les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour leur caractère esthétique ou astucieux, voire récréatif, et dont la résolution nécessite des initiatives, une démarche inventive, une recherche demandant un effort intellectuel.

Priorité est donnée aux énoncés composés par des collègues, et au dialogue entre ces derniers par l'intermédiaire des réponses et des solutions. Cette rubrique est pour tous ceux qui aiment inventer ou chercher de "beaux problèmes", ...parfois trouver des solutions, et pour que chacun puisse donner libre cours à son imagination créatrice.

Les énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante : (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.).

M. Dominique ROUX
5, avenue Pierre et Marie CURIE
CHADRAC 43000 LE PUY

PROBLÈMES

ÉNONCÉS

Enoncé n° 97 (Concours général, 1984)

Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Quelle est la plus petite valeur de $f(M) = AM.BC + BM.CA + CM.AB$, M décrivant son plan ?

Enoncé n° 98 (CARREGA, Lyon)

Trouver le plus petit nombre réel k tel que pour tout triangle d'aire S et de périmètre $2p$ on ait $S \leqslant kp^2$.

Enoncé n° 99 (ROUX, Le Puy)

Quel est le volume maximum d'un octaèdre régulier contenu dans un cube de volume 1 ?

Enoncé n° 100 (ROUX, Le Puy)

Reprendre le problème précédent en remplaçant l'octaèdre et le cube par tout couple de solides de Platon.

Remarque : Il y a 5 solides de Platon, le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, l'icosaèdre régulier et le dodécaèdre régulier. Cela donne donc en tout $2\,C_5^2 = 20$ questions différentes, de difficultés d'ailleurs très inégales.

SOLUTIONS

Exercice 13 (Olympiades)

x et y sont deux entiers distincts appartenant à l'ensemble d'entiers naturels consécutifs $E = \{2,3,4, \ldots, 78,79,80\}$.

On donne la valeur de la somme s $(s = x+y)$ à un individu A.

On donne la valeur du produit p $(p = xy)$ à un individu B.

S'engage alors le dialogue suivant :

A, ayant examiné s , déclare à B : "Vous ne pourrez pas trouver x et y".

B, ayant médité cette déclaration et la valeur de p , annonce : "J'ai trouvé x et y".

A, méditant sur tout cela, annonce enfin : "J'ai aussi trouvé x et y". Que vaut x ? Que vaut y ?

Solution : (EUVRARD, Chaville)

Pour que B ne puisse pas trouver x et y , il faut que la décomposition de p en un produit de deux facteurs distincts pris dans E ne soit pas unique. Ceci exclut donc :

1) le cas où x et y sont deux nombres premiers distincts (unicité de la décomposition en facteurs premiers).

2) le cas où p est le cube d'un nombre premier.
Exemple : $p = 5^3 = 5.25$ (décomposition unique).

3) d'autres cas éventuels. Exemple : si $p = 79.80$, sa décomposition en un produit de deux facteurs pris dans E est unique.

Tous ces cas sont exclus par la déclaration de A.

Le 1) entraine que s ne doit pas être somme de deux nombres premiers distincts pris dans E, sinon il se pourrait que p fût le produit de ces deux nombres.

s ne peut donc être un nombre pair (sauf 6) propriété très générale qu'on vérifie facilement jusqu'à 159 : tout nombre pair est somme de deux nombres premiers distincts.

$s = 6$ est aussi exclu, car $6 = 4+2$ et $p = 2.4 = 8$ (décomposition unique).

s ne peut être non plus un nombre impair de la forme 2 + nombre premier.

Les autres cas sont possibles. Exemple : 27 n'est pas la somme de deux nombres premiers.

Nous allons voir que s est inférieur ou égal à 41. Il ne reste alors pour s que 8 valeurs possibles : 11 ; 17 ; 23 ; 27 ; 29 ; 35 ; 37 ; 41.

Vérifions $s \leqslant 41$. En effet, si $s > 41$, s peut s'écrire $s = 41 + a$.

Si $2 \leqslant a \leqslant 80$ et si par hasard p valait $41a$, B voyant dans p le facteur 41 aurait la décomposition unique en xy puisque tout facteur pris dans a pour multiplier 41 donne un x supérieur à 80.

On exclut ainsi toute somme s telle que $41 < s \leqslant 121$.

Mais en reprenant le raisonnement avec 43, 47, ... jusqu'à 79 on voit que s ne peut être non plus entre 121 et $79 + 80 = 159$ (inclus) s est donc bien inférieur ou égal à 41.

Formons alors les ensembles

$$P_s = (xy \;/\; (x,y) \in E^2,\ x \neq y\ ,\ x + y = s)$$

Soit :

$P_{11} = (18,24,28,\mathit{30})$
$P_{17} = (\mathit{30},\mathit{42},\mathit{52},\mathit{60},\mathit{66},\mathit{70},\mathit{72})$
$P_{23} = (\mathit{42},\mathit{60},76,90,\mathit{102},112,\mathit{120},\mathit{126},130,\mathit{132})$
$P_{27} = (50,\mathit{72},92,110,\mathit{126},140,152,162,170,176,\mathit{180},182)$
$P_{29} = (54,\mathit{78},100,\mathit{120},138,154,168,\mathit{180},190,198,204,208,\mathit{210})$
$P_{35} = (\mathit{66},96,124,150,174,196,216,234,250,\mathit{264},276,\mathit{286},294,\mathit{300},304,306)$
$P_{37} = (\mathit{70},\mathit{102},\mathit{132},160,186,\mathit{210},232,252,270,\mathit{286},\mathit{300},312,322,\mathit{330},336,$
$340,342)$
$P_{41} = (\mathit{78},114,148,\mathit{180},\mathit{210},238,\mathit{264},288,310,\mathit{330},348,364,378,390,400,$
$408,414,418,420)$

B qui connaît p affirme avoir x et y ; c'est donc qu'il a s. Donc p ne peut avoir une valeur figurant dans deux P_s distincts, sinon B hésiterait sur s. C'est donc une valeur non *répétée*.

L'énoncé nous dit que A, qui connaît s donc P_s, est en mesure de déterminer x et y sans hésiter. C'est donc que le P_s qu'il connaît est le seul de la liste ci-dessus contenant une seule valeur non répétée : c'est P_{17}.

Par suite $s = 17$ et $p = 52$, donc x et y sont les racines de l'équation $X^2 - 17X + 52 = 0$: ce sont $\underline{x = 4 \text{ et } y = 13}$ (ou l'inverse).

Je n'ai pas reçu d'autre solution.

Enoncé n° 77 (LEMAIRE, Douai)

Quels sont les nombres premiers dont le cube augmenté d'un carré est un bicarré ?

Solution : (ROUX, Le Puy)

L'équation à résoudre s'écrit $p^3 + a^2 = b^4$ avec p premier, a et b dans $\mathbb{N}$, soit : $p^3 = (b^2 - a)(b^2 + a)$. Comme $0 < b^2 - a < b^2 + a$ il n'y a que deux possibilités :

1^er^ cas : $b^2 - a = p$ et $b^2 + a = p^2$; 2^e^ cas : $b^2 - a = 1$ et $b^2 + a = p^3$.

— Dans le premier cas, en ajoutant, on obtient $2b^2 = p(p+1)$. $p = 2$ ne convient pas, donc p est un nombre premier impair divisant b^2, donc divisant b : $b = pb'$ par suite $2pb'^2 = p + 1$; p diviserait $p + 1$ ce qui est impossible.

— Dans le deuxième cas on obtient de même $2b^2 = p^3 + 1$, ce qui, multiplié par 8, conduit à $(4b)^2 = (2p)^3 + 8$; équation du type très classique $y^2 = x^3 + k$ avec $k = 8$. Le plus rapide est alors d'utiliser le résultat connu concernant cette équation ; on le trouve par exemple dans l'Encyclopédie Universalis à l'article DIOPHANTIENNES (EQUATIONS) page 655 : les seules solutions sont, dans $\mathbb{Z}$ les suivantes $(x,y) = (-2,0)$; $(1, \pm 3)$; $(2, \pm 4)$; $(46, \pm 312)$. La seule possibilité correspondant à $x = 2p$ et $y = 4b$ est (1 n'est pas premier) : $p = 23$, $b = \dfrac{312}{4} = 78$ d'où $a = 6083$.

Conclusion :

Un seul nombre premier répond à la question : 23 et $23^3 + 6083^2 = 78^4$.

Autres solutions : Mme S. CHRETIEN (Villemomble) et l'auteur, qui font l'économie du résultat utilisé ci-dessus concernant l'équation $y^2 = x^3 + 8$, en montrant que le P.G.C.D. de $p + 1$ et $p^2 - p + 1$ est 3 et en discutant les diverses factorisations de b qui en résultent.

J'ai également reçu une réponse fausse.

Complément :

La résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $x^2 + y^3 = z^4$ (sans supposer y premier) est une question de haute difficulté si on veut obtenir toutes les solutions. Il est cependant assez facile d'exhiber une infinité de solutions différentes, comme l'a fait Mathieu dans *l'intermédiaire des mathématiciens* (1912) en remarquant que tout nombre triangulaire $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ qui est un carré conduit à une solution car $T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$. Ainsi $T_{49} = 35^2$ et $T_{48} = 1176$ d'où $1176^2 + 49^3 = 35^4$. Prouver qu'il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont des carrés se fait par exemple en résolvant une équation de FERMAT ; c'était l'objet du problème 140 posé dans le *Petit Archimède*, le lecteur intéressé peut se reporter à la solution donnée dans le N° 83, pages 63,64 de cette agréable revue.

Enoncé n° 79 (FRAISSE, Ferals les Corbières)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1$$

Solution : (ROUX, Le Puy)

I Historique

Ce problème est sans doute le plus difficile qui ait été posé dans cette rubrique. Il n'est pas inédit, mais a été posé par Wener Mnich sous une forme équivalente : trouver trois rationnels dont la somme et le produit font 1. Voici à son sujet ce qu'écrivait en 1959 W. Sierpinski de Varsovie dans *"L'enseignement des Mathématiques"* (Genève) II° série, tome V, fascicule 4 : ("Sur quelques problèmes non résolus d'arithmétique").

"On pourrait penser qu'il n'y a pas dans l'arithmétique de problèmes dont l'énoncé est simple et qui ne sont pas encore résolus, et pour lesquels on ne connaît aucune voie par laquelle on puisse obtenir une solution après avoir effectué les calculs nécessaires, abstraction faite de leur longueur. Il en est cependant tout autrement. Comme exemple, je donnerai ici un problème qui nous a été posé il y a quelques années, par un étudiant de l'université de Varsovie, Wener Mnich. Il demanda s'il existe trois nombres rationnels dont la somme ainsi que le produit sont égaux à 1. Ce problème appartient évidemment à l'arithmétique élémentaire, mais, malgré les efforts des mathématiciens les plus éminents, il reste encore non résolu". En fait le problème allait être résolu peu après par J.W.S. Cassels dans : "On a diophantine equation". *Acta Arithmetica*, VI (1960), p. 47-52.

Puis en 1961, dans *Acta Arithmetica*, VI p. 469 W. Sierpinski écrivait : "Il est à remarquer que la question de savoir s'il existe trois nombres rationnels dont la somme ainsi que le produit soient égaux à 1 a été posée en 1956 par M. Werner Mnich ; voir *Elemente der Mathematik* XI (1956) p. 134, où A. Schinzel démontre aussi que pour tout nombre naturel donné $s > 3$ il existe une infinité de systèmes de s nombres rationnels $x_1, x_2, \dots, x_s$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_s = x_1 x_2 \dots x_s = 1$.

Par exemple, pour $s = 4$, les nombres

$$x_1 = -\frac{1}{n^2-1},\ x_2 = \frac{n^2}{n^2-1},\ x_3 = \frac{1-n^2}{n},\ x_4 = \frac{n^2-1}{n},\ \text{où } n = 2,3,4,\dots$$

satisfont à ces conditions".

La démonstration de Cassels fut améliorée par Sansone et Cassels : "Sur le problème de M. Werner Mnich", *Acta Arithmetica VII* (1962) p. 187-190, et se trouve également publiée dans le livre de Mordell : **Diophantine equations** (Academic-press, 1969). chapitre 15 (avec quelques erreurs).

Mordell avait abordé la question plus générale : $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} = d$ $(d \in \mathbb{Z})$

Dans "The diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$", *Colloque sur la théorie des nombres,* Bruxelles (1955), p. 67-76 ; et avait montré que si $k \neq 1, -3, -5$ cette courbe a soit trois points rationnels, soit une infinité. Pour $k = 1$ ou -5 il y en a six (voir IV).

Il se trouve que je m'étais intéressé à ce problème en 1972, attiré par la remarque p. 124 du livre de Sierpinski ; **250 problèmes de théorie élémentaire des nombres** *(Hachette)* :

"Soit l'équation $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = a$. Pour $a = 4$ on ne sait pas si elle *admet des solutions* $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$."

La méthode de la descente infinie dans l'anneau $\mathbb{Z}[j]$ utilisée par Cassels pour $a = 1$ permet en la compliquant un peu de résoudre cette question, ainsi que d'autres un peu plus délicates (par exemple pour $a = -8$). J'avais communiqué mon travail à J.L. COLLIOT-THÉLÈNE (C.N.R.S.) qui, outre quelques remarques très intéressantes, m'a transmis le critère suivant obtenu par Barry Mazur (U.S.A.) publié dans *Inventiones Math* 18, p. 183-266 (1972) :

Si 3 ne divise pas d, si $d^3 - 27$ est sans facteur carré et n'admet qu'un seul diviseur premier congru à 1 modulo 3, alors la courbe $x^3 + y^3 + z^3 = dxyz$ n'a qu'un nombre fini de points rationnels.

Mais la démonstration de Mazur fait appel aux méthodes de géométrie algébrique de A. Grothendieck, qui dépassent largement notre optique ici.

II Enoncés équivalents

En définitive l'énoncé n° 79 a été publié pour la première fois en 1957 par Werner Mnich dans le journal *Matematyka* paraissant à Varsovie, X, N° 1 (45), p. 55, mais le lecteur vient de le constater, ce n'est qu'une des formes équivalentes d'un problème qui peut se poser autrement ; c'est ce que nous allons maintenant justifier par la proposition suivante :

proposition :

Soit d un élément de $\mathbb{Z}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) L'équation $x^3 + y^3 + z^3 = dxyz$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$ telles que $xyz \neq 0$

b) L'équation $a^2c + b^2a + c^2b = dabc$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$ telle que $abc \neq 0$.

c) Il n'existe pas trois entiers rationnels a,b,c tels que $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=d.$

d) Il n'existe par trois nombres rationnels u,v,w tels que $u+v+w=d$ et $uvw=1$.

e) L'équation $(X+Y+Z)^3 = d^3\, XYZ$ n'a pas de solution rationnelle telle que $XYZ \neq 0$.

démonstration :

non a ⇒ non b : Si x,y,z vérifient $x^3+y^3+z^3 = dxyz$ alors $a = x^2y$, $b = y^2z$, $c = z^2x$ vérifient $a^2c+b^2a+c^2b = dabc$.

non b ⇒ non c : Si $a^2c+b^2a+c^2b = dabc \neq 0$, en divisant par abc on obtient $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = d$.

non c ⇒ non d : Si $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = d$ alors $u = \frac{a}{b}$, $v = \frac{b}{c}$, $w = \frac{c}{a}$ vérifient $u+v+w=d$ et $uvw = 1$.

non d ⇒ non e : Si $u+v+w = d$ et $uvw = 1$ alors $X=ud$, $Y=vd$, $Z=wd$ vérifient $(X+Y+Z)^3 = d^3XYZ$

non e ⇒ non a : Si $(X+Y+Z)^3 = d^3\, XYZ$, on peut, quitte à multiplier par un entier convenable, supposer que les rationnels X,Y,Z sont dans **Z**, et, quitte à les diviser par leur P.G.C.D., les supposer premiers entre eux dans leur ensemble, et par suite premiers entre eux deux à deux (car si p premier divise X et Y, p divise XYZ donc $X+Y+Z$, donc p divise Z). Par suite XYZ étant un cube, X, Y, Z sont des cubes : il existe x,y,z dans **Z** tels que $X=x^3$, $Y=y^3$, $Z=z^3$ et alors $x^3+y^3+z^3 = dxyz$.

III La descente infinie

Le principe de la "descente infinie", méthode arithmétique très puissante inaugurée par FERMAT au XVII^e siècle est le suivant : supposant qu'il existe trois entiers rationnels x,y,z vérifiant $x^3+y^3+z^3 = dxyz \neq 0$; on démontre qu'il en existerait trois autres x',y',z' tels que $x'^3+y'^3+z'^3 = dx'y'z' \neq 0$ avec $|x'y'z'| < |xyz|$., et ainsi de suite, ce qui est contraire au fait qu'il n'existe pas dans **N** de suite infinie strictement décroissante.

L'idée de Cassels a été de perfectionner cette méthode en sortant de **Z**, et en traitant le problème dans l'anneau principal $\mathbf{Z}[j]$ où $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est racine cubique de l'unité. La voici, pour le cas où $d=1$.

Partons de $x^3+y^3+z^3 = xyz$ avec $xyz \neq 0$ et $(x,y,z)=1$ on peut supposer par exemple z non divisible par 3. Posons :

$$u = 3x+3y+z\ ,\quad v = 3jx+3j^2y+z\ ,\quad \bar{v} = 3j^2x+3jy+z$$

$\pi = j-j^2$ étant premier dans $\mathbf{Z}[j]$, comme $\pi^2 = -3$, π ne divise pas z, ni $\bar{v}$.

Par suite $u, v, \bar{v}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (si δ divisait $u, v, \bar{v}$ il diviserait $u+v+\bar{v}=3z$ ainsi que $u+jv+j^2\bar{v} = 3y$, donc diviserait 3). Observons alors que $uv\bar{v} = (3x)^3+(3y)^3+z^3-3(3x.3y.z) = -26z^3$ donc que $-26(u+v+\bar{v})^3 = 27\,uv\bar{v}$. Or la factorisation de 26 en produit de nombres premiers dans $\mathbf{Z}[j]$ est : $26 = 2.(3j-1)(3j^2-1)$.

Par suite les différentes possibilités de factorisations sont les suivantes :

Cas I : $u = -26\alpha^3$, $v = j^e\beta^3$, $\bar{v} = j^{2e}\gamma^3$ avec $\gamma = \bar{\beta}$, $\alpha \in \mathbf{Z}$, et $\alpha\beta\gamma = z$. De plus de $j^e\beta^3+j^{2e}\gamma^3-26\alpha^3 = 3\alpha\beta\gamma$, en considérant cette égalité modulo 9, on déduit $e=0$, d'où $\beta^3+\gamma^3-26\alpha^3=3\alpha\beta\gamma$. Posons : $a = \alpha+\beta+\gamma$; $b = \alpha+j\beta+j^2\gamma$; $c = \alpha+j^2\beta+j\gamma$ alors $abc = (3\alpha)^3$ et $a+b+c = 3\alpha$ d'où l'on déduit (en remarquant que $a \equiv b \equiv c$ (mod. π)) que a, b, c sont tous les trois divisibles par 3 :

$a = 3X$, $b = 3Y$, $c = 3Z$ tels que $(X+Y+Z)^3 = XYZ \neq 0$; $(X,Y,Z) = 1$

La proposition nous a montré que cela entraîne l'existence de x', y', z' dans $\mathbf{Z}$ tels que $X = x'^3$, $Y = y'^3$, $Z = z'^3$; alors $x'^3+y'^3+z'^3 = x'y'z'$ et on vérifie aisément que $0 < |x'y'z'| < |xyz|$.

Cas II : $u = 2\alpha^3$, $v = j^e(3j-1)\beta^3$, $\bar{v} = j^{2e}(3j^2-1)\gamma^3$ avec $\alpha\beta\gamma = -z$ et $(3j-1)\beta^3 + (3j^2-1)\gamma^3 + 2\alpha^3 = -3\,\alpha\beta\gamma$, car là aussi une considération modulo 9 montre que e est nécessairement nul. Posons à nouveau :

$a = \alpha + \beta + \gamma$; $b = \alpha + j\beta + j^2\gamma$; $c = \alpha + j^2\beta + j\gamma$ d'où
$3\alpha = a + b + c$; $3\beta = a + j^2b + jc$; $3\gamma = a + jb + j^2c$;
de $3(\alpha^3 + j\beta^3 + j^2\gamma^3) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ on déduit :
$a^2b + b^2c + c^2a = abc$.
La proposition nous permet d'en déduire l'existence de x', y', z' dans $\mathbf{Z}$ tels que $x'^3+y'^3+z'^3 = x'y'z'$ et on vérifie que $0 < |x'y'z'| < |xyz|$

Cas III : $u = 2\alpha^3$, $v = j^e(3j^2-1)\beta^3$, $\bar{v} = j^{2e}(3j-1)\gamma^3$. Ce cas est analogue au cas II, on obtient de même : $a^2c + b^2a + c^2b = abc$ d'où la même conclusion, ce qui achève la démonstration.

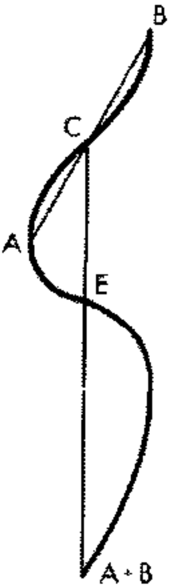
Autres solutions : R. CUCULIÈRE (Paris) cite l'article de Cassels et donne des remarques historiques utilisées ci-dessus. Deux autres lecteurs, tombés dans les chausse-trappes de l'arithmétique, donnent des solutions ingénieuses ... mais fausses.

IV) Compléments

Soit encore $d \in \mathbf{Z}$. La difficulté de la résolution de l'équation diophantienne $x^3 + y^3 + z^3 = dxyz$ est en liaison avec la nature géométrique de ce problème : Dans le plan projectif complexifié, le point de coordonnées homogènes (x, y, z) décrit une cubique $\mathcal{C}$. Celle-ci est décomposée en 3 droites lorsque $d=3$ car

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\,(x+jy+j^2z)\,(x+j^2y+jz)$$

Pour toute valeur de d autre que 3, la cubique n'est pas unicursale : on ne peut pas la paramétrer par des fractions rationnelles, on dit qu'elle est de genre 1 ; pour la paramétrer, on utilise des fonctions elliptiques.



On définit sur $\mathcal{C}$ une addition de la façon suivante :
Soit E l'un des neuf points d'inflexion. Pour tout couple de points (A,B) la droite AB recoupe $\mathcal{C}$ en un point C (la corde AB est remplacée par la tangente lorsque A = B). La droite CE recoupe $\mathcal{C}$ au point A + B. On démontre (ce n'est pas élémentaire) que cette opération est associative, et qu'ainsi $\mathcal{C}$ est munie d'une structure de groupe abélien, dont l'élément neutre est E.

Pour cette même opération, l'ensemble des points rationnels de $\mathcal{C}$: $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ est un groupe : (G, +). Pour les courbes ci-dessus, ce groupe contient toujours les trois points d'inflexion réels de $\mathcal{C}$: $(1,-1,0)$; $(1,0,-1)$; $(0,1,-1)$.

Lorsque $d = -1$, il y a en plus les trois points $(1,1,-1)$; $(1,-1,1)$; $(-1,1,1)$.
Lorsque $d = 5$, il y a aussi les trois points $(1,1,2)$; $(1,2,1)$; $(2,1,1)$.
Pour toutes les autres valeurs de d, G est soit infini (par exemple pour $d = -4$), soit réduit aux 3 points d'inflexion ; c'est le cas pour $d = 1$, et aussi par exemple pour $d = -5,\ -3,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4$.
Pour $d = 0$, ce résultat est connu depuis longtemps : il équivaut à dire que l'équation $x^3 + y^3 = z^3$ n'a pas de solution entière telle que $xyz \neq 0$, et fut énoncé par Fermat.

L'ordinateur peut permettre de montrer que G est infini : dès qu'il donne un triplet (x,y,z) vérifiant l'équation avec $xyz \neq 0$, on est sûr de même coup qu'il y en a une infinité d'autres (si $d \neq -1$ et $d \neq 5$).

Par contre, prouver que G est fini est beaucoup plus difficile, et c'est en cela que le critère de B. Mazur cité plus haut est précieux. Toutefois il ne permet pas de trancher pour toutes les valeurs de d, et il y a encore une infinité de valeurs de d pour lesquelles on ne sait pas si l'équation $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = d$ a ou non une solution entière. Dans l'état actuel de la science, tout progrès dans ce sens est d'une extrême difficulté.

Les lecteurs désireux de connaître quelques informations faciles à lire concernant les courbes elliptiques, le théorème de Mordell-Weil, le rang du groupe G, d'autres résultats récents dûs à B. Mazur concernant le nombre des points d'ordre fini..., pourront consulter la conférence prononcée par S. Lang le 15 mai 1982 au Palais de la Découverte et publiée par la Revue du Palais de la Découverte, vol. 11, n° 104.

Errata : Dans le Bulletin n° 348,

— page 248, ligne 12,
au lieu de : $+\ (a_n - a_{n-1})$, lire : $+\ (a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})$

— page 249, ligne 13,
au lieu de : $(a+b+c)$, lire : $(a+b-c)$.