dans nos classes

numérateur de la dérivée d'un quotient de polynômes

par Alice Jordi
Collège franciscain, Monte-Carlo

1°) Introduction et historique

Le travail suivant a été suscité par la question posée par un élève de Première B : "Existe-t-il un moyen simple de vérifier le résultat trouvé pour la dérivée d'un quotient de polynômes ?". Je propose à la classe de réfléchir avec des degrés inférieurs ou égaux à deux. Nous remplaçons les coefficients par des lettres et nous obtenons un numérateur faisant intervenir trois déterminants précédés des coefficients 1, 2, 1. La question inévitable était : "Et si le degré dépasse 2?". Bien sûr, impossible de convaincre les élèves de recommencer le calcul formel pour un degré 3.

Je décide de chercher une généralisation, les coefficients obtenus me faisant penser à ceux du binôme. Je trouve très vite un contre-exemple ; j'ai fait fausse route. Le calcul montre cependant que le résultat comporte toujours des déterminants multipliés par des coefficients entre lesquels je ne trouve aucun lien. A force d'insister, il me semble voir venir une formule assez pratique.

C'est là que l'ordinateur entre en jeu. Je programme la dérivée d'un quotient de polynômes en utilisant la méthode classique afin de vérifier sur un grand nombre d'exemples si les résultats des deux méthodes concordent. Sans l'ordinateur je n'aurais pas eu le courage de faire toutes ces vérifications. Après un grand nombre d'essais, j'ai la conviction que ma formule est bonne. Il ne reste plus qu'à la démontrer !

2°) Travail présenté

Ce travail a été fait à l'intention des élèves de 1ère B (et destiné également à ceux de 1ère S et de Terminale). Il était important de se restreindre autant dans la démonstration que dans les notations à des éléments connus par eux.

Deux points intéressants à leur niveau : utilisation du symbole de sommation et démonstration par récurrence.

a) Canevas de démonstration. (Pour les élèves il faudrait faire toute la démonstration).

b) Algorithme.

3°) A qui est-il destiné ?

a) La méthode pratique peut être donnée aux élèves de Première et de Terminale toutes séries. Ils regrettent cependant qu'elle ne soit pas autorisée au baccalauréat et qu'ils ne puissent l'utiliser qu'en tant que vérification.

b) La démonstration est accessible aux bons élèves de Terminale toutes séries*.

* *Note de la rédaction :* l'auteur de cet article a présenté cette démonstration à ses élèves de Terminale B.

Un conseil de l'auteur : n'éludez jamais la question d'un élève car elle pourrait amener un algorithme inédit.

Recherche d'un algorithme permettant de calculer les coefficients du numérateur de la dérivée d'un quotient de polynômes

Partie I — Présentation (Voir *fig. 1*)

L'exemple traité concerne la dérivée d'un quotient de deux polynômes tels que l'un d'eux soit de degré 5, l'autre de degré inférieur ou égal à 5. On imagine la complexité des calculs classiques ainsi que tous les risques d'erreurs.

1°) Ecrire les deux polynômes avec 6 termes chacun, en complétant avec des zéros si certains coefficients sont nuls.

2°) *Ecrire sur la première ligne* tous les déterminants 2×2 qu'il est possible de former avec comme colonne de gauche $\begin{matrix} a_5 \\ b_5 \end{matrix}$

(Les indices de la deuxième colonne diminuent de 1) (*fig. 1*).

3°) Multiplier le premier déterminant par 1, le deuxième par 2, etc... jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de déterminant.

4°) *Pour la deuxième ligne,* décaler les déterminants de 2 vers la droite. Les déterminants ont tous une colonne de gauche $\begin{matrix} a_4 \\ b_4 \end{matrix}$

(les indices de la deuxième colonne diminuent de 1).

5°) Multiplier le premier déterminant de cette ligne par 1, le deuxième par 2, etc., jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de déterminant.

6°) *Pour les lignes suivantes,* décaler toujours de 2 vers la droite ; à chaque fois qu'on change de ligne, l'indice de la colonne de gauche diminue de 1.

La figure indique clairement le procédé.

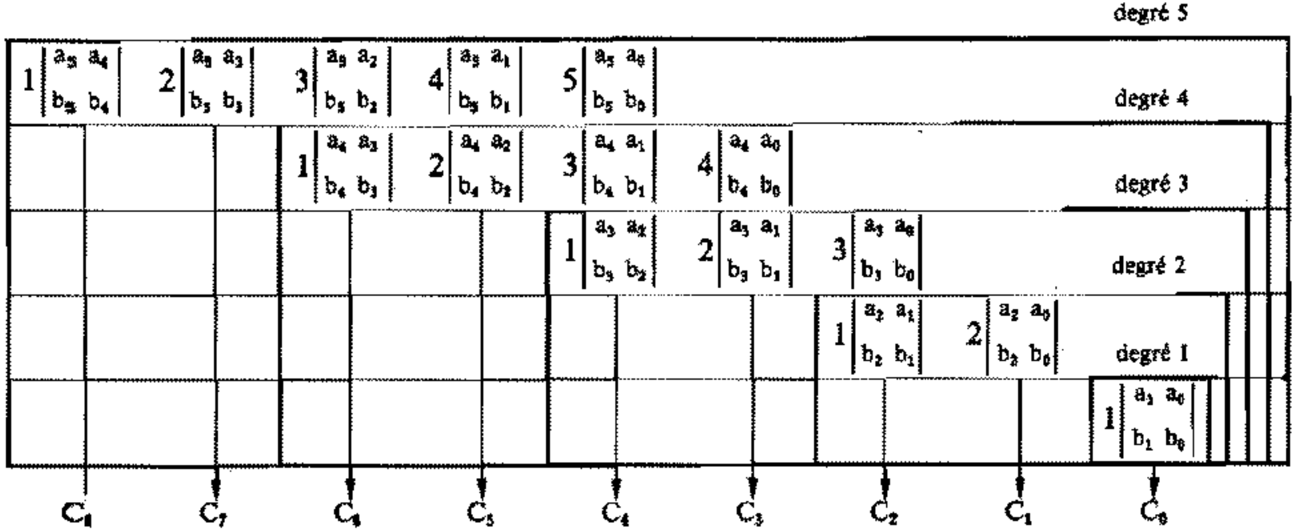
Jusque là, le travail fait est très facilement vérifiable puisqu'il s'agit d'une copie des coefficients.

En effectuant les calculs des déterminants et en multipliant par le coefficient, il ne reste qu'à additionner verticalement ces nombres pour obtenir les coefficients du numérateur de la dérivée. Le nombre en bas à droite est le coefficient du terme de degré 0, et le degré augmente de 1 en se déplaçant vers la gauche.

Pour une meilleure compréhension des élèves, il faudrait leur faire faire quelques calculs à la main leur permettant de mieux comprendre les dispositions des calculs à mener.

Disposition des déterminants pour un degré 5

$$f(x) = \frac{a_5x^5 + a_4x^4 + \dots a_0}{b_5x^5 + b_4x^4 + \dots b_0}$$



(Fig. 1)

Partie II — Eléments de démonstration

I. Introduction :

Soient $\mathcal{P}_n(x)$ et $\mathcal{Q}_n(x)$ deux polynômes,

- non nuls
- de degrés $\leqslant n$

Notations : $\mathcal{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$\mathcal{Q}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

$$f_n(x) = \frac{\mathcal{P}_n(x)}{\mathcal{Q}_n(x)}$$

f_n est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \left\{x \,;\, x \in \mathbf{R} \text{ et } \mathcal{Q}_n(x) \neq 0\right\}$

> L'objet de notre étude est de trouver un algorithme permettant de calculer à la machine les coefficients du numérateur $N_n(x)$ de la dérivée de $f_n(x)$.

$$\boxed{N_n(x) = \mathcal{P}'_n(x)\ \mathcal{Q}_n(x) - \mathcal{P}_n(x)\ \mathcal{Q}'_n(x)}$$

Notre but est, pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'exprimer les coefficients du polynôme $N_n(x)$ en fonction de ceux de $\mathcal{P}_n(x)$ et de $\mathcal{Q}_n(x)$.

II. Calcul de $N_n(x)$:

a) $N_{n+1}(x)$ en fonction de $N_n(x)$:

$\forall n \in \mathbf{N}$ $\quad \mathcal{P}_{n+1}(x) = \mathcal{P}_n(x) + a_{n+1} x^{n+1}$

$$\mathcal{Q}_{n+1}(x) = \mathcal{Q}_n(x) + b_{n+1} x^{n+1}$$

$$N_{n+1}(x) = \mathcal{P}'_{n+1}(x)\ \mathcal{Q}_{n+1}(x) - \mathcal{P}_{n+1}(x)\ \mathcal{Q}'_{n+1}(x)$$

$$= \left[(n+1)a_{n+1}x^n + \mathcal{P}'_n(x)\right]\left[\mathcal{Q}_n(x) + b_{n+1}x^{n+1}\right]$$

$$- \left[\mathcal{P}_n(x) + a_{n+1}x^{n+1}\right]\left[(n+1)b_{n+1}x^n + \mathcal{Q}'_n(x)\right]$$

En explicitant les différents polynômes utilisés et en effectuant les calculs, on obtient :

$$\boxed{N_{n+1}(x) = N_n(x) + \sum_{i=0}^{n}\left[(n+1-i)\,(a_{n+1}b_i - b_{n+1}a_i)x^{n+i}\right]}$$

Soit $D_{(i,j)} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)\, D_{(n+1,i)}\, x^{n+i}$$

Posons $\forall k \in \mathbb{N} \quad A_k(x) = \sum_{i=0}^{k} (k+1-i)\, D_{(k+1,i)}\, x^{k+i}$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad N_{k+1}(x) = N_k(x) + A_k(x)}$

b) Calcul de $N_n(x)$ en fonction de n

On démontrera par récurrence que :

$$\boxed{N_n(x) = N_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)}$$

$N_0(x)$, dérivée d'une fonction constante, est nulle.

*Conclusion : **Formule 1***

$$\boxed{N_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{k} (k+1-i) D_{(k+1,i)}\, x^{k+i} \right]}$$

c) Degré de $N_n(x)$:

Le plus grand degré d'un monôme non nul est inférieur ou égal à la plus grande valeur de $k+i$.

$$\left.\begin{array}{l} k \leqslant n-1 \\ i \leqslant k \end{array}\right| \Rightarrow k+i \leqslant 2n-2$$

Le degré de $N_n(x)$ est inférieur ou égal à $2n-2$.

III. Autre expression des coefficients de $N_n(x)$:

D'après la formule 1 :

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} (k+1-i)\, D_{(k+1,i)}\, x^{k+i}$$

Posons : $I = k+1$ et $J = i$. Nous obtenons :

$$\boxed{N_n(x) = \sum_{I=1}^{n} \left[\sum_{J=0}^{I-1} (I-J)\, D_{(I,J)}\, x^{I+J-1} \right]}$$

Préoccupons-nous du coefficient d'ordre $(k-1)$ avec $k \in \{1, 2, \ldots 2n-1\}$

Ce coefficient c_{k-1} correspond à x^{k-1} donc $k=I+J$

J varie de 0 à $I-1$ donc $0 \leqslant J < I$

I varie de 1 à n donc $1 \leqslant I \leqslant n$

En conclusion : $I+J=k$ et $0 \leqslant J < I \leqslant n$

Pour $k \in \{1, 2, \ldots 2n-1\}$ soit c_{k-1} le coefficient d'ordre $k-1$

Formule 2 :

$$\boxed{c_{k-1} = \sum_{\substack{I+J=k \\ 0 \leqslant J < I \leqslant n}} (I-J) \quad D_{(I,J)}}$$

$$\boxed{c_{k-1} = \sum_{\substack{I+J=k \\ 0 \leqslant J < I \leqslant n}} (I-J) \begin{vmatrix} a_I & a_J \\ b_I & b_J \end{vmatrix}}$$

Remarque : Il est important de s'arrêter ici avec les élèves pour bien montrer la correspondance entre la méthode dite "manuelle" (*fig. I*) et les ***formules 1 et 2.***

Avant de passer à l'informatique, l'élève doit avoir vu plusieurs exemples numériques.

Partie III — Application informatique

Nous proposons ici trois programmes permettant de calculer les coefficients du numérateur de la dérivée d'un quotient de polynômes. Les élèves à qui le travail était proposé étaient débutants en informatique et ne connaissaient que le BASIC. Les programmes sont donc présentés de façon peu académique mais la voie reste libre aux lecteurs pour les améliorer.

Programme A : Il correspond à la transcription de la méthode qu'utilise actuellement tout élève de Première ou de Terminale.

Programme B : Ce programme a été fait avant la démonstration. Il a été utilisé pour vérifier que la méthode "manuelle" décrite (*fig. I*) concordait avec la méthode classique. Les programmes A et B ont été utilisés avec les mêmes exemples et ont donné les mêmes résultats. Nous ne disposions pour élaborer ce programme que de la (*fig. I*), conclusion des tâtonnements de calcul.

Programme C : Ce programme a été écrit après la démonstration et surtout après avoir bien assimilé les formules 1 et 2.

L'étude informatique s'est terminée par la comparaison des temps d'exécution en fonction du degré.

I - Algorithme du programme A

1°) Saisie des degrés des polynômes :

- Degré du numérateur : A
- Degré du dénominateur : B

2°) Saisie des coefficients des polynômes :

Pour i variant de A à 0 en décrémentant de 1
- Saisir les coefficients u_i du numérateur.
- Définir les degrés correspondant p_i.

Pour i variant de B à 0 en décrémentant de 1
- Saisir les coefficients v_i du dénominateur.
- Définir les degrés correspondants q_i

3°) Dérivée du numérateur :

Pour i variant de 0 à A
- $du_i = u_i * p_i$
- degré du terme du_i : $p'_i = p_i - 1$ et $p'_0 = 0$

4°) Dérivée du dénominateur :

Pour i variant de 0 à B
- $dv_i = v_i * q_i$
- degré du terme dv_i : $q'_i = q_i - 1$ et $q'_0 = 0$

5°) Produits au numérateur de la dérivée ($u'v - uv'$) :

Pour i variant de 0 à A
- Pour j variant de 0 à B
  - $A_{i,j} = du_i * v_j$
  - $D_{i,j} = p'_i + q_j$: degré de $A_{i,j}$
  - $A_{i+A,j+B} = -u_i * dv_d$
  - $D_{i+A,j+B} = p_i * q'_j$: degré de $A_{i+A,j+B}$

6°) Groupement des monômes semblables :

Pour K variant de $A+B-1$ à 0 en décrémentant de 1
- $C(K) = 0$
- Pour i variant de 0 à 2A
  - Pour j variant de 0 à 2B
    - Si $D_{ij} = K$ alors $C(K) \leftarrow C(K) + A_{i,j}$

7°) Affichage des résultats :

Pour K variant de $A+B-1$ à 0 en décrémentant de 1.
- Afficher $C(K)$ coefficient du terme de degré K

II - Algorithme du programme B :

1°) Saisie des degrés des polynômes :

- Degré du numérateur : A
- Degré du dénominateur : B

2°) Détermination du plus grand degré :

Si $A > B$ alors $N = A$
Sinon $N = B$

3°) Mise à zéro de tous les coefficients des monômes de degré $\leqslant N$:

Pour i variant de 0 à N en incrémentant de 1.
$A_i = 0$
$B_i = 0$

4°) Saisie des coefficients des polynômes :

Pour i variant de A à 0 en décrémentant de 1
- Saisir coefficients du numérateur : A_i

Pour i variant de B à 0 en décrémentant de 1
- Saisir coefficients du dénominateur : B_i

5°) Calcul des déterminants :

Pour i variant de N à 1 en décrémentant de 1
Pour j variant de $i-1$ à 0 en décrémentant de 1
$D_{i,j} = A_iB_j - A_jB_i$

6°) Définition de la matrice plaçant les déterminants :

Pour i variant de 0 à $N-1$ en incrémentant de 1
Pour j variant de 1 à $2N-1$ en incrémentant de 1
Si $j < 2i$ alors $V_{i,j} = 0$
Si $j > N+i$ alors $V_{i,j} = 0$
Sinon $V_{i,j} = (j-2i)\, D_{N-i,N+i+j}$

7°) Calcul des coefficients du résultat :

Pour j variant de 1 à $2N-1$ en incrémentant de 1
Pour i variant de 0 à N en incrémentant de 1
$C_j = C_j + V_{i,j}$

8°) Affichage des résultats :

Pour j variant de 1 à $2N-1$ en incrémentant de 1
Afficher C_j : coefficient du terme de degré $2N-1-j$

III - Algorithme du programme C :

1°)
2°)
3°) Voir algorithme du programme B
4°)
5°)

6°) ***Calcul des coefficients du résultat :***

a) des termes de degrés inférieurs à N

A partir de $i=1$ et tant que $i \leqslant N$

A partir de $j=0$ et tant que $j < \frac{i}{2}$

$$C_{i-1} = C_{i-1} + (i-2j)D_{i-j,j}$$

b) des termes de degrés supérieurs ou égaux à N

A partir de $i = N+1$ et tant que $i \leqslant 2N-1$

A partir de $j = 0$ et tant que $i+j-N < \frac{i}{2}$

$$C_{i-1} = C_{i-1} + (2N-i-2j)\, D_{N-j,i+j-N}$$

7°) Affichage des résultats :

Pour i variant de 1 à $2N-1$ en incrémentant de 1
Afficher C_{i-1} : coefficient du terme de degré $i-1$.

IV - Bilan des opérations nécessaires en fonction de n (pour programme B)

a) Nombre de déterminants :

Voir (*fig. I*)

On démontrera par récurrence que puisque :

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{k} (k+1-i)\, D_{(k+1,i)}\, x^{k+i} \right]$$

$N_n(x)$ est formé de $1+2+3+\ldots\, n$ déterminants donc.

En appelant D_n *le nombre de déterminants*, on obtient :

$$\boxed{D_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Chaque déterminant nécessite 2 multiplications et 1 soustraction entre variables.

b) Nombre de multiplications entre 2 variables :

$$\boxed{2D_n = n(n+1)}$$

c) Nombre de soustractions entre 2 variables :

$$\boxed{D_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Chaque déterminant est multiplié par une constante.

d) Nombre de multiplications d'une constante par une variable :

$$\boxed{D_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Pour déterminer les différents coefficients, il faut additionner verticalement des nombres.

On vérifiera que *le nombre d'additions entre variables* est :

pour $n = 1$ ou $n = 2$	: 0
pour $n > 2$	: $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

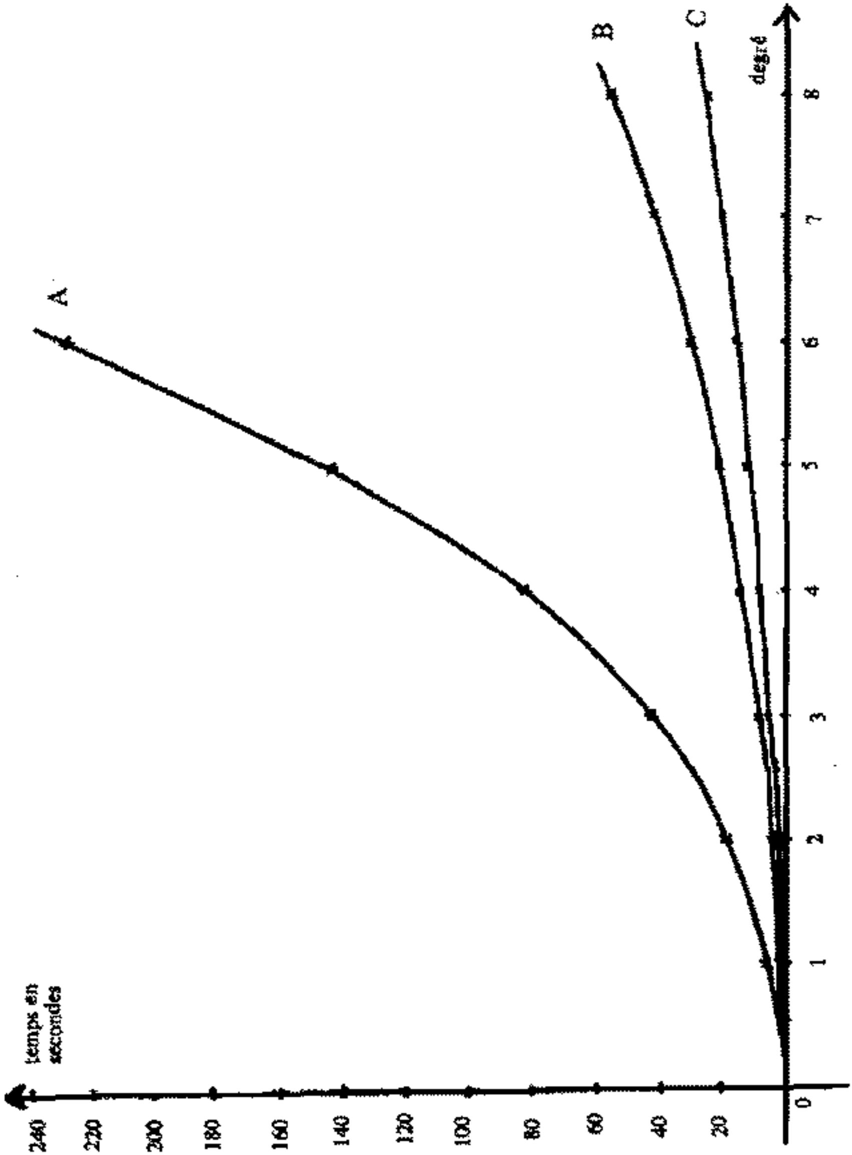
Il est nécessaire de placer les différents déterminants ainsi que les zéros dans la matrice permettant les calculs. Celle-ci est une matrice $(2n-1)\times n$

e) Nombre d'affectations : $n(2n-1)$

V - Etude pour 10 exécutions sur Apple IIe

Temps en secondes

	Fonctions	Prog. A	Prog. B	Prog. C
1	$\dfrac{2x-1}{x+3}$	6	1	1
2	$\dfrac{4x^2+2x-1}{-5x+x+3}$	19	4	3
3	$\dfrac{2x^3+4x^2+2x-1}{-2x^3-5x^2+x+3}$	43	9	5
4	$\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+2x-1}{-x^4-2x^3-5x^2+x+3}$	83	15	8
5	$\dfrac{2x^5+x^4+2x^3+4x^2+2x-1}{x^5-x^4-2x^3-5x^2+x+3}$	144	21	12
6	$\dfrac{5x^6+2x^5+x^4+2x^3+4x^2+2x-1}{3x^6+x^5-x^4-2x^3-5x^2+x+3}$	227	31	16
7	$\dfrac{-2x^7+5x^6+2x^5+x^4+2x^3+4x^2+2x-1}{x^7+3x^6+x^5-x^4-2x^3-5x^2+x+3}$		42	20
8	$\dfrac{3x^8-2x^7+5x^6+2x^5+x^4+2x^3+4x^2+2x-1}{2x^8+x^7+3x^6+x^5-x^4-2x^3-5x^2+x+3}$		54	25


temps en secondes
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
degré
A
B
C

PROGRAMME A

```
5 TEXT
10 HOME
15 REM ******************** SAISIE DES POLYNOMES ***********

20 PRINT : INPUT "DEGRE DU NUM : ";A
30 PRINT : INPUT "DEGRE DU DEN : ";B
35 HOME
38 DIM U(A),V(B),DU(A),DV(B),P1(A),P2(A),Q1(B),Q2(B),A(2 * A,
   2 * B),D(2 * A,2 * B),C(A + B - 1)
40 REM ******** SAISIE DES POLYNOMES ******
45 PRINT "COEFF DU NUMERATEUR : "
50 FOR I = A TO 0 STEP - 1 : INPUT X: LET U(I) = X:P1(I) = I: NEXT I
55 PRINT "COEFF DU DENOMINATEUR : "
60 FOR I = B TO 0 STEP - 1: INPUT V(I):Q1(I) = I: NEXT I
150   REM ******************** CALCULS ********************
155   REM
160   REM ................ DÉRIVÉES ...........................................
170   FOR I = 0 TO A
180 DU(I) = U(I) * P1(I)
190 P2(I) = P1(I) - 1:P2(0) = 0
200   NEXT I
210   FOR I = 0 TO B
220 DV(I) = V(I) * Q1(I)
230 Q2(I) = Q1(I) - 1:Q2(0) = 0
240   NEXT I
250   REM ................. PRODUITS AU NUMERATEUR ................

260   FOR I = 0 TO A
270   FOR J = 0 TO B
280 A(I,J) = DU(I) * V(J):D(I,J) = P2(I) + Q1(J):A(I + A,J + B) = -
    U(I) * DV(J):D(I + A,J + B) = P1(I) + Q2(J)
290   NEXT J: NEXT I
300   REM ................ COEFFICIENTS DU RESULTAT.................
310   FOR K = A + B - 1 TO 0 STEP - 1
320   FOR I = 0 TO 2 * A
330   FOR J = 0 TO 2 * B
340   IF D(I,J) = K THEN C(K) = C(K) + A(I,J)
350   NEXT J: NEXT I: NEXT K
360   REM ********************* AFFICHAGE DES COEFFICIENTS
      **************************************************************
370   FOR K = A + B - 1 TO 0 STEP - 1
380   PRINT "C(";K;") = ";C(K)
390   NEXT K
400   END
```

PROGRAMME B

```
3    REM **************** SAISIE DES POLYNOMES *************
5    HOME
12    INPUT "DEGRE DU NUM : ";A
15    INPUT "DEGRE DU DEN : ";B
20    IF A > B THEN N = A: GOTO 50
25 N = B
48    REM ..... SAISIE DES COEFFICIENTS............................
50    DIM A(N),B(N),D(N,N-1),V(N,2 * N-1),C(2 * N - 1)
55    FOR I = 0 TO N:A(I) = 0:B(I) = 0: NEXT I
60    REM ********** SAISIE DES POLYNOMES ******************
65    PRINT "COEFF DU NUMERATEUR : "
70    FOR I = A TO 0 STEP - 1: INPUT A(I): NEXT I
80    PRINT "COEFF DU DENOMINATEUR : "
90    FOR I = B TO 0 STEP - 1: INPUT B(I): NEXT I
100    REM ****************** CALCULS *********************
105    REM
135    REM ..... CALCUL DES DETERMINANTS ...................
140    FOR I = N TO 1 STEP - 1
150    FOR J = I - 1 TO 0 STEP - 1
170 D(I,J) = A(I) * B(J) - A(J) * B(I)
180    NEXT J
190    NEXT I
192    REM ..... DEFINITION DE LA MATRICE PLACANT LES
       DETERMINANTS ...................................
200    FOR T = 0 TO N- 1
210    FOR K = 1 TO 2 * N - 1
215    REM ..... DEFINITION DES ZEROS PRECEDANT LES
       DETERMINANTS ...................................
220    IF K < = 2 * T THEN V(T,K) = 0: GOTO 250
225    REM ..... DEFINITION DES ZEROS SUIVANT LES
       DETERMINANTS ...................................
229    IF K > (N + T) THEN LET V(T,K) = 0: GOTO 250
230    REM ..... POSITIONNEMENT DES DETERMINANTS ..........
235 V(T,K) = (K - (2 * T)) * D(N - T,N + T - K)
250    NEXT K
260    NEXT T
265    REM ..... CALCUL DES COEFFICIENTS .....................
280    FOR K = 1 TO 2 * N - 1
290    FOR T = 0 TO N
300 C(K) = C(K) + V(T,K)
310    NEXT T
312    REM ..... AFFICHAGE DES RESULTATS .....................
315    PRINT "C(";2 * N - 1 - K;")=";C(K)
320    NEXT K
330    END
```

PROGRAMME C

```
3    REM ***************** SAISIE DES POLYNOMES *********
5    HOME : CLEAR
12   INPUT "DEGRE DU NUM : ";A
15   INPUT "DEGRE DU DEN : ";B
20   IF A > B THEN N = A: GOTO 50
25 N = B
48   REM ...... SAISIE DES COEFFICIENTS ........................
50   DIM A(N),B(N),D(N,N - 1),C(2 * N - 1)
55   FOR I = 0 TO N:A(I) = 0:B(I) = 0: NEXT I
60   REM ********** SAISIE DES POLYNOMES ******************
65   PRINT "COEFF DU NUMERATEUR : "
70   FOR I = A TO 0 STEP - 1: INPUT A(I): NEXT I
80   PRINT "COEFF DU DENOMINATEUR : "
90   FOR I = B TO 0 STEP - 1: INPUT B(I): NEXT I
100  REM ********************** CALCULS *****************
105  REM
135  REM ...... CALCUL DES DETERMINANTS ....................
140  FOR I = N TO 1 STEP - 1
150  FOR J = I - 1 TO 0 STEP - 1
170 D(I,J) = A(I) * B(J) - A(J) * B(I)
180  NEXT J
190  NEXT I
200  REM ..... COEFFICIENTS D'ORDRES < DEGRE ...............
205 K = 1
210  IF K > N THEN 270
220 A = 0
230  IF A > K / 2 THEN 260
240 C(K - 1) = C(K - 1) + (K - 2 * A) * D(K - A,A)
250 A = A + 1: GOTO 230
260 K = K + 1: GOTO 210
270  IF K > 2 * N - 1 THEN 330
275  REM ..... COEFFICIENTS D'ORDRES >= DEGRE .............
280 A = 0
285 F = K - N
290  IF F + A > K / 2 THEN 320
300 C(K - 1) = C(K - 1) + (N - F - 2 * A) * D(N - A,F + A)
310 A = A + 1: GOTO 290
320 K = K + 1: GOTO 270
325  REM ...... AFFICHAGE DES RESULTATS ...................
330  FOR I = 2 * N - 1 TO 1 STEP - 1
340  PRINT "C(";I - 1;")=";C(I - 1)
350  NEXT I
360  END
```