pour une mathématique globale

Dans la présentation habituelle de la mathématique, chaque propriété occupe une place dans une théorie bien déterminée, ces théories s'articulant harmonieusement les unes sur les autres. Ceci est satisfaisant pour l'esprit, surtout... quand on est mathématicien.

Mais en réalité, si l'on veut prendre en compte ce qui préoccupe l'élève, l'homme de la rue, l'utilisateur de mathématique, on obtient ce que je nomme la *mathématique globale* (sur laquelle, nous savons d'ailleurs peu de choses).

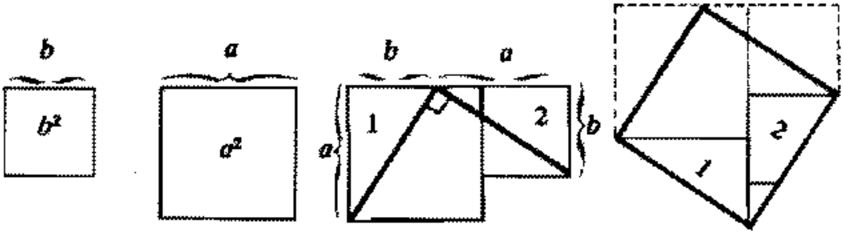
Ce qui m'intéresse ici est un des aspects de cette mathématique globale. Il se peut qu'une propriété importante des êtres étudiés dans une théorie A soit rattachée par le mathématicien à une théorie B de niveau plus élevé. Il serait intéressant de la faire connaître et comprendre à des gens qui n'iront pas jusqu'à la théorie B. Pour prendre une image, les monuments remarquables d'une ville ont été répartis le long d'itinéraires soigneusement organisés. Il n'est cependant pas déraisonnable de faire un crochet pour montrer à quelqu'un qui ne parcourera pas tous les itinéraires quelque chose qui l'intéressera vivement.

Je vais maintenant donner quelques exemples :

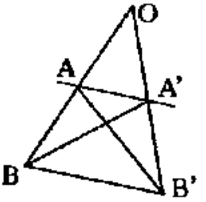
Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore $c^2 = a^2 + b^2$ dans le triangle rectangle est rattaché habituellement à la théorie des triangles semblables (Théorie B). Mais en fait c'est un théorème sur les aires des carrés et on doit pouvoir le justifier en faisant appel seulement à cette théorie (Théorie A). Il s'agit de transformer deux carrés en un seul.

La démonstration tient en trois figures. Il serait dommage de s'en priver.



Remarque. Il est amusant de remarquer que le théorème de Thalès, base de la théorie des triangles semblables peut être démontré lui aussi à partir des aires.



Ce théorème exprime que les deux triangles OAB′ et OA′B ont même aire. On les obtient en ajoutant au triangle OAA′ les triangles BAA′ et B′AA′ qui ont visiblement même base et même hauteur, donc même aire.

Classes suivant un nombre premier

L'arithmétique élémentaire donne de nombreux exemples de propriétés importantes que l'on rattache habituellement à des théories de niveau plus élevé.

Soit par exemple la propriété

$$x^n = k \pmod p \text{ a au plus } n \text{ racines}$$

On rattache cette propriété (à juste titre) à la théorie des polynômes sur un corps (Théorie B). Il est possible de la démontrer en restant au niveau des classes modulo p (Théorie A).

$x^n = y^n$ entraîne, puisque n est premier, si $x \neq y$

$x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots\ldots + y^{n-1} = 0$

que nous écrirons $S_2^{n-1}(x,y) = 0$ $\left(S_2^{n-1}\right.$ somme de tous les monômes à deux variables de degré $\left.n-1\right)$.

Soit $x^n = z^n$; $S_2^{n-1}(x,y) = S_2^{n-1}(x,z)$ si x, y, z sont tous différents.

On en déduit en faisant passer tous les termes dans le même membre et en divisant par $y-z$

$S_3^{n-2}(x,y,z) = 0$ (S_3^{n-2} somme de tous les monômes à 3 variables de degré $n-2$).

En continuant à introduire de nouvelles lettres, on trouve

$$S_n^1(x,y,\ldots) = 0 \qquad \text{puis} \qquad 1 = 0$$

Remarque. On voit facilement que la démonstration est valable sans changement important pour une équation quelconque de degré n.

J. KUNTZMANN
IMAG
Domaine Universitaire
BP 41 - 38401 St Martin d'Hères