Bulletin de l'APMEP n°347 - 1985

dans nos classes

une théorie naïve : le collage des figures

par Eric-Olivier Lochard, Christian Mallol, Dany Serrato, Max Vincent
U.E.R. de Mathématiques, Montpellier III

1. Introduction

Le travail présenté se situe dans le cadre de l'enseignement des mathématiques à des étudiants d'une Université de Lettres et Sciences Humaines : Montpellier III.

Suivant le domaine propre de l'étudiant, l'objectif principal poursuivi dans un tel enseignement est, ou bien rendre opératoires des résultats d'une théorie applicable à ce domaine, ou bien faire pratiquer une activité mathématique à des étudiants sans grandes connaissances préalables, sous le point de vue de la modélisation "formelle" d'objets externes aux mathématiques. L'exemple développé ici est l'un des moyens que nous avons utilisés dans cette deuxième optique.

Plutôt que d'exposer partiellement une théorie et de demander aux étudiants le travail qui consiste en la redécouverte de certains de ses résultats et leur application, nous avons opté pour la présentation d'objets simples, directement accessibles à l'intuition (les figures obtenues par "collage" à partir d'un alphabet), dont les étudiants doivent élaborer une théorie au travers de questions posées par les enseignants.

Par "élaborer une théorie", nous entendons :
— se familiariser avec les objets et apprendre à les manipuler ;
— poser des conjectures concernant leurs propriétés ;
— résoudre ces conjectures avec une formalisation économique et cohérente.

L'environnement de cet enseignement est universitaire. Cependant la richesse et la simplicité de ces objets rendent possible et fructueuse leur étude dans un environnement scolaire.

Nous proposons, ici, les différentes étapes de cette élaboration. Après la présentation de ces objets et divers exercices de manipulation nous donnons des thèmes de recherche sous forme de problèmes à résoudre, des réponses possibles, et éventuellement quelques commentaires.

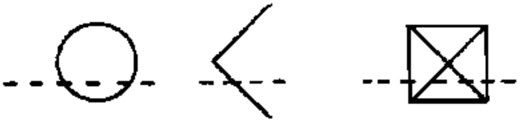
Certaines des idées présentées ici sont dues à Yves CESARI.

2. Présentation des objets de la théorie

Figure

Une figure est une forme géométrique qu'on peut dessiner sans lever le crayon, traversée par un axe "horizontal" virtuel ou non, l'axe principal, qui la coupe en au moins un point.

Exemple



Pour les raisons techniques, on suppose que :
— le point n'est pas une figure ;
— les traits sont sans épaisseur ;
— toute figure est traversée par au moins une horizontale en un nombre fini de points ; en particulier ..________... n'est pas une figure.

Une figure telle que nous venons de la définir est représentée — dessinée — par une figure au sens usuel de la géométrie plane. On utilisera le même mot pour désigner l'objet et sa représentation, l'intérêt d'une telle confusion dépassant largement d'éventuels inconvénients.

Egalité de figures

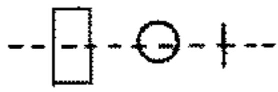
Le point de vue de la géométrie classique donne un sens à l'égalité de deux figures :

f et g sont égales si leurs dessins sont les mêmes, modulo les translations laissant l'axe principal invariant.

Loi de composition : le collage

A partir des deux figures f et g , on construit la figure "f collée à g" notée fg de la manière suivante :

— on place la figure g à droite de f de sorte que les axes principaux soient colinéaires ;
— on translate f vers la droite, ou g vers la gauche, le long de l'axe commun, jusqu'à ce que les deux figures soient au contact l'une de l'autre.

Exemple : f, g, k sont les figures 

les figures fg , gf et fk sont les figures 

On note F(A) l'ensemble des figures produites par collage à partir d'un alphabet A de figures primitives.

On remarquera l'égalité des figures fk, kf et f . Plus généralement on dira que f absorbe g à droite (resp. à gauche) si fg = f (resp. gf = f). Une figure est dite absorbante si elle absorbe toutes les figures de F(A).

Problème

Un premier travail consiste à s'"approprier" ces figures au travers d'exercices divers : exemples, contre-exemples, tableaux de collage et quelques exercices parmi lesquels :

1. Peut-on construire deux figures f et g telles que $fg = f$ et $g^2 = gg = g$?
2. Existe-t-il un alphabet A de sorte que F(A) contienne une figure absorbante à droite et ne contienne pas de figure absorbante à gauche ?

Ce travail a permis de mettre en évidence une classe particulièrement intéressante de figures : les figures sans-épaisseur.

Une figure est dite *sans-épaisseur* (s.e.) si toute horizontale la traverse en au plus un point. On a les propriétés suivantes :

(1) f est s.e. ssi $f^2 = f$

(2) $fg = f \Longrightarrow g$ est s.e.

(3) fg est s.e. ssi f et g sont s.e. et $fg = gf$

Les démonstrations sont laissées au lecteur. Les propriétés (1) et (2) répondent au premier exercice.

Une autre notion très utile pour exprimer des propriétés est le bord d'une figure.

Le bord gauche (resp. droit) de f, noté $B_g f$ (resp. $B_d f$) est la sous-figure de f formée des points gauches (resp. droits) de f situés sur chacune des horizontales qui la coupent.

On utilise le terme sous-figure au sens de la géométrie du plan : g est une sous-figure de f si le dessin de g est une partie du dessin de f . Cette notion n'est pas interne à la théorie puisqu'une sous-figure n'est pas nécessairement une figure :

si f est la figure , $B_g f$ est la sous-figure 

On a quelques propriétés utiles :

(4) f est s.e. ssi $f = B_g f = B_d f$

(5) $fg = f$ ssi f est une partie de $B_d f$

Les deux propriétés, ajoutées à la deuxième répondent au deuxième exercice.

3. Associativité du collage

Problème 0 : Existe-t-il trois figures f,g,k telles que $(fg)k \neq f(gk)$?

Problème : Caractériser les triplets de figures associatives.

La réponse est dans le théorème.

Théorème

$(fg)k = f(gk)$ si et seulement si

(1) $fg = f$ et $gk = k$

ou

(2) g est en contact avec k dans $(fg)k$.

La preuve repose en partie sur un lemme suivant :

Les figures f et k coïncident avec elles-mêmes quand on superpose les figures $(fg)k$ et $f(gk)$.

Commentaires

La preuve est relativement accessible à l'intuition (sans (1) ni (2), g va "bouger"). La difficulté consiste en sa rédaction. En particulier le cas où les parties "propres" à g sont constituées de segments horizontaux semi-ouverts va nécessiter l'introduction d'outils métriques.

4. Commutativité du collage

Problème 0 : Existe-il deux figures dont le collage ne commute pas ? ($fg \neq gf$)

La réponse étant visiblement positive, la question devient :

Problème : A quelles conditions sur f et g a-t-on $fg = gf$?

Notons H_f l'ensemble des horizontales qui coupent f. La réponse est dans le théorème :

Théorème :

On a $fg = gf$ ssi on est dans une au moins des trois situations suivantes :

a) une des deux figures absorbe l'autre à droite et à gauche

b) les sous-figures $f \cap H_g$ et $g \cap H_f$ sont égales et s.e.

c) il existe une figure m telle que $f = m^p$ et $g = m^q$ avec $p,q \geqslant 1$

Une démonstration repose sur l'idée suivante :

si $fg = gf$ et $H_f \setminus H_g \neq \phi$ alors $g \cap H$ est une sous-figure de $B_d f$ et de $B_g f$ (donc s.e.), que l'on applique à l'étude de quatre cas que l'on obtient suivant que $H_f \setminus H_g$ ou $H_g \setminus H_f$ soient vides ou non.

Dans le cas de figure $H_f = H_g$, la démonstration s'inspire d'une propriété des monoïdes libres : si $uv = vu$ alors u et v sont puissance d'un même élément.

Commentaires

Les étudiants trouvent assez rapidement un certain nombre de cas de figures commutatives ; la difficulté est alors de caractériser les propriétés de ces cas de figures et de montrer qu'elles sont nécessaires.

En particulier la preuve du théorème est difficile, d'autant plus que beaucoup l'ont abordée sans avoir envisagé le cas (c). Cette preuve fait d'ailleurs appel, pour être très complète, à des notions techniques (passage au continu) et sans intérêt dans la perspective de ce travail. C'est la raison qui nous a amenés à exclure un type de figures (cf. définition).

5. Finitude de F(A)

Problème : Trouver des conditions pour que l'ensemble F(A) soit fini.

Commentaires : Une des difficultés (et l'un des intérêts) consiste à déterminer sur quoi doit porter la condition.

La solution exposée ici est une liste de conditions trouvées par les étudiants qu'il nous a fallu démontrer comme étant équivalentes.

Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) F(A) est fini

(2) Toutes les figures de F(A) sont s.e.

(3) Il y a une figure de F(A) qui absorbe à droite et à gauche toutes les figures de F(A)

(4) Le collage de deux figures de l'alphabet produit une figure s.e.

(5) Les figures de l'alphabet commutent par collage et sont s.e.

La démonstration peut se faire selon le schéma :

$$\begin{tikzcd} (1) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (2) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (3) \\ (5) & (4) \arrow[l, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Seule l'implication (5) $\Longrightarrow$ (1) présente quelques difficultés (on montre que le collage est associatif et commutatif et donc card [F(A)] est plus petit ou égal à $2^{\mathrm{card}(A)}$.