les fiches cuisine de tonton lulu

le triangle quelconque : une nouvelle recette(*) !

par Jacques Lubczanski,
ENSET Cachan

J'aurais dû m'en douter : pour un plat aussi commun que le triangle quelconque, chacun à sa recette originale, transmise amoureusement de génération en génération, et qui ne souffre aucune variante : la précédente recette m'a valu de nombreuses protestations.

Aussi, pour en mécontenter le moins possible, voici une recette tout à fait nouvelle, basée sur l'idée d'un confrère, pour lequel *le triangle le plus quelconque sera celui dont les angles seront les plus différents les uns des autres*.

Cette idée a l'avantage sur la précédente* de ne privilégier aucun côté, aucun angle du triangle cherché ; on peut donc espérer qu'elle mènera à une solution unique.

Le problème se pose donc de la façon suivante :

Si α, β et γ désignent les mesures en radians, des trois angles d'un triangle, comment choisir α, β et γ de façon que les écarts $|\alpha-\beta|$, $|\beta-\gamma|$ et $|\alpha-\gamma|$ soient les plus grands possibles ?

Si on suppose $\alpha>\beta>\gamma$, on est ramené à maximiser $\alpha-\beta$ et $\beta-\gamma$, soit à maximiser $\alpha-\beta$ et $\alpha+2\beta-\pi$, puisque $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

---

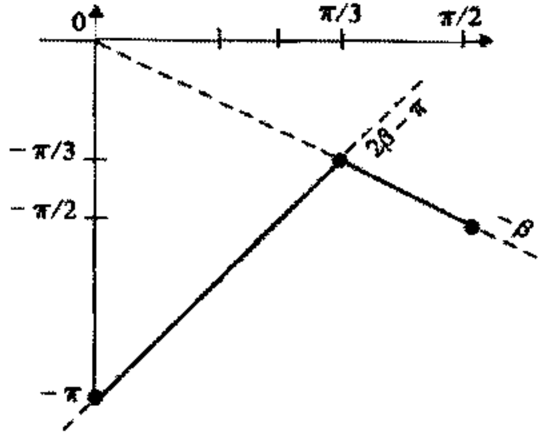
* Voir "Comment réussir le triangle quelconque !", Bulletin 347, page 103.

Si on impose aucune autre condition à α et β que d'être dans $[0, \frac{\pi}{2}]$,
posons $\varphi(\alpha,\beta) = \inf\limits_{\substack{\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \beta\in[0,\frac{\pi}{2}]}} \left\{\alpha-\beta\ ;\ \alpha+2\beta-\pi\right\}$

et rendons $\varphi(\alpha,\beta)$ le plus grand possible.

On a : $\varphi(\alpha,\beta) = \alpha + \inf\{-\beta\ ;\ 2\beta-\pi\}$

Or la courbe $\beta \mapsto \inf\{-\beta\ ;\ 2\beta-\pi\}$ a l'allure suivante sur $[0,\pi/2]$:



Elle est donc maximale pour $\beta = \frac{\pi}{3}$.

$\varphi(\alpha,\beta)$ sera donc maximal pour $\beta = \pi/3$ et α le plus grand possible c'est-à-dire $\alpha = \pi/2$.

On obtient donc un triangle... rectangle !

Cette réponse n'est donc pas très satisfaisante pour un triangle quelconque.

Affinons un peu le problème :

Si on veut rester "à distance" du triangle rectangle, il suffit d'ajouter la condition : l'écart $\frac{\pi}{2} - \beta$ doit être le plus grand possible.

On définit alors $\psi(\alpha,\beta)$ par : $\psi(\alpha,\beta) = \inf\left\{\frac{\pi}{2}-\alpha\ ;\ \alpha-\beta\ ;\ \alpha+2\beta-\pi\right\}$
et on cherche encore à optimiser $\psi(\alpha,\beta)$.

On peut utiliser nos résultats précédents en remarquant que

$$\psi(\alpha,\beta) = \inf\left\{\frac{\pi}{2}-\alpha\ ;\ \varphi(\alpha,\beta)\right\}$$

On est donc amené à distinguer selon que $\beta < \frac{\pi}{3}$ ou $\beta \geqslant \frac{\pi}{3}$;

Si $\beta < \frac{\pi}{3}$, $\varphi(\alpha,\beta) = \alpha + 2\beta - \pi$; distinguons deux sous-cas :

ⓐ Si $\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \alpha + 2\beta - \pi \iff \alpha + \beta \geqslant \frac{3\pi}{4}$, alors $\psi(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

ⓑ Si $\frac{\pi}{2} - \alpha \geqslant \alpha + 2\beta - \pi \iff \alpha + \beta \leqslant \frac{3\pi}{4}$, alors $\psi(\alpha,\beta) = \alpha + 2\beta - \pi$

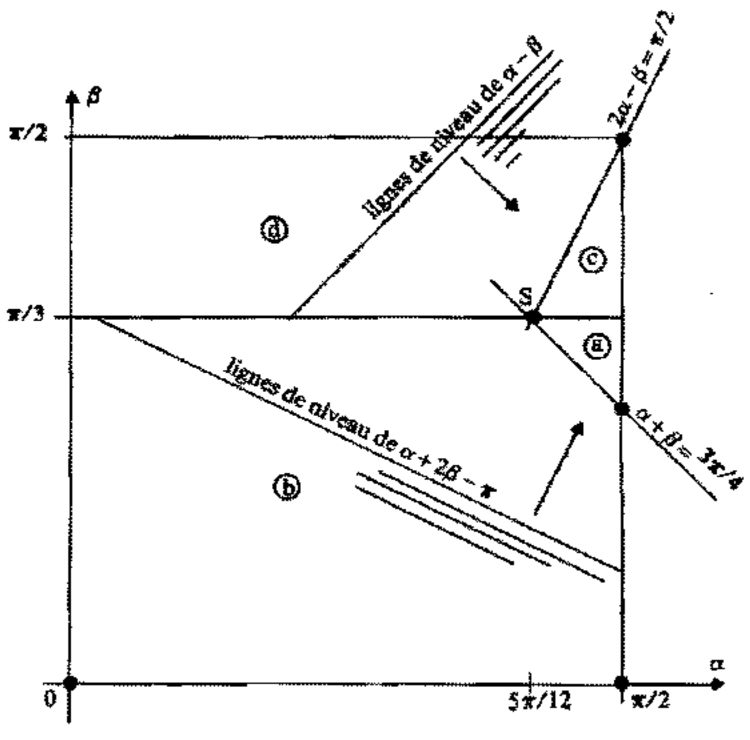
Si $\beta > \frac{\pi}{3}$ $\varphi(\alpha,\beta) = \alpha - \beta$; distinguons deux sous-cas :

ⓒ Si $\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \alpha - \beta \iff 2\alpha + \beta \geqslant \frac{\pi}{2}$, alors $\psi(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

ⓓ Si $\frac{\pi}{2} - \alpha \geqslant \alpha - \beta \iff 2\alpha + \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $\psi(\alpha,\beta) = \alpha - \beta$

Résolution dans un graphique (α,β) :

Chacun des quatre sous cas précédents correspond à une région du plan (α,β) dans laquelle il faut maximiser une fonction de α et β (c.a.d. chercher la ligne de niveau la plus haute).

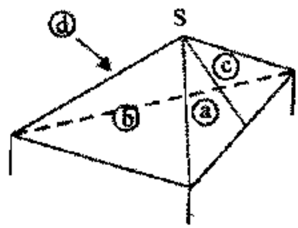


• Si S désigne le point de coordonnées $(5\pi/12 ; \pi/3)$, S est le point qui réalise le maximum de $\pi/2 - \alpha$ pour les régions ⓐ et ⓒ : en effet, c'est le point le plus éloigné de la droite d'équation $\alpha = \pi/2$.

• Les lignes de niveau de $\alpha + 2\beta - \pi$ sont des droites parallèles. C'est encore S qui réalise le maximum dans la région ⓑ.

• Enfin, c'est toujours S qui réalise le maximum de $\alpha - \beta$ dans ⓓ.

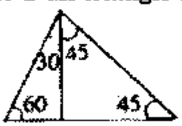
On aurait pu réaliser un graphique en trois dimensions, du type de celui ci-contre, pour se rendre mieux compte de la position "haute" de S : c'est le point le plus haut de la surface d'équation $z = \psi(\alpha,\beta)$



Étude du résultat obtenu :

La méthode utilisée (genre "minimax" pour les amateurs) donne donc pour α,β et γ les trois valeurs : $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$ soit en degrés : 75°, 60° et 45°.

Le triangle obtenu est donc la réunion d'un demi-triangle équilatéral et d'un triangle rectangle isocèle :



Drôle de triangle quelconque !

On peut néanmoins remarquer que les valeurs obtenues sont proches de celles de l'autre recette !

Une remarque pour finir :

Un raisonnement analogue peut être tenu pour les cotés à la place des angles : à périmètre constant, quel est le triangle dont les cotés sont le plus différents ? Les calculs sont identiques : remplacer π par le périmètre p ; les résultats aussi. A ceci près que le triangle de cotés $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ est... rectangle !!!

DERNIERE MINUTE

triangle quelconque : ce n'est pas fini !

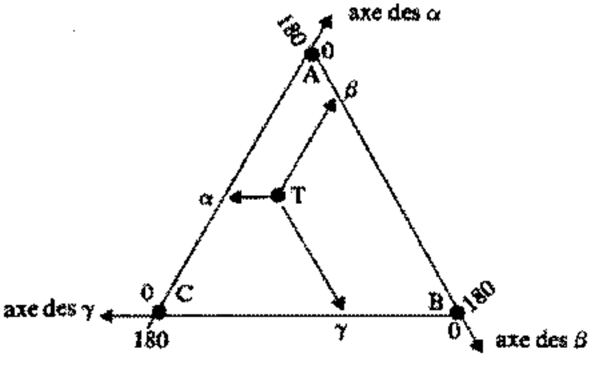
Cette histoire de triangle quelconque commence à être obsédante : chaque jour amène sa nouvelle piste de recherche, et chaque lendemain les critiques...

Tant pis.

Voici aujourd'hui une nouvelle recette, à base de repère barycentrique.

Si on remarque que la somme $\alpha + \beta + \gamma$ des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, on peut représenter chaque triangle par le point de coordonnées barycentriques (α,β,γ) dans un repère formé de trois points A, B et C (c.à.d. par le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients α,β,γ).

Ça a l'air compliqué mais dans la pratique, ça se passe plutôt bien ; regardez :

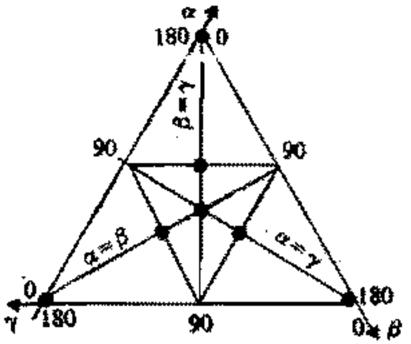


• On peut graduer les trois cotés du triangle comme des axes, de 0 à 180.
• Un point T étant donné, on peut "lire" ses coordonnées par projection sur chacun des axes.

• Les trois directions de "projection" de T sur les trois axes sont les directions des lignes de niveau de α, de β et de γ : par exemple, les horizontales sont les lignes $\alpha =$ constante.

• Les médianes du triangle ABC sont les droites $\alpha = \beta$; $\alpha = \gamma$; $\beta = \gamma$; la réunion des trois médianes est donc l'ensemble des points représentant les triangles isocèles.

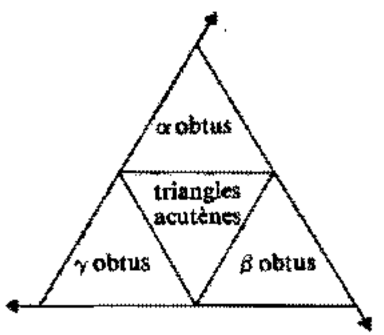
• Quant aux triangles rectangles, ils sont représentés sur les lignes $\alpha = 90$, $\beta = 90$ et $\gamma = 90$.



• Aux intersections de ces droites remarquables sont le triangle équilatéral (au centre de gravité), et les trois triangles isocèles rectangles.

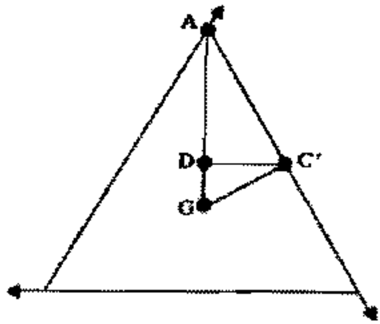
• Bien entendu, pour tout point T intérieur au triangle ABC, on a $\alpha + \beta + \gamma = 180$ avec α, β, γ tous positifs.

• Enfin les triangles acutènes (aux trois angles aigus) sont représentés dans le petit triangle central.



Zone des triangles quelconques :

On va étudier le problème sur un sixième de la figure, en supposant $\alpha > \beta > \gamma$, ce qui correspond à la zone suivante :



Chacun des six ordres possibles pour α, β, γ correspond à un des six triangles découpés par les médianes.

C' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}$

D a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 90 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix}$

Dans cette zone il y a des triangles acutènes et des triangles où α est obtus.

G a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$

A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les triangles représentés sur le segment C'D sont rectangles.

Le triangle quelconque moyen :

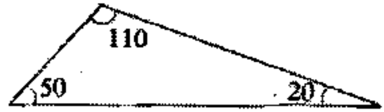
On peut calculer le point "moyen" de chacune des zones AGC', ADC' et DC'G, ce qui correspond aux triangles "quelconques", "quelconques à un angle obtus" et "quelconques acutènes".

Ce point "moyen" est, naturellement, le centre de gravité des triangles en question, c'est-à-dire l'isobarycentre des sommets. Dans un système de coordonnées barycentriques, ceci est particulièrement facile : on fait la moyenne des coordonnées.

• **Pour les triangles quelconques** (angle α aigu ou non) : (zone AGC′)

On trouve G_1 de coordonnées $\begin{pmatrix} 110 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$

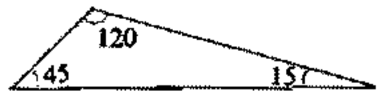
soit un triangle ayant l'allure suivante :



• **Pour les triangles quelconques à un angle obtus** : (zone ADC′)

On trouve G_2 de coordonnées $\begin{pmatrix} 120 \\ 45 \\ 15 \end{pmatrix}$

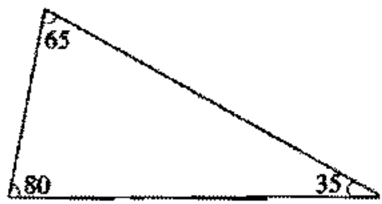
soit un triangle ayant l'allure suivante :



• **Pour les triangles quelconques acutènes** : (zone DC′G)

On trouve G_3 de coordonnées $\begin{pmatrix} 80 \\ 65 \\ 35 \end{pmatrix}$

soit un triangle ayant l'allure suivante



VOUS N'AVEZ PLUS QU'A CHOISIR
CELUI QUE VOUS PRÉFÉREZ !