ne comporte pas moins de cinquante pages !)

#### 1) Méthode de J. LEMAIRE (Lille)

1) Dans le carré  $6 \times 6$ , nous distinguons trois régions :

- le "cœur", c'est-à-dire le carré  $2 \times 2$  des quatre cases centrales,
- la "petite enceinte", formée des 12 cases entourant le cœur,
- la "grande enceinte" des 20 cases qui bordent ce carré  $6 \times 6$ .

Les conditions du problème imposent que le cœur soit occupé par quatre nombres différents. Nous supposons qu'il s'agit des nombres 1, 2, 3 et 4, placés comme suit :  $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$ , et nous chercherons le nombre  $p$  de solutions qui correspondent à cette disposition. Le nombre total  $N$  de solutions est le produit de  $p$  par le nombre  $A_6^4$  d'arrangements de 6 objets 4 à 4, c'est-à-dire  $N = 360 p$ .

2) Pour simplifier le langage, les nombres 5 et 6 seront appelés nombres  $K$ . Il y a 12 nombres  $K$  à placer.

Il est évident que, sur chaque enceinte, trois coins quelconques ne peuvent être occupés simultanément par des nombres  $K$ .

Si aucun coin de la grande enceinte n'est occupé par un nombre  $K$ , cette enceinte contient 8 nombres  $K$ . Il en reste 4 pour la petite enceinte.

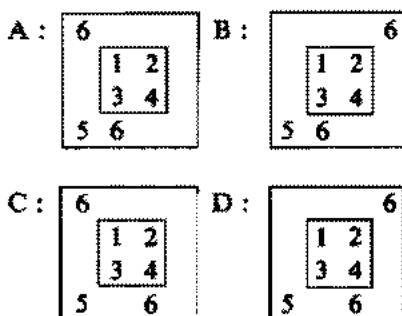
Mais, comme il faut mettre 2 nombres  $K$  sur chaque diagonale du carré, il faudrait disposer ces 4 nombres  $K$  aux coins de la petite enceinte : nous venons de remarquer que c'était impossible.

Si un seul coin de la grande enceinte est occupé par un nombre  $K$  (que nous noterons  $K^*$ ), celle-ci contient 7 nombres  $K$ . Il en reste 5 pour la petite enceinte. Un des coins de celle-ci, situé sur la diagonale portant le nombre  $K^*$ , doit recevoir un nombre  $K$ . On voit alors que les deux coins de cette petite enceinte, situés sur la seconde diagonale, doivent également porter un nombre  $K$ . D'où, ici encore, une impossibilité.

**Conclusion :** deux coins de la grande enceinte contiennent un nombre  $K$ . Ce qui fait 6 nombres  $K$  pour la grande enceinte, et 6 pour la petite, dont 2 occupent des coins.

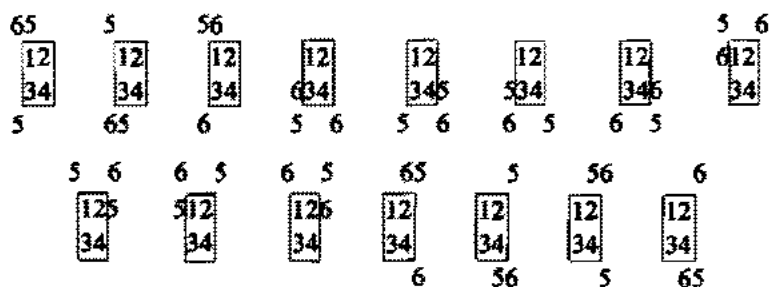
Ainsi, deux des quatre alignements de quatre cases formant la petite enceinte doivent porter 2 nombres  $K$ , l'un de ceux-ci occupant un coin.

3) Nous nous proposons de rechercher toutes les solutions correspondant à l'une des dispositions suivantes :



Nous allons voir que toutes les autres s'en déduisent.

Du fait que la valeur arithmétique des six nombres employés n'entre pas en ligne de compte dans ce problème (on pourrait substituer aux chiffres n'importe quels autres symboles, six couleurs différentes par exemple), les solutions du type A sont aussi nombreuses que celles de chacun des quinze types suivants :



On peut passer d'un quelconque de ces types à un autre, soit en échangeant les chiffres 5 et 6 de la grille, soit en faisant subir à l'ensemble des chiffres de la solution correspondante une isométrie du carré (rotation ou symétrie par rapport à une médiane ou à une diagonale) et en redonnant au cœur sa composition initiale par une permutation convenable des chiffres 1, 2, 3 et 4.

4) La recherche des solutions du type A se fait aisément par essais successifs. Le remplissage d'une nouvelle case, bien choisie, donne lieu, au plus, à deux choix possibles. Certaines cases, progressivement, voient leur affectation imposée, ou impossible, si bien qu'on ne rencontre qu'un nombre réduit d'alternatives : en moyenne, après 4 choix, on est en mesure de dire si la configuration correspondante mène, ou non, à une solution.

On en arrive ainsi à la constatation qu'il existe *16 solutions du type A*. Elles sont rassemblées dans les deux grilles suivantes :

5	②	④	6	3	1
③	6	5	①	4	2
4	3	1	2	⑤	⑥
2	1	3	4	⑥	⑤
①	5	6	③	2	4
6	④	②	5	1	3

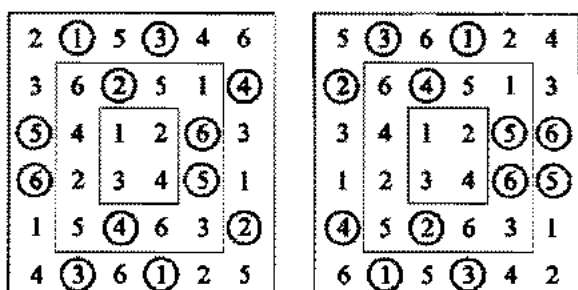
3	④	②	5	1	6
2	6	5	3	4	①
⑤	3	1	2	⑥	4
⑥	1	3	4	⑤	2
4	5	6	①	2	③
1	②	④	6	3	5

étant convenu que l'on peut échanger les chiffres entourés : les 1 avec les 3, les 2 avec les 4, les 5 avec les 6. D'après le 3) on pouvait penser que chacune de ces solutions serait en relation avec 15 autres. En fait, toute solution du type A est également solution du type :

65
12
34
5

et elle n'est associée qu'à 7 autres solutions.

5) Une étude similaire montre qu'il n'existe pas de solutions des types B et D, et qu'il y en a 16 du type C, résumées dans les grilles :



avec les mêmes conventions d'échange que précédemment.

Ici de même, chaque solution est en relation avec 7 autres.

Finalement, nous dénombrons  $p = 16 \times 8 + 16 \times 8 = 256$  solutions dont le cœur est  $\frac{12}{34}$  et le problème admet

$$N = 256 \times 360 = 92160 \text{ solutions.}$$

## 2) Méthode (abrégée) de P. JACQUEMIER (Grenoble)

Appelons A l'ensemble des 4 chiffres situés aux coins de la "grande enceinte", B l'ensemble des 4 chiffres situés aux coins de la "petite enceinte" et C l'ensemble des 4 chiffres occupant les cases du "cœur". On constate que A, B et C ont, deux à deux, 2 éléments en commun. Appelons p et p' ceux de A et B, n et n' les 2 autres dans A, m et m' les 2 autres dans B. Alors

$$A = \{p, p', n, n'\} \quad B = \{m, m', p, p'\} \quad C = \{m, m', n, n'\}$$

Nous appellerons *doublettes* les paires  $\{m, m'\}$ ,  $\{n, n'\}$  et  $\{p, p'\}$  et dessinerons leurs chiffres par des *pions* : m ou m' par ×, n ou n' par ●, p ou p' par ○.

Pour remplir une grille, commençons par garnir de pions ses diagonales, et déjà par placer les ● de A, ce qui peut se faire de 2 façons :

— *première façon* : les placer dans 2 cases d'une même diagonale. On obtient une figure qui, comme ci-dessous, présente un centre de symétrie. On s'assurera que les grilles de chiffres qui en résultent ne sont pas acceptables.

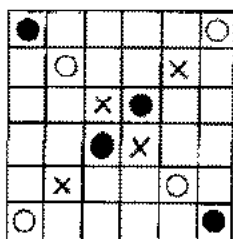
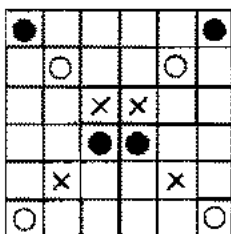


fig. 1

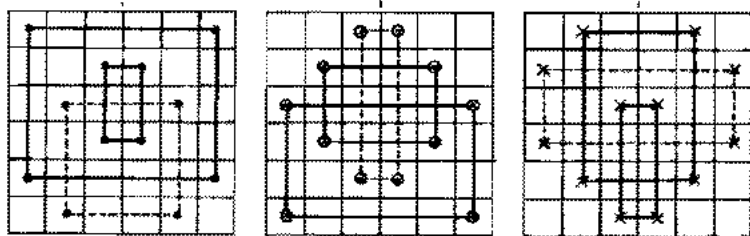
- *deuxième façon* : placer les ● de A sur une même ligne ou une même colonne. Cela entraîne que les doublettes sont
- ou toutes horizontales ou toutes verticales
- ou 2 d'une façon et 4 de l'autre ; mais on s'assurera alors qu'il n'est pas possible de placer les 24 autres pions.

Choisissons de les placer toutes horizontalement. On obtient une figure qui, comme ci-dessous, est symétrique par rapport à la médiane verticale. Les 4 autres ● se placent aux sommets d'un rectangle unique, que nous dirons du *premier type*. De même pour les ○ et pour les ×. Les 12 cases restantes se remplissent de façon unique et donnent 6 autres rectangles que nous dirons du *second type*.

fig. 2



Le garnissage en pions des 36 cases résulte donc uniquement de celui des diagonales ; il présente la même symétrie. Voici les 9 rectangles de la figure ci-dessus ; ceux du second type sont dessinés en trait ininterrompu.



Dénombrons les solutions dont la médiane de symétrie est verticale : mettons d'abord en place les ●, ○ et × : il y a  $2^3$  façons de garnir les diagonales. Chacune d'elles entraîne le garnissage des 36 cases. Attribuons

2 valeurs à ●, 2 à ○, et 2 à × ; cela se fait de  $\binom{2}{6} \times \binom{2}{4}$  façons. Pour chacune d'elles, il y a 2 façons de remplacer par un chiffre les ● d'une diagonale ; les chiffres des rectangles du second type en résultent ; ceux des rectangles du premier type peuvent être placés de 2 façons. De même pour les ○ et pour les ×.

Il y a donc  $2^3 \times \binom{2}{6} \times \binom{2}{4} \times 4^3 = 2^8 \times 6!$  solutions à symétrie verticale, d'où au total  $2^7 \times 6! = 92\,160$  solutions.

*Remarque : Dans toute solution une médiane du carré a un rôle de symétrie que l'autre n'a pas. De plus les lignes (ou les colonnes) se répartissent par deux, les chiffres de l'une étant dans l'ordre inverse des chiffres de l'autre.*

3) **Méthode** (résumée) de D. ROUX avec la collaboration de F. OZOG alors élève au Lycée S. WEIL (Le Puy).

L'idée est d'utiliser une partie de la solution qu'a donnée TARRY en 1900 au problème de 36 officiers posé par EULER en 1782, telle qu'elle se trouve exposée dans le beau livre de A. SAINTE-LAGÜE "Avec des nombres et des lignes" (Paris 1946) pages 213 à 221.

TARRY appelle "groupe magique" d'un carré latin  $6 \times 6$  toute permutation de 1,2,3,4,5,6 obtenue en prenant un terme et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne. Désignons par L le groupe des permutations des lignes du carré, par C le groupe des permutations des colonnes et par R celui des permutations de 1,2,3,4,5,6 c'est-à-dire des renumérotations. TARRY montre que tout carré latin  $6 \times 6$  se ramène grâce à une composée de transformations prises dans L, dans C et dans R à l'un des 17 types de carrés dont il donne la liste.

Puisque l'énoncé 83 revient à se demander : combien y a-t-il de carrés latins  $6 \times 6$  dont les 2 diagonales sont des groupes magiques?, il faut étudier les groupes magiques des 17 types de tableaux carrés de TARRY : 8 n'en ont pas ; 6 autres en contiennent 8 ; 2 contiennent 24 groupes magiques, et le tableau T (appelé 7 bis) en contient 32.

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1
5	6	1	2	4	3
6	5	2	1	3	4

fig. 3

Tableau T

Il faut maintenant à partir de chaque couple de groupes magiques chercher à les amener, au moyen des éléments de L, de C, et de R en positions diagonales. En placer un diagonalement ne nécessite que des permutations, par exemple sur les lignes. Je dirai que deux groupes magiques sont "associés" si l'un étant amené (par des opérations de L ou C) en position diagonale l'autre arrive sur un ensemble de cases deux à deux symétriques par rapport à cette diagonale. On vérifie que c'est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux groupes magiques puissent être envoyés sur les deux diagonales par des opérations de L et C. Or on vérifie qu'un seul des 17 tableaux de TARRY possède des groupes magiques associés : le tableau T, il contient 8 quatuors de 4 couples, cela donne



32 couples possibles ; d'où 32 carrés "primaires" répondant aux conditions de l'énoncé 83.

Soit alors  $D$  le sous-groupe de  $L \times C$  qui conserve globalement les deux diagonales du carré. On vérifie rapidement que  $D$  contient 96 applications. En faisant agir  $R$  et  $D$  sur les 32 carrés primaires on obtient tous les carrés possibles répondant aux conditions de l'énoncé 83, mais il y a des répétitions. Une étude détaillée mais élémentaire des éléments de  $L \times C$  qui conservent le tableau  $T$  à une renumérotation près montre que chaque image est obtenue 24 fois.

Conclusion : chacun des 32 carrés primaires donne par des applications du type  $f \circ g$ ,  $f \in D$ ,  $g \in R$  96  $\times$  6! carrés chacuns, chaque image étant répétée 24 fois le nombre  $N$  cherché est

$$N = \frac{32 \times 96 \times 6!}{24} = 2^7 \times 6! = 92\,160.$$

**Autres solutions :** S. AIDI (Salambo) qui fixe la première ligne du carré, puis fait varier le deuxième chiffre de la diagonale principale : 4 cas dans chacuns desquels il trouve  $4 \times 8$  possibilités ; A. TISSIER (Montfermeil) qui a calculé le nombre  $N_n$  des solutions pour le même problème avec un carré  $n \times n$  : il trouve :

$N_1 = 1$ ,  $N_2 = 0$ ,  $N_3 = 0$ ,  $N_4 = 2 \times 4!$ ,  $N_5 = 8 \times 5!$ ,  $N_6 = 128 \times 6!$  et demande  $N_7$  ; et l'auteur (solution évoquée au cours d'une communication téléphonique).

### ÉNONCÉ N° 88 (EHRHART, Strasbourg)

Un triangle porte comme seuls nœuds d'un quadrillage ses sommets et quatre points intérieurs. Démontrer que ces derniers sont alignés.

#### SOLUTION :

Nous appellerons triangle "propre" tout triangle qui porte comme seuls nœuds d'un quadrillage ses sommets et  $n$  points intérieurs (où  $n \in \mathbb{N}$ ). D'après la formule de PICK(\*) l'aire d'un tel triangle est

$$S = n + \frac{1}{2}.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que les nœuds du quadrillage sont les points à coordonnées entières dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Nous désignerons par  $U$  le groupe des applications affines dont l'expression analytique dans ce repère est de la forme :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^4$  et  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .

Ces applications conservent les propriétés d'alignement, de parallélisme, et les aires, donc transforment tout triangle propre en un triangle propre ayant le même nombre de points intérieurs. (L'image d'un point à coordonnées entières est aussi à coordonnées entières).

Soit PQR un triangle propre. Quitte à prendre son image par la translation de vecteur  $\overrightarrow{FO}$  on peut supposer sans perte de généralité vis-à-vis de notre problème que l'un des sommets est en O : appelons-le triangle OMN, et quitte à échanger M et N on peut supposer que  $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) > 0$ . Donc si les coordonnées de M et N sont :  $M(m_1, m_2)$  ;  $N(n_1, n_2)$  on peut écrire

$$2S = m_1n_2 - m_2n_1 = 2n + 1$$

où  $n$  est le nombre des points intérieurs. Puisque OMN est propre le PGCD de  $m_1$  et  $m_2$  vaut 1 : il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $\alpha m_1 + \beta m_2 = 1$ .

Alors l'élément de U de matrice  $\begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix}$  transforme O en O, transforme M en A(1,0) et transforme N en un point B'(b'\_1, b'\_2). La conservation de l'aire montre que  $b'_2 = 2n + 1$ . Effectuons la division euclidienne de  $b'_1$  par  $b'_2$  :  $b'_1 = q b'_2 + r$  avec  $0 \leq r < 2n + 1$ , alors l'élé-

ment de U de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  transforme O en O, A en A, et B' en

B(b\_1, b\_2) où  $b_1 = b'_1 - q b'_2 = r$  et  $b_2 = b'_2 = 2n + 1$ .

*Notation* : Désignons par  $T_k$  le triangle de sommets O, A,  $B_k(k+1, 2n+1)$  où  $0 \leq k \leq 2n$ .  $T_k$  est propre si et seulement si  $(k, 2n+1) = (k+1, 2n+1) = 1$ .

Nous venons de montrer que tout triangle propre ayant  $n$  points intérieurs est l'image par un élément de U d'un triangle  $T_k$  propre ; donc que l'étude de la propriété d'alignement de ses points intérieurs se ramène à l'examen de cette propriété dans les triangles  $T_k$  propres.

Ainsi lorsque  $n = 4$ ,  $2n + 1 = 9$ , il n'y a que trois triangles à considérer :  $T_1$ ,  $T_4$ ,  $T_7$ . Leurs points intérieurs sont respectivement :

dans  $T_1$  : (1,1) (1,2) (1,3) (1,4)

alignés (avec A) sur la droite d'équation  $x = 1$

dans  $T_4$  : (1,1) (2,3) (3,5) (4,7)

alignés (avec  $B_4$ ) sur la droite d'équation  $y = 2x - 1$

dans  $T_7$  : (1,1) (2,2) (3,3) (4,4)

alignés (avec O) sur la droite d'équation  $y = x$ .

Donc dans tout triangle propre ayant 4 points intérieurs ceux-ci sont alignés.

Cette solution combine les réponses de M. PERET (Gevrey) et L. MORDEFROID (Lons-le-Saunier), autres solutions ; E. EHRHART (Strasbourg), J. LEMAIRE (Lille) et P. MANAC'H (Lorient).

## COURRIER DE LECTEUR

Monsieur Louis MORDEFROID de Lons-le-Saunier envoie une intéressante étude prolongeant le problème n° 88 : il démontre que la propriété subsiste si on remplace dans l'énoncé le nombre 4 par le nombre 7. Il étudie aussi le cas  $n = 10$ . Précisons un peu tout cela :

Introduisons dans l'ensemble de tous les triangles propres à  $n$  points intérieurs une *relation d'équivalence*  $\mathcal{R}$  définie ainsi : deux triangles sont équivalents modulo  $\mathcal{R}$  si et seulement si il existe un élément de  $U$  transformant l'un en l'autre. On vérifie aisément que deux triangles  $T_k$  propres ne sont jamais équivalents : s'il existait  $f \in U$  tel que  $f(T_k) = T_{k'}$  avec  $0 \leq k < k' \leq 2n$  alors  $f(O) = O$ , le cas  $f(A) = A$  et  $f(B_k) = B_{k'}$  n'est pas possible, et le cas  $f(A) = B_{k'}$  et  $f(B_k) = A$  conduit par un calcul rapide à la contradiction  $\det(f) = -1$ .

Compte tenu de ce qui a été prouvé ci-dessus nous concluons :

*Proposition 1 : L'ensemble des triangles propres à  $n$  points intérieurs est partitionné modulo  $\mathcal{R}$  en un nombre fini de classes ; un système de représentants est donné par la famille des triangles  $T_k$  propres ( $0 \leq k \leq 2n$ ).*

Supposons désormais  $n > 1$  (donc  $0 < k < 2n$ )

*Proposition 2 : Il existe trois et seulement trois triangles  $T_k$  propres dont les  $n$  points intérieurs sont alignés : ce sont  $T_1$ ,  $T_n$  et  $T_{2n-1}$ .*

En effet :

— d'une part,  $T_1$  contient  $(1,1) (1,2) \dots (1,n)$  alignés (avec  $A$ ) sur la droite  $x = 1$

$T_n$  contient  $(1,1) (2,3) \dots (n, 2n-1)$  alignés (avec  $B_n$ ) sur la droite  $y = 2x-1$ .

et  $T_{2n-1}$  contient  $(1,1) (2,2) \dots (n,n)$  alignés (avec  $O$ ) sur la droite  $y = x$ .

(Le fait que  $T_1, T_n, T_{2n-1}$  sont propres est immédiat).

— d'autre part, si  $T_k$  a ses  $n$  points intérieurs alignés :

*premier cas :*  $1 < k < n$ ,  $T_k$  contient  $(1,1)$  et  $(1,2)$ , ses  $n$  points intérieurs doivent être d'abscisse 1 donc  $T_k$  contiendrait  $(1,a)$  avec  $a \geq n$ , mais ce point n'est pas intérieur à  $T_k$  : contradiction.

*deuxième cas :*  $n < k < 2n-1$ ,  $T_k$  contient  $(1,1)$  et  $(2,2)$ , donc contiendrait  $(a,a)$  avec  $a \geq n$  ; on vérifie rapidement que là aussi ce point n'est pas intérieur à  $T_k$  : contradiction.

*Corollaire : Si un triangle propre a ses points intérieurs alignés, la droite contenant ces points passe par l'un des sommets du triangle.*

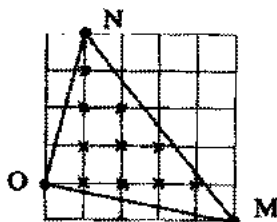
*Exemples :*

— Dans le cas  $n = 7$ , il n'y a que trois classes de triangles propres (modulo  $\mathcal{R}$ ) : celles des triangles  $T_1, T_7$  et  $T_{13}$ . Donc si un triangle propre

contient 7 points intérieurs, ceux-ci sont alignés.

— Dans le cas  $n = 10$ , en plus des classes de  $T_1$ ,  $T_{10}$  et  $T_{19}$ , il n'y en a que deux autres : celles de  $T_4$  et de  $T_{16}$  (il faut  $k$  et  $k+1$  premiers avec 21). L'examen des 10 points intérieurs à  $T_4$  et  $T_{16}$  permet d'énoncer la propriété suivante : si un triangle propre contient 10 points intérieurs non alignés ceux-ci sont répartis dans trois familles de 4 parallèles en  $1+2+3+4$ , et chaque sommet du triangle est aligné avec 4 de ces points.

Exemple : triangle OMN où  $M(5, -1)$  et  $N(1,4)$



La recherche des triangles  $T_k$  propres contenant  $n$  points intérieurs est équivalente à celle des entiers  $k$ ,  $0 < k < 2n$ , tels que

$$(k, 2n+1) = (k+1, 2n+1) = 1.$$

Si  $k$  est solution  $2n-k$  l'est aussi car alors

$$(2n-k, 2n+1) = (2n-k+1, 2n+1) = 1.$$

Donc la recherche des entiers  $k$  vérifiant cette propriété peut être réduite aux entiers  $k$  vérifiant  $1 < k < n$ . A ce sujet, M. MORDEFROID émet la

*Conjecture : Si  $n > 7$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 < k < n$ , tel que  $(k, 2n+1) = (k+1, 2n+1) = 1$ .*

qui est une question de plus proposée à la perspicacité des lecteurs intéressés. Cette propriété est équivalente à l'existence de triangles propres ayant  $n$  points intérieurs, non tous alignés (pour  $n > 7$ ).

Si elle est prouvée, nous pourrions énoncer :

**Proposition 3 :** Les seuls entiers  $n$ ,  $n > 2$ , tels que dans tout triangle propre ayant  $n$  points intérieurs ceux-ci sont alignés, sont 4 et 7.

Pour terminer, ajoutons cette remarque de M. MORDEFROID, fruit de son expérience pédagogique : les triangles propres dans un quadrillage peuvent être l'objet de nombreuses activités instructives et amusantes à faire en classe ; et on peut aussi bien faire trouver certaines réponses à des élèves de 5<sup>e</sup> qu'à ceux qui manient matrices et déterminants.

(\*) Référence pour la formule de PICK : Mathématiques 1<sup>re</sup> S et E, géométrie, collection ISTRA. Thème F, p. 227 à 233.