Premier cycle

deux activités sur les quadrilatères

par un groupe de la Commission A.P.M.E.P. "Premier Cycle (*)"

Les textes qui suivent veulent être une illustration possible des propositions du groupe de réflexion sur les programmes du Premier Cycle (référence : supplément N° 1 au bulletin 345 et brochure "Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au Collège" de janvier 1985).

Les enfants du Collège ont un passé scolaire et, par conséquent, il serait maladroit de ne pas tenir compte du travail antérieur. Chacun de nous a pu remarquer que s'ils ne sont pas "vierges" sur le plan du vocabulaire des quadrilatères et de la connaissance des propriétés de ceux-ci, il existe cependant une certaine inadéquation entre "ce qu'ils savent" (ou croient savoir) et ce qu'ils énoncent à partir des figures rencontrées.

Le but des activités que nous proposons est justement de gommer peu à peu les erreurs, et d'amener les enfants à faire le choix juste du vocabulaire ou des propriétés. C'est aussi de leur faire sentir la nécessité

(*) Ce sous-groupe de la commission A.P.M.E.P. Premier Cycle est animé par Jeannine CARTRON ; il comprend : Claude ANSAS (Collège Marseille), Jean-Paul BARDOULAT (Lycée Foix), Henri BAREIL (Collège Toulouse), Louis DUVERT (Collège et Lycée Lyon, retraité), Régis GRAS (Université de Rennes), Jean-Pierre ORHAN (Enseignement Technique Rouen), Charles PEROL (Responsable du groupe OPC, IREM de Clermont, retraité).

d'être précis, de choisir les conditions minimales pour qu'un quadrilatère soit "ceci" ou "cela", afin de préparer le terrain pour la notion de propriété caractéristique et pour la réduction des éléments de preuve quant à la nature d'un quadrilatère.

Ces deux activités doivent permettre de dépasser le simple stade de la description pour atteindre des objectifs d'ordre psycho-social (choisir et adopter des conventions, admettre la nécessité d'un consensus qui permettent de communiquer et de reconnaître) et d'ordre intellectuel (émettre des conjectures, apporter la preuve).

Activité N° 1 : Texte de Louis Duvert

(1) On place au hasard quatre points sur la feuille de papier (non quadrillé, de préférence), par exemple en pointant le crayon, les yeux fermés, quatre fois sur la feuille. On les dénomme, par exemple, A, B, C, D.

Problème : tracer quatre segments, chacun ayant pour extrémités deux des points précédents, chacun de ces points étant une extrémité de deux des quatre segments.

[On peut "habiller" l'énoncé de ce problème de diverses manières ; par exemple en imaginant un touriste qui veut visiter quatre villes, en partant de l'une, en y revenant à la fin de son parcours en passant une fois et une seule dans chacune des trois autres. On trouve 24 itinéraires possibles : ABCDA, BADCB, CDABC, etc. ; on peut coder ces itinéraires en supprimant la cinquième lettre : ABCD, BADC, CDAB, etc. Mais si on se borne à dessiner les segments en "oubliant" quel est le point de départ et d'arrivée et la chronologie du parcours, on n'obtient que *trois* figures.

On peut, au préalable, proposer un autre problème, quitte à l'abandonner une fois qu'on l'aura distingué du problème actuel : dessiner *tous* les segments joignant deux des quatre points (il y en a six).

On peut aussi se poser ces deux problèmes en se donnant d'abord trois points au lieu de quatre ; les deux problèmes aboutissent à une seule figure : un triangle.]

On obtient trois figures, trois quadrilatères. On convient de dénommer chacun en juxtaposant les noms des quatre points dans un ordre où on peut les rencontrer en suivant la ligne polygonale tracée ; alors, chacun a 8 dénominations possibles (on retrouve les 24 itinéraires du touriste, ou encore les 24 "mots" constitués des quatre lettres A,B,C,D.).

On introduit les mots *sommets, côtés, opposés, consécutifs, diagonales*.

Si les figures obtenues par les divers élèves sont assez variées, on peut cataloguer les quadrilatères obtenus en convexes, concaves non croisés, croisés (sans vouloir donner une définition rigoureuse de ces termes).

Selon la disposition des quatre points initiaux, on obtient :

soit un quadrilatère convexe et deux croisés,

soit trois quadrilatères concaves non croisés.

Entre-temps, les éventuelles dispositions "malencontreuses" où trois des quatre points seraient alignés auront été, d'un commun accord, éliminées.

(2) On fait dessiner, avec les instruments habituels, sur papier non quadrillé :

• un quadrilatère ayant deux côtés parallèles (ce sont nécessairement deux côtés opposés) ;

• un quadrilatère ayant deux côtés parallèles et les deux autres aussi ;

• un quadrilatère ayant un secteur droit et un seulement ;

• un quadrilatère ayant 2 secteurs droits et 2 seulement (on en trouve de deux sortes : les trapèzes rectangles... non rectangles — illogisme du vocabulaire traditionnel ! — et les quadrilatères dont deux secteurs *opposés* sont droits.) ;

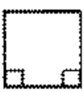
• un quadrilatère ayant 3 secteurs droits et trois seulement ("Impossible ! Le quatrième est droit lui aussi" ; simple constatation pour l'instant.) ;

• un quadrilatère ayant 4 secteurs droits.

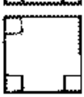
Le vocabulaire usuel (*trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré*) se met, ou se remet, en place.

(3) On passe ensuite à l'exercice "inverse" du précédent, en quelque sorte : analyser un schéma, après avoir introduit les conventions qui signalent, sur le dessin lui-même, diverses hypothèses : segments de même longueur, secteurs de même angle, secteurs droits.

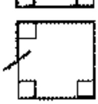
Exemples :



C'est un trapèze rectangle ; c'est tout ce qu'on peut affirmer.



C'est un rectangle ; c'est tout ce qu'on peut affirmer.



C'est un carré.

Il ne s'agit pas, en Sixième, de faire des démonstrations ; il s'agit de dégager expérimentalement des propriétés — dont certaines seulement sont caractéristiques dans un référentiel donné — du parallélogramme, du losange, etc.

(4) Diverses surfaces polygonales sont découpées dans du carton (on peut les fournir aux élèves, ou mieux les leur faire fabriquer) :

• des carrés, de côtés 3 cm, 5 cm, ...
• des rectangles, de côtés 4 cm et 6 cm, 3,1 cm et 2,9 cm,...
• des losanges, dont les diagonales ont pour longueurs 2 cm et 5 cm, 3 cm et 3,2 cm,...
• des parallélogrammes, connaissant par exemple les longueurs des côtés et un angle,...
• des trapèzes non rectangulaires
• des trapèzes rectangles non rectangulaires
• des quadrilatères autres que ces trapèzes
• des triangles
• des hexagones
.....

On en extrait l'ensemble des quadrilatères ; celui des parallélogrammes : doit-on y mettre les losanges ? les rectangles ? etc. On dégage des inclusions. On aboutit au diagramme de l'ensemble des quadrilatères, avec les sous-ensembles habituels ; l'ensemble des carrés est l'intersection de (ou, si on préfère, l'ensemble des éléments communs à) l'ensemble des rectangles et l'ensemble des losanges.

On essaye de bâtir des définitions pour les mots *trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.*

A propos de chacune des phrases suivantes, on pose la question : Vrai ? Faux ?

• *Tout* carré est *un* rectangle.
• *Tout* rectangle est *un* carré.
• *Tous* les losanges sont *des* parallélogrammes.
• *Les* parallélogrammes sont *tous des* losanges.
• *Si* un parallélogramme est un rectangle, *alors* ses diagonales sont de même longueur.
• *Si* un quadrilatère est un rectangle, *alors* ses diagonales sont de même longueur.
• *Si* un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, *alors* c'est un rectangle.
• *Si* un quadrilatère a ses diagnoles de même longueur, *alors* c'est un rectangle.
• *Aucun* trapèze n'est un rectangle.
• *Certains* losanges sont des carrés.
.....

On ne vise aucune démonstration. On s'aide de figures (surtout pour infirmer une conjecture).

Remarque. De tels exercices peuvent aider le maître à faire comprendre aux élèves pourquoi il est préférable, lorsqu'on demande de "dessiner un quadrilatère", d'éviter de dessiner un rectangle, ou un parallélogramme, ou un trapèze : une figure qui suggère des hypothèses autres que celles de l'énoncé peut susciter des erreurs de raisonnement. Si on veut couper court plus tôt à cette pratique, si répandue, chez les élèves, consistant à dessiner un rectangle, par exemple, quand on leur demande de dessiner un quadrilatère, on peut exiger du papier non quadrillé (ce qui limite déjà les dégâts), ou encore dessiner au tableau une dizaine de quadrilatères "bien ordinaires" (!), et demander que chaque élève en choisisse un et le reproduise grosso modo sur sa feuille de papier (les mots *quelconque, sans particularité,* ne lèvent guère le malentendu entre l'élève et le professeur).

(5) Une telle activité relève surtout de la problématique
"Traçage et étude de certaines configurations géométriques planes ou spatiales. Utilisation des instruments de traçage et de mesurage", mais aussi des problématiques
"Passage d'un langage à un autre (dénominations d'un quadrilatère — voir (1) ci-dessus ; passage d'un texte à une figure — voir (2) — ; passage inverse — voir (3) —),
"Choix optimal des outils et des méthodes (pour dessiner un rectangle de dimensions imposées — voir (4) —, divers "programmes de construction" sont possibles, utilisant plus ou moins le double décimètre, l'équerre ; quel est le plus rapide ? le plus précis ?...),
"Conjectures et démonstrations", à titre seulement de premiers pas prudents (voir (4) ; par exemple, une figure "contre-exemple" peut persuader (sans démonstration proprement dite) que la phrase "Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle" est fausse ; par ailleurs, l'activité introduit des mots comme *tout, tous, certains, le, un, aucun, au moins, au plus, si... alors, ...,* outillage qui sera plus tard indispensable pour les démonstrations.)

Activité N° 2 : Texte de Jeannine Cartron

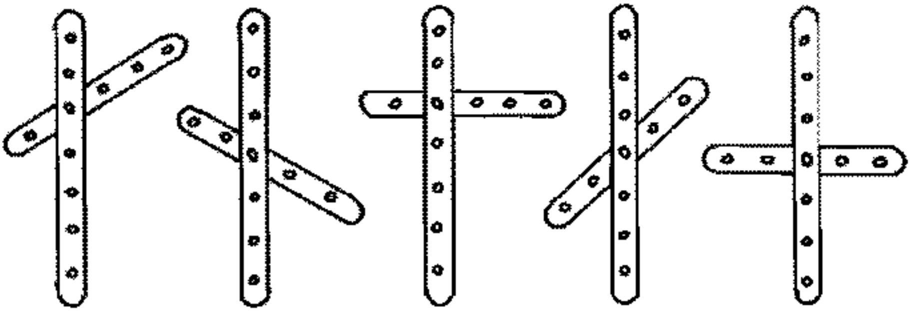
La deuxième activité décrite a été proposée à des élèves de Sixième pendant deux années consécutives ; elle est fortement inspirée par un travail fait au sein de l'IREM de Rennes. Elle a duré environ trois semaines (soit 12 heures).

La totalité du travail n'est pas entièrement décrite, nous n'avons voulu donner que des pistes de travail, des activités possibles. Nous avons rencontré un certain nombre de difficultés car, au départ, les enfants ont eu du mal à exercer un sérieux contrôle de leurs manipulations, leurs observations, leur raisonnement ; mais, peu à peu, au fil des exercices, ils ont progressé vers l'emploi juste du mot, la construction correcte d'une proposition. Le jeu final nous a permis des mises au point utiles en faisant fonctionner l'outil mathématique.

1. Phase manipulatoire :

Chaque élève a devant lui deux barres de méccano de longueurs inégales et deux barres de même longueur. (Les montages sont tout aussi réalisables en bois ou en carton fort).

1°) Il attache les 2 barres inégales de façon à former une croix. On compare les solutions adoptées (si on a un rétroprojecteur, on les projette sur le tableau), on les dessine succinctement.



Il y a plusieurs cas possibles, cela donne lieu à une première discussion.

2°) On prend les barres égales et on recommence.

2. Phase technique :

Il s'agit maintenant de représenter chaque montage par deux segments sécants que l'on nommera "diagonales" et dont on joindra les extrémités de toutes les façons.

3. Phase de réflexion :

On observe les quadrilatères obtenus, on mesure les côtés, les angles, on compare des directions, on conjecture : "Si je dessine des diagonales qui... j'obtiendrai un quadrilatère qui....". Le but est ici la recherche de l'adéquation entre le vocabulaire employé par l'enfant et la figure obtenue. Si le résultat n'est pas celui que l'on escomptait, pourquoi est-il différent ? Chaque étape donne lieu à des échanges, on écrit les phrases correctes. Petit à petit, on recense tous les cas, on dessine des quadrilatères, on les découpe, on leur attribue un numéro.

4. Phase d'organisation :

On classe les quadrilatères obtenus, le critère étant les particularités (ou les non particularités) des diagonales.

Les diagonales → inégales / → égales } → qui se coupent.....

5. Phase de recherche :

a) Quelles sont les propriétés des côtés correspondant à chaque cas de figure ?

b) On se donne certains critères sur les propriétés de la figure, puis on dessine.
- Ces critères permettent-ils d'obtenir un quadrilatère ?
- Si oui, dans quelle(s) catégorie(s) du classement précédent peuvent-ils entrer ? Quelles sont ses propriétés ?
- Si non, quelles sont les incompatibilités ?

6. Phase de structuration :

On donne à l'enfant un lot de quadrilatères (ou, s'il ne les a pas perdus, il prend ceux qu'il a obtenus au (3), tous différents quant à leurs propriétés et portant un numéro. On énonce les propriétés de chacun d'eux en considérant dans un premier temps les diagonales, dans un deuxième temps les côtés.

Un travail collectif s'instaure, chacun faisant part de ses "découvertes". Les propriétés sont discutées, classées, et reçoivent elles aussi un numéro ; exemple P1 : "avoir deux côtés parallèles", etc.

Chaque quadrilatère ayant un numéro, chaque propriété en ayant un aussi, on réalise les tableaux suivants :

N° de la Propriété	Enoncé de la Propriété	Numéros des quadrilatères qui la possèdent
P 1	Avoir 2 cotés parallèles	1, 2, 8. . . . .
⋮	⋮	⋮

N° du Quadrilatère	Possède la ou les propriétés	Nom éventuel du quadrilatère (rectangle, parallélogramme...)
2	P 1, P 2, P 3, P 7, ...	. . . .
⋮	⋮	⋮

Remarque : certains quadrilatères n'ont pas de nom particulier.

*Il est ensuite aisé de voir que tout quadrilatère possédant telle pro*priété, par exemple : "avoir les côtés parallèles deux à deux" peut être un parallélogramme, et/ou un rectangle, et/ou un losange, et/ou un carré.

On peut, à partir d'un quadrilatère identifié comme parallélogramme, se poser des questions du type : "Est-ce un losange ?" et chercher s'il possède les propriétés supplémentaires qui permettent de l'affirmer.

On peut aussi faire des raisonnements du type suivant :
"Si un quadrilatère à telle propriété (par exemple avoir les côtés opposés parallèles), alors il a obligatoirement les propriétés..."

Il est tout aussi possible de se poser des questions telles que : "Tout rectangle est-il un trapèze ?"... "Un rectangle peut-il être un losange ?" etc...

Peu à peu l'enfant comprend la nécessité d'être précis ; il apprend à s'exprimer correctement pour être compris du maître et de ses camarades.

7. Phase de réinvestissement :

Seul le second des deux jeux a été expérimenté dans la classe ; le premier a été proposé pour cet article par Régis GRAS.

Premier jeu

Matériel : 1 ensemble de 18 cartes par groupe de 3 ou 4 élèves
— 15 d'entre elles portent chacune un des messages suivants :
- 2 cotés opposés parallèles (2 cartes)
- 2 cotés opposés de même longueur (2 cartes)
- 2 cotés consécutifs de même longueur (4 cartes)
- 1 angle droit (4 cartes)
- diagonales de même longueur (1 carte)
- diagonales perpendiculaires (1 carte)
- diagonales se coupant en leur milieu (1 carte)
— Les 3 autres cartes sont blanches, ce sont des jokers.

1 ensemble de 6 cartes pour la classe, chacune portant l'un des 6 noms, ne figurant qu'une fois : "Trapèze, cerf-volant, parallélogramme, rectangle, losange, carré.

Règles :

Au même moment, chaque groupe prend au hasard 8 cartes parmi les 18 du jeu bien battu dont il dispose. Il remet son talon au maître. Un élève de la classe tire au hasard 3 cartes dans le jeu des 6 quadrilatères convexes : l'annonce des noms des quadrilatères est publique.

Ensuite, chaque groupe essaie en 5 minutes de réaliser, sur une feuille, des figures correspondant aux 3 quadrilatères annoncés, mais seulement ceux qui possèdent les propriétés marquées sur les 8 cartes tirées ou propriétés choisies judicieusement dans le cas d'un joker. Le même quadrilatère peut-être construit plusieurs fois à condition que chaque carte ne serve qu'*une fois*. Le groupe marque :

4 points pour tout carré construit
3 points pour tout rectangle ou losange construit

2 points pour tout parallélogramme ou tout trapèze isocèle ou rectangulaire ou tout cerf-volant
1 point pour tout trapèze

Par contre, il perd 4 points si la figure construite ne satisfait pas les propriétés utilisées. Le maître est arbitre, mais 2 groupes peuvent s'évaluer mutuellement.

Le groupe gagnant est, bien sûr, celui qui a totalisé le maximum de points.

Deuxième jeu (expérimenté en classe)

Matériel :

Le professeur possède un jeu de cartes et sur chacune d'entre elles, figure le nom d'un quadrilatère (rectangle, losange,....). Chaque élève a le jeu des propriétés.

Règles :

Le professeur tire une carte de son jeu,

1°) L'élève doit aligner devant lui toutes les cartes des propriétés du quadrilatère proposé. Il marque 1 point par réponse juste et en perd 1 par réponse fausse.

2°) Toutes les cartes des propriétés du quadrilatère étant étalées devant lui, il s'agit ensuite d'éliminer des cartes pour ne garder devant soi qu'un lot *minimum* définissant le quadrilatère ; l'élève marque 5 points par réussite.

Cette activité numéro 2, comme celle de Louis DUVERT, relève des problématiques : "traçage et étude de certaines configurations géométriques planes (ou spatiales) - Utilisation des instruments de traçage et de mesurage" "Passage d'un langage à un autre" - "Choix optimal des outils et des méthodes".