Bulletin de l'APMEP n°348 - 1985

échanges

minutage ou métrage des bobines et des cassettes

par Daniel Rebeyrol,
Ingénieur D.E.S.S.

Pour mesurer les longueurs, il y a la règle graduée ; pour la mesure des angles, il y a le rapporteur. Mais, pour déterminer tout aussi simplement une longueur, quand elle s'enroule sur elle-même, en spirales, il n'y avait rien !

Prenons un cas concret ; par exemple, les cassettes de votre magnétoscope. Vous les avez enregistrées vous-même ces "spirales de bandes magnétique". Et pourtant, casse-tête parmi tant d'autres, comme faire pour choisir rapidement, d'un simple coup d'oeil, celle qui, parmi elles, contient encore assez de bande vierge pour enregistrer votre prochaine émission ? Le "nec plus ultra", ce serait des cassettes qui indiqueraient d'elles-mêmes, de façon autonome, le minutage restant...

Mais comment mesurer un enroulement sans le dérouler, directement, sans rotation ni compteur ? Il fallait trouver quelque chose. Aussi simple et immédiat que la règle ou le rapporteur, était-ce possible ? Oui.

* * *

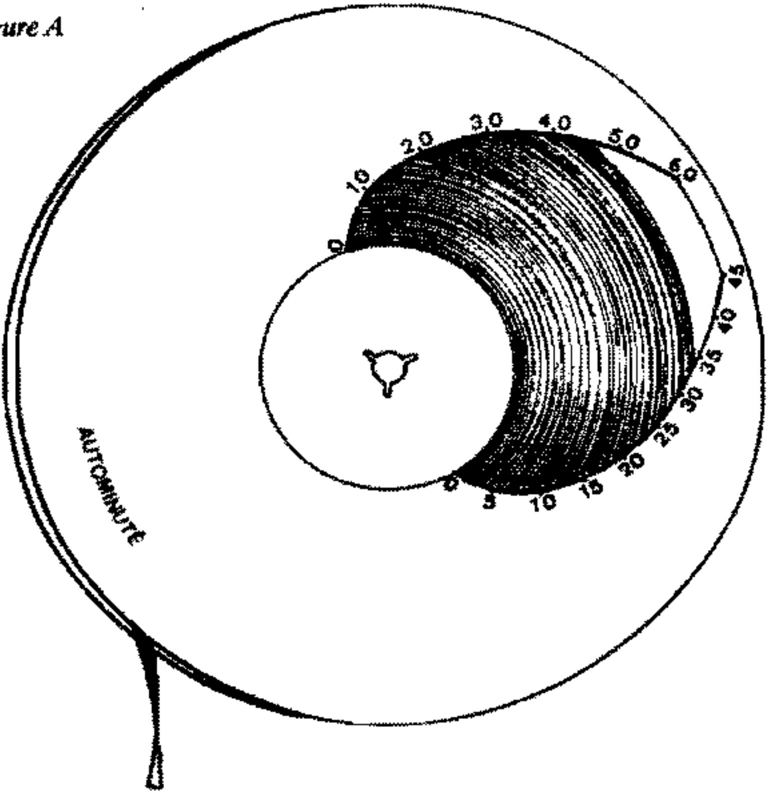
Considérons un enroulement (bande magnétique, film, etc). Il est intéressant de lire directement, simplement en observant une épaisseur de spires enroulées, le minutage ou métrage correspondant. Or les échelles classiques ne conviennent pas : elles sont imprécises (impossibilité d'interpoler rigoureusement) et peu "lisibles", car la loi liant l'épaisseur d'enroulement avec le temps n'est pas linéaire.

Une COURBURE CARACTÉRISTIQUE ORIGINALE (brevetée) remédie à cela. Constituant un instrument inédit, ce profil s'intègre facilement (fente d'engagement de la bande, évidemment des joues, etc.).

Ainsi "autominutées", bobines et cassettes affirment leur supériorité. De plus, excluant tout mécanisme, ce raffinement s'obtient sans compliquer la fabrication.

* * *

Figure A



Un minutage clair et précis singularise cette bobine.

Avec cet évidement "ogival", dont la belle courbure a été définie mathématiquement (voir texte), les intervalles de l'échelle conservent une parfaite régularité sur toute la plage de lecture. L'interpolation entre deux divisions s'y effectue sans erreur d'appréciation et en toute rigueur.

Ce raffinement de technique et d'esthétique prouve que les objets les plus simples savent évoluer.

Figure 1 :

$$\alpha = \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} - 2 \text{ Arc tg} \left\{ \frac{\rho}{r} + \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

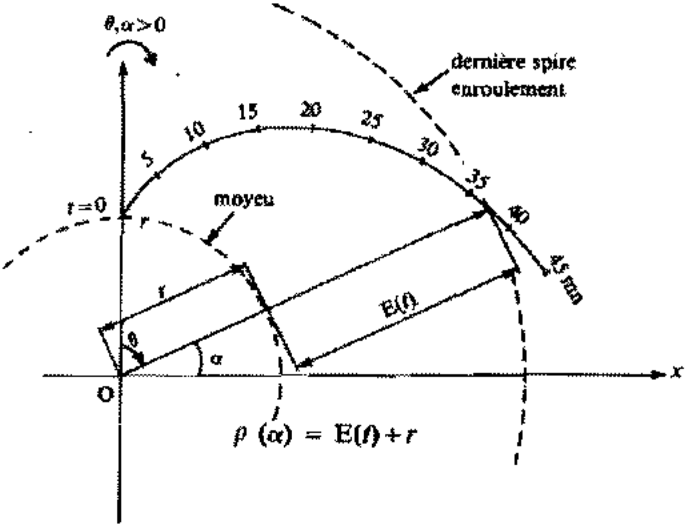
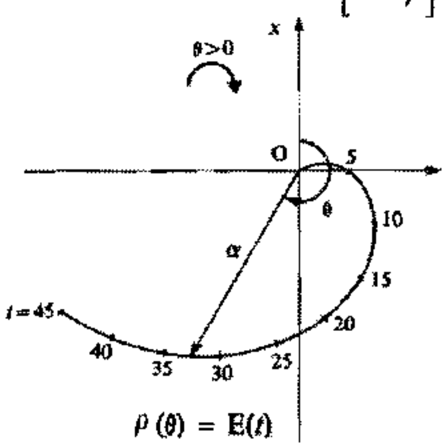


Figure 2 :

$$\theta = \left[\frac{\rho}{r}\left(2 + \frac{\rho}{r}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + 2 \text{ Log } \frac{2^{\frac{1}{2}} + \left[2 + \frac{\rho}{r}\right]^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} + \left[2 + \frac{\rho}{r}\right]^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}$$



avec $\quad E(t) = \left[r^2 + \frac{t}{a}\right]^{\frac{1}{2}} - r \quad$ et $\quad a = \frac{\pi}{eV}$

E(t) : épaisseur d'un ensemble de spires enroulées (comptée selon un rayon) en fonction du temps t .
r : rayon du moyeu de la bobine.
e : épaisseur de la bande.
V : vitesse linéaire de défilement de la bande.

Ces courbes permettent de réaliser un support d'échelle pour le minutage des bandes de magnétophone, par exemple. Il est intéressant de connaître, à la vue de l'épaisseur de spires enroulées, quel est le temps d'enregistrement correspondant. Sur de simples échelles rectilignes, on ne peut qu'obtenir des graduations peu "lisibles" puisque la loi liant l'épaisseur d'enroulement avec le temps n'est pas linéaire. Avec les spirales ci-dessus, au contraire, est réalisée la proportionnalité entre longueur de bande enroulée et longueur représentative correspondante sur l'échelle. Ainsi, on peut facilement interpoler "à vue" — et en toute rigueur — entre deux divisions. Notons qu'avec la courbe de la fig. 2 il faut nécessairement admettre une rotation du plan de la figure en O, ce qui n'est pas le cas avec la fig. 1.

Les figures illustrent une utilisation pratique, celle des bandes, de type "longue durée", conditionnées en bobines dites de "18 cm".
On a : $r = 30$ mm ; $e = 0{,}035$ mm ; $V = 190$ mm/s .

Equations des profils caractéristiques : de nouvelles spirales.

Longueur d'une courbe exprimée en coordonnées polaires :

$$\ell = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta$$

$$d\ell = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta$$

On impose $dt = k\, d\ell$ (voir fig. 1), d'où :

$$\frac{1}{k}\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$$

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2(\theta) = \frac{1}{k^2}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 \qquad (1)$$

Le temps t en fonction de l'épaisseur E d'un ensemble de spires enroulées est tel que

$t = a\,E(t)\,[2r + E(t)]$ avec $a = \frac{\pi}{eV}$; $e \ll 2r$

$dt = 2a\,[E(t) + r]\, dE$

Or : $\rho(\theta) = E(t) + r$ et $d\rho = dE$, d'où :

$\mathrm{d}t = 2a\rho\,\mathrm{d}\rho$ et $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = 2a\rho\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$ (2)

(1) et (2) $\Longrightarrow$ $\quad (\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta})^2 + \rho^2(\theta) = \dfrac{1}{k^2}\,4\,a^2\rho^2\,(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta})^2$

$$\underbrace{(\frac{4a^2}{k^2}\rho^2 - 1)}_{\geqslant 0}(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta})^2 - \rho^2(\theta) = 0$$

si $\rho \geqslant \dfrac{k}{2a}$ **(condition 1)**

$$\sqrt{\rho^2 - \frac{k^2}{4a^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{k}{2a}\,\mathrm{d}\theta \qquad (3)$$

Après changement de variable : $\rho = \dfrac{k}{2a}x$ $\qquad (x \geqslant 1)$

$\mathrm{d}\rho = \dfrac{k}{2a}\,\mathrm{d}x$

le premier membre de (3) s'écrit (intégration) :

$$I = \frac{k}{2a}\int \sqrt{x^2-1}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Posons $x = \operatorname{ch} u \qquad (u \geqslant 0)$

$\mathrm{d}x = \operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u$

$$I = \frac{k}{2a}\int \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}\,\frac{\operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u} = \frac{k}{2a}\int \operatorname{sh}^2 u\,\frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u}$$

$$= \frac{k}{2a}\int \frac{\operatorname{ch}^2 u - 1}{\operatorname{ch} u}\,\mathrm{d}u = \frac{k}{2a}\int \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u - \frac{k}{2a}\int\frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u}$$

$$= \frac{k}{2a}\operatorname{sh} u - \frac{k}{2a}\int\frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch} u} = \frac{k}{2a}\,[\operatorname{sh} u - 2\operatorname{Arctg}(e^u)]$$

avec $\operatorname{sh} u = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u} \qquad (u \geqslant 0)$

$$= \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{4a^2}{k^2}\rho^2 - 1}$$

et pour $2\operatorname{Arctg} e^u$:

$x = \operatorname{ch} u \Longleftrightarrow u = \operatorname{Argch} x \qquad (x \geqslant 1)$

$e^u = e^{\operatorname{Argch} x} = e^{\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2-1})} = x + \sqrt{x^2-1}$

d'où : $2\operatorname{Arctg} e^u = 2\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{2a}{k}\rho + \sqrt{\dfrac{4a^2}{k^2}\rho^2 - 1}\right)$

(3) devient :

$$\sqrt{\frac{4a^2}{k^2}\rho^2 - 1} - 2\operatorname{Arctg}\left(\frac{2a}{k}\rho + \sqrt{\frac{4a^2}{k^2}\rho^2-1}\right) = \theta + \alpha_0$$

Déterminons la constante α_0 :

Condition 2 : $\theta = 0 \Leftrightarrow \rho = r$ (4)

D'autre part, en choisissant k tel que $k = 2ar$, la condition 1 ($\rho \geqslant \frac{k}{2a}$) devient $\rho \geqslant r$. D'où :

$$\sqrt{(\frac{\rho}{r})^2 - 1} - 2 \operatorname{Arctg} [\frac{\rho}{r} + \sqrt{(\frac{\rho}{r})^2 - 1}] = f(\frac{\rho}{r}) = \theta + \alpha_0$$

$$(4) \Longrightarrow \qquad \alpha_0 = -2 \operatorname{Arctg} 1 = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \theta - \frac{\pi}{2} = f(\frac{\rho}{r}) = \alpha$$

Des calculs analogues conduisent à la variante de la figure 2. Ici, le centre polaire n'est plus le centre de l'enroulement.

Au-delà des enroulements habituels en spirales d'Archimède, il serait certainement intéressant d'étudier les profils caractéristiques associés à d'autres spirales (logarithmiques, etc.). La beauté de ces courbes, à elle seule, le justifierait.

Pour conclure, on ne peut s'empêcher d'observer que la classique règle graduée, l'instrument de mesure le plus simple, n'avait pas dit son dernier mot : voilà que les longueurs "enroulées" lui sont accessibles. Une condition : épouser une courbure caractéristique.

A nouveaux profils, nouveaux rôles : maintenant, les cassettes réclament l'entrée en scène de la "règle courbe" !