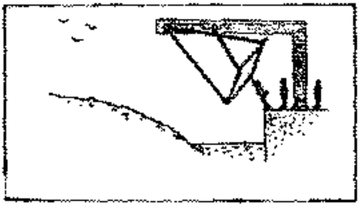
Bulletin de l'APMEP n°350 - Décembre 1985

problèmes chocs

le parcours du combattant(*)

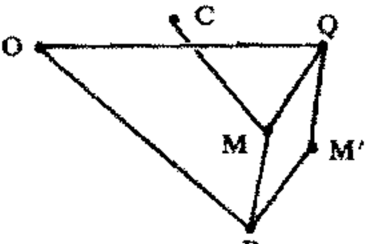
que va-t-il arriver au soldat ?

par Jacques Lubczanski,
ENSET Cachan



I. Modèle mathématique proposé

On est ramené à étudier le système articulé suivant, formé de barres rigides et articulées :



(*) Voir Bulletin 349, page 518 et la revue PLOT, publication des Régionales APMEP de Poitiers, Limoges et Orléans-Tours.

O et C sont des points fixes
P, Q, M et M′ sont des points mobiles.

On suppose que OP = OQ, que OC = CM et que PMQM′ est un losange.

L'étude du système va se faire en deux temps :
— Quelle transformation géométrique fait passer de M à M′ ?
— Quelle est l'image par cette transformation de la trajectoire de M ?

A. Quelle est la transformation $M \mapsto M'$?

1. Démontrer que O, M et M′ sont alignés.

2. En considérant le cercle (Γ) de centre P, passant par M et M′, démontrer que $\overline{OM}.\overline{OM}' = OP^2 - PM^2$

3. En déduire que M′ est l'image de M par la transformation $\mathcal{J}$ définie par : $\forall M$, $M' = \mathcal{J}(M)$ vérifie : $\begin{cases} O, M, M' \text{ alignés} \\ \overline{OM}' = \dfrac{k}{\overline{OM}} \text{ où } k \text{ est un réel fixé.} \end{cases}$

$\mathcal{J}$ s'appelle une inversion de pôle O, et de puissance k, et est définie sur le plan privé du point O.

B. Etude de la transformation $\mathcal{J}$:

1. Etablir, dans un repère orthonormé d'origine O, les formules analytiques de $\mathcal{J}$.
2. Montrer que $\mathcal{J}$ est involutive, et bijective.
3. Etudier l'image par $\mathcal{J}$ d'une droite ne passant pas par O.
   En déduire l'image par $\mathcal{J}$ d'un cercle passant par O (et privé du point O).

C. Trajectoire du point M′

1. Quelle est la trajectoire du point M ?
2. Quelle est la trajectoire du point M′ ?
3. Que va-t-il arriver au soldat ?

II. Solution

A. La transformation $M \mapsto M'$

1 - O, M et M′ sont alignés :

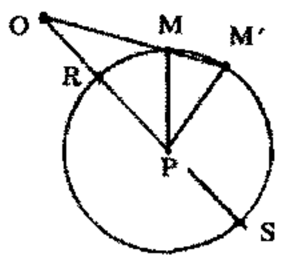
PMQM′ est un losange (4 côtés isométriques) ; donc la diagonale (MM′) est médiatrice du segment [PQ].

OP = OQ : O, à égale distance de P et Q, est sur la médiatrice de [PQ], donc est sur la droite (MM′).

Un tel dispositif est connu dans la littérature sous le nom d'"Inverseur de Paucelier".

2 - Une relation métrique :

Le produit $\overline{OM}.\overline{OM'}$ est la puissance du point O par rapport au cercle du centre P : on sait que cette puissance ne dépend pas de la sécante issue de O. En particulier pour la sécante passant par P, elle vaut $\overline{OR}.\overline{OS} = (OP+r)(OP-r) = OP^2 - r^2$ si r est le rayon du cercle ; or $r = PM$ d'où le résultat : $\overline{OM}.\overline{OM'} = OP^2 - PM^2$.



3 - Caractérisation de la transformation :

Posons $k = OP^2 - PM^2$: k ne dépend pas de M car OP et PM sont les longueurs des barres. Alors M' est l'unique point aligné avec O et M et vérifiant $\overline{OM'} = \dfrac{k}{\overline{OM}}$

B. Etude de la transformation

1 - Formules analytiques :

Soit M $(x ; y)$ et M'$(x' ; y')$ son image.

On peut caractériser M' par $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ et chercher λ :

$$k = \overline{OM}.\overline{OM'} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \lambda\, OM^2 \qquad \lambda = \frac{k}{OM^2} = \frac{k}{x^2+y^2}$$

d'où les formules : $\boxed{x' = \dfrac{kx}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad y' = \dfrac{ky}{x^2+y^2}}$

2 - $\mathcal{J}$ est involutive et bijective :

Les rôles symétriques de M et M' dans la définition de l'inversion montrent que M est l'image de M' par $\mathcal{J}$: $\mathcal{J}$ est sa propre application réciproque. L'existence de l'application réciproque prouve que $\mathcal{J}$ est bijective (avec comme ensemble de départ et d'arrivée le plan privé de O).

3 - Image d'une droite ne passant pas par O.

Soit Δ la droite d'équation $ax+by+c = 0$ avec $c \neq 0$ et M un point de coordonnées $(x ; y)$. Alors :

$$\mathrm{M} \in \triangle \Leftrightarrow ax+by+c = 0$$
$$\Leftrightarrow a\frac{kx'}{x'^2+y'^2}+b\frac{ky'}{x'^2+y'^2}+c = 0 \text{ avec } \mathrm{M}' = \mathcal{J}\,(\mathrm{M}) : (x'\,;y')$$
$$\Leftrightarrow c(x'^2+y'^2) + akx' + bky' = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{M}' \in \Gamma \text{ où } \Gamma \text{ est le cercle d'équation : } x^2+y^2+\frac{a}{c}kx+\frac{b}{c}ky = 0$$

qui passe par O.

L'image de $\triangle$ est Γ : *l'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O (et privé de O).*

4 - Image d'un cercle passant par O :
$\mathcal{J}$ est involutive : si $\mathcal{J}\,(\triangle) = \Gamma$, alors $\mathcal{J}\,(\Gamma) = \triangle$
L'image d'un cercle passant par O (et privé de O) est une droite ne passant pas par O.

Remarquons que si C est le centre de Γ, $\triangle$ est orthogonale à (OC) : en effet $\triangle$ est orthogonale au vecteur $(a;\, b)$ et $\overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées :
$$\left(-\frac{h}{2c}a\,;\ \frac{k}{2c}b\right)$$

C. Trajectoire du point M'

1 - Trajectoire du point M

La barre CM assujettit le point M à décrire une portion de cercle centrée en C.

2 - Trajectoire du point M'

M' va décrire l'image par $\mathcal{J}$ de la portion de cercle décrite par M, c'est-à-dire une portion de droite orthogonale à OC, donc verticale.

3 - Que va-t-il arriver au soldat ?

Il va tomber verticalement, jusqu'à blocage mécanique du système !