le plaisir de chercher... la joie de trouver

François Padilla,
avec la collaboration de Jean AYMES

Nous présentons ici un moment de la vie d'une classe. Au départ, un problème posé pour éveiller l'intérêt et piquer au vif la curiosité des élèves. Le résultat a dépassé les espérances.

Il nous semble que le nouveau programme, et plus particulièrement la géométrie, offre des possibilités de poser des problèmes susceptibles de provoquer une forte motivation chez certaines élèves et pas seulement chez les meilleurs.

Des élèves, puis des professeurs ont cherché et éprouvé la satisfaction d'échanger leurs trouvailles. Ce n'est pas d'abord la pertinence mathématique des solutions que nous voulons souligner ici, mais surtout le témoignage d'un extraordinaire intérêt soulevé dans une classe par ce problème, puis celui de divers professeurs à qui il a été posé : ces moments où l'intérêt est si fort sont trop rares !

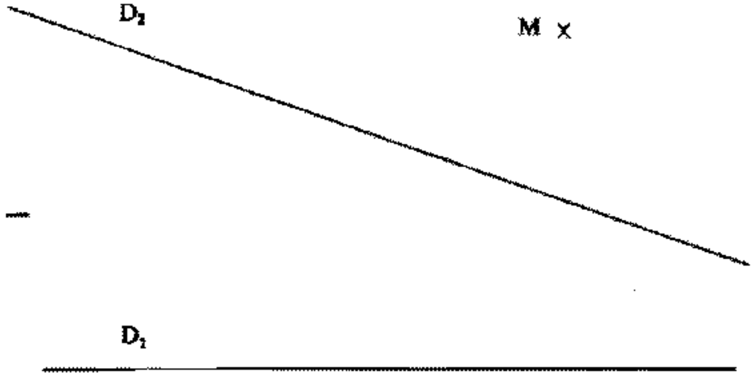
En posant quelques problèmes (en quantité et choix réfléchis !) nous ne voulons pas introduire un processus d'élimination mais plutôt ouvrir une voie d'éveil de la curiosité, d'échanges entre élèves et enseignants. Les activités ne sont pas nécessairement intégrées dans l'évaluation (telle qu'on l'entend aujourd'hui).

Sans doute y-a-t-il à pousser ces réflexions : nous acceptons volontiers l'échange avec d'autres collègues à ce propos. Tous les apports seront les bienvenus.

Le problème posé, *classique*, était *facultatif :*

On donne deux droites D_1 et D_2 se coupant en un point O situé en dehors de la feuille et un point M sur la feuille et non situé sur les deux droites.

Construire la droite (OM).



Avant de lire la suite, nous engageons le lecteur à chercher ce problème.

Il y a, ci-après, des réponses d'élèves, d'autres idées et de brèves remarques sur le caractère effectif des réponses.

Première solution (élève de 1ère S)

On effectue une translation qui ramène O sur la feuille. Avec deux points A, A′ sur D_1 et $f = t_{\vec{AA'}}$.

$$f(D_1) = D_1$$
$$f(D_2) = D'_2$$

D'_2 coupe D_1 en I ; avec $M' = f(M)$, la parallèle à (IM′) par M est la droite cherchée.

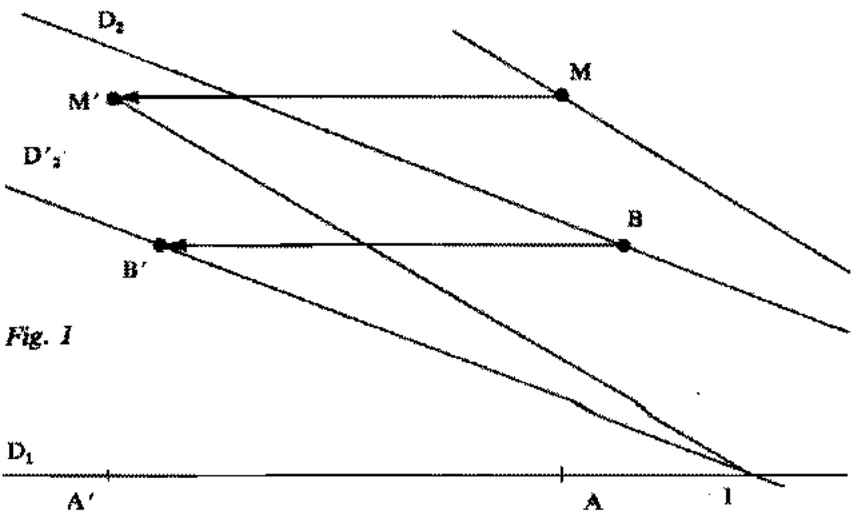


Fig. 1

Remarque : si D_1 et D_2 sont presque parallèles, alors le point O est très éloigné, et on n'arrivera pas à faire la construction.

On doit donc discuter le caractère effectif des réponses proposées. La méthode peut-elle être en échec selon la configuration envisagée ?

Deuxième solution (élève de 1ère S)

L'idée est de symétriser pour que le point O' soit sur la feuille.

Soit $\triangle \perp D_1$.

Soit $A \in D_2 \cap \triangle$ et $B \in D_2$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xmapsto{S_\triangle} & A \\ B & \longmapsto & B' \end{array} \quad \text{alors } D'_2 = S(D_2) = (AB')$$

On construit $M' = S_\triangle(M)$ et O' le point de rencontre de D'_2 et D_1. Alors $S_\triangle(O'M')$ convient.

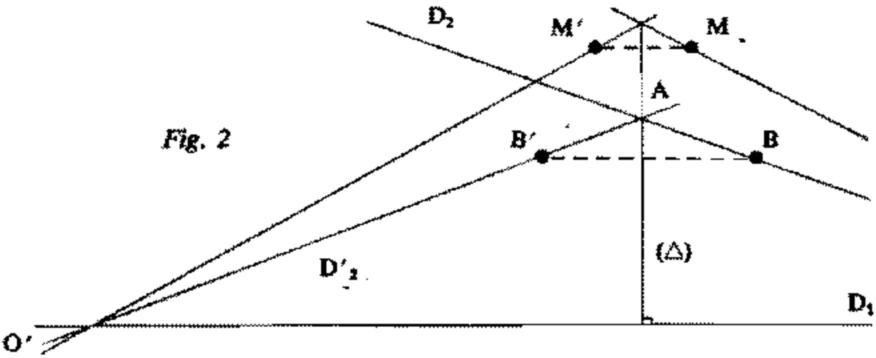


Fig. 2

Remarque : translation et symétrie sont des isométries ; donc leurs effets sont limités par l'éloignement du point O. Il faut donc "réduire" la figure.

Troisième solution (élève de Terminale C)

L'idée est d'utiliser une homothétie *réductrice.* Plus les droites sont proches du parallélisme, et plus le rapport de l'homothétie sera petit.

On trace la perpendiculaire à D_1 passant par M, et coupant D_1 en A. Soit $f = h_{(A;\lambda)}$

"Je prends $\lambda = \frac{1}{2}$, et si cela ne suffit pas, je prendrai $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$"

Soit $M' = f(M)$

$D'_2 = f(D_2)$

D'_2 coupe D_1 en O'

La parallèle à (O'M') par M convient.

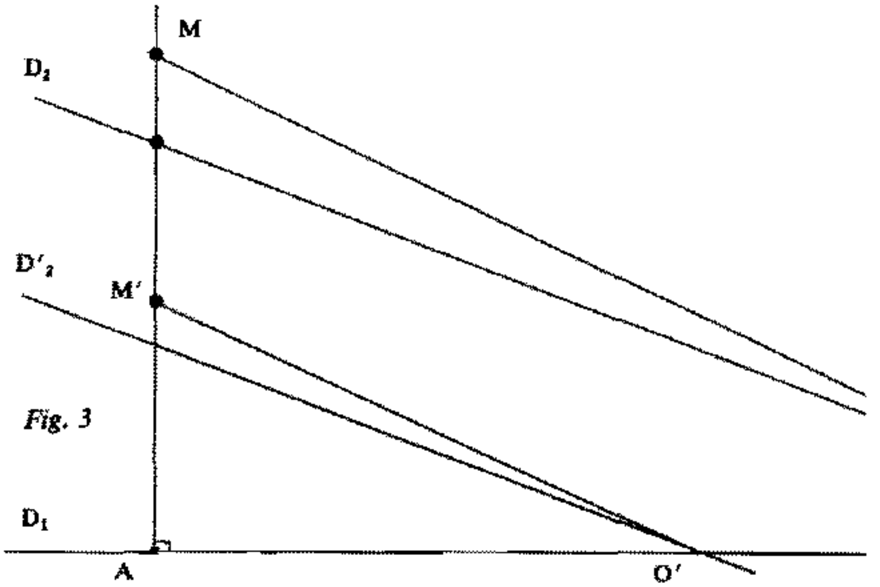


Fig. 3

Quatrième solution (divisions semblables) (professeur)

Soit (MA) perpendiculaire à D_1 coupant D_2 en B. Je trace une parallèle à (MA) qui coupe D_1 en A' et D_2 en B'.

On pose $a = MA$ et $b = MB$.

On construit M' tel que $\dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ ici, vu que $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont de même signe, je porte sur les perpendiculaires en A' et en B' à la droite (A'B') des segments de longueurs a et b situés du même côté de (A'B'), d'où M' ; alors (MM') est concourante avec D_1 et D_2.

Ici on utilise $h_{\left(O,\ \frac{OA'}{OA}\right)}$

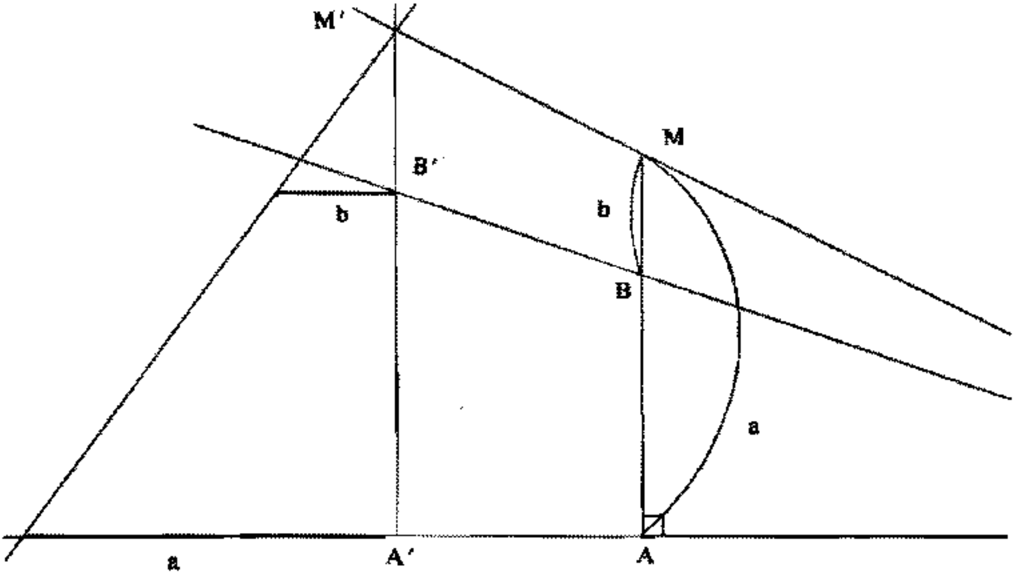


Fig. 4

Remarques :

• L'orthogonalité est en fait inutile, sauf à faciliter le tracé des parallèles (sur cahiers à lignes !)

• La construction est effective pourvu qu'on puisse tracer ces perpendiculaires, ou des parallèles.

Cinquième solution : ***toujours une homothétie de centre O*** (professeur)

Par M deux sécantes (MA) et (MB) à D_1 et D_2 respectivement. Choisir A' sur D_1, par A' on trace la parallèle à (AB) coupant D_2 en B'.

Par A' la parallèle à (AM) et par B' la parallèle à (BM), ces deux parallèles se coupent en M', (MM') est la droite cherchée.

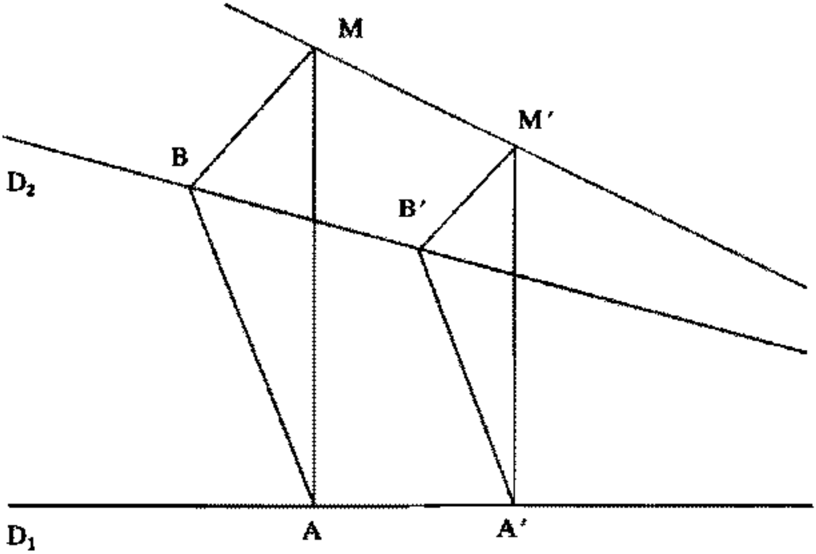


Fig. 5

Remarque :

Encore uniquement des parallèles et une construction effective ! Les élèves du technique utilisent souvent cette construction.

Sixième solution (professeur)

Dans l'homothétie $f = h_{\left(I\,,\,\frac{\overline{IB'}}{\overline{IA}}\right)}$,

$$A \mapsto B' \qquad B \mapsto A' \qquad M \mapsto C' \qquad \text{donc} \qquad \frac{\overline{MB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{A'B'}}$$

Soit M' sur la droite (A'B') tel que B'M' = C'A' alors :

$$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{B'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{B'A'}} \text{ et donc}$$

$\dfrac{\overline{MB}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{M'B'}}{\overline{B'A'}}$. La droite (MM') convient.

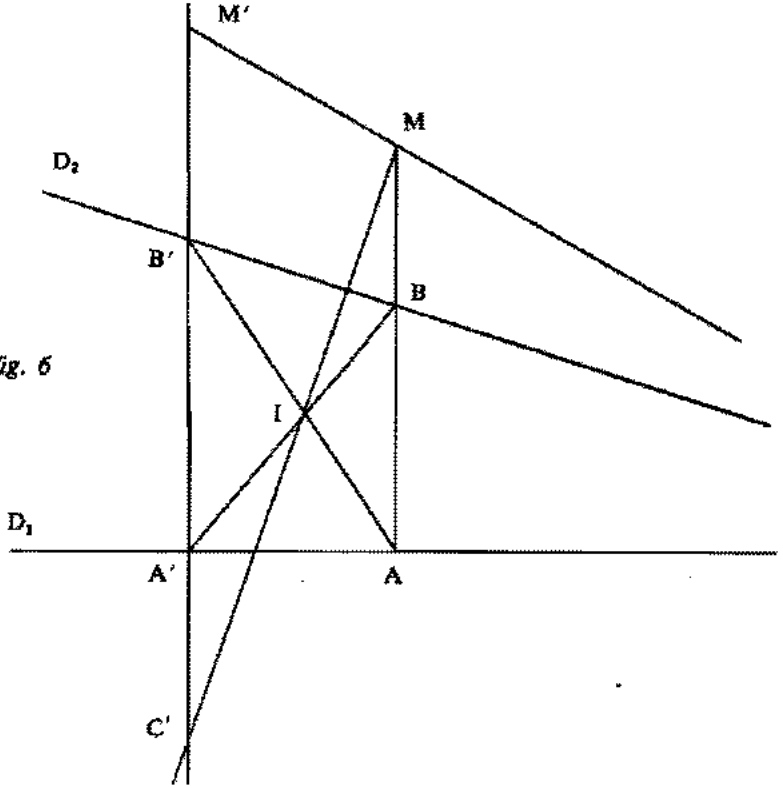


Fig. 6

Remarque

On s'appuie là sur les deux homothéties transformant [AB] en [A'B'] : l'une h_1 de centre I et l'aute h_2 de centre O dont on sait qu'elles vérifient $h_2 = S_\Omega \circ h_1$ où Ω est le milieu de (A' ; B').

Septième solution (élève de Terminale C)

L'idée est de trouver deux angles inscrits isométriques.

On trace une perpendiculaire (AB) à D_1 (A sur D_1 et B sur D_2)

Soit $B' = h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}(B)$

La parallèle à D_2 par B' coupe D_1 en O' ; la médiatrice de (MA) et la perpendiculaire à D_1 en O' se coupent en Ω : centre du cercle passant par A, M, O.

Ce cercle coupe D_2 en N ; en utilisant $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NO}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$ on termine.

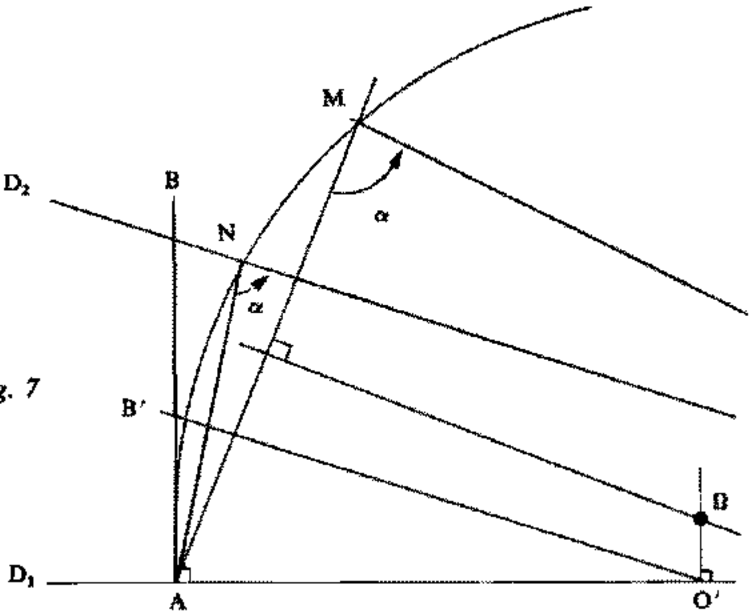


Fig. 7

Remarque

... et pourquoi pas ?... Mais elle n'est pas toujours effective.

Huitième solution (professeur)

Par une homothétie de centre M et encore uniquement des parallèles ; (MO') est la droite cherchée.

Ce n'est qu'une variante de la 3ème.

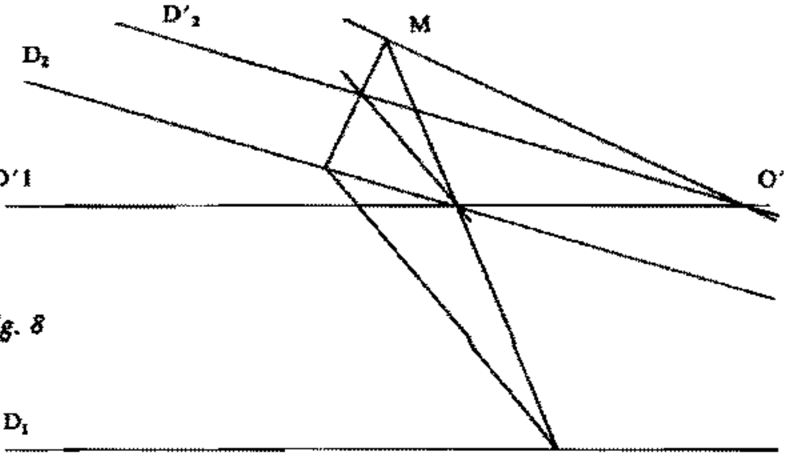


Fig. 8

Neuvième solution (processus orthocentrique) (professeur)

S'arranger pour que la droite cherchée soit hauteur d'un triangle de sommet O. Par M on trace la perpendiculaire à D_1 la coupant en A et la perpendiculaire à D_2 coupant D_1 en B.

La droite (MA) coupe D_2 en H : orthocentre de MBO, la perpendiculaire à (BH) par M est la droite cherchée. Pas toujours effective elle non plus (fig. 9).

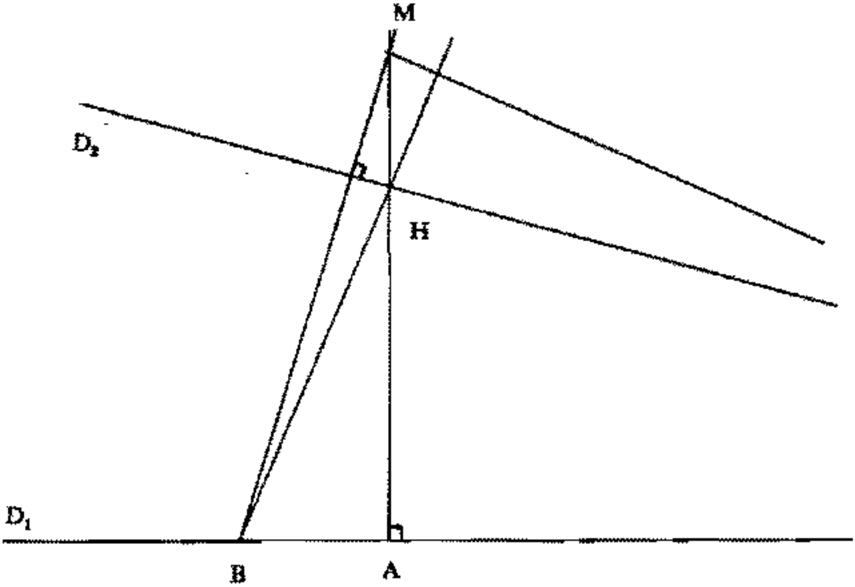


Fig. 9

Dixième solution... numérique (professeur d'après remarque d'un élève)

Par M : la perpendiculaire à D_1 coupe D_1 en A et D_2 en B

avec $\alpha = \widehat{ABO}$, $\beta = \widehat{AMO}$ et $x = AO$

on a $x = b \tan \alpha$

d'où $\tan \beta = \dfrac{b \tan \alpha}{a}$

ce qui permet d'*estimer* la position de la droite cherchée.

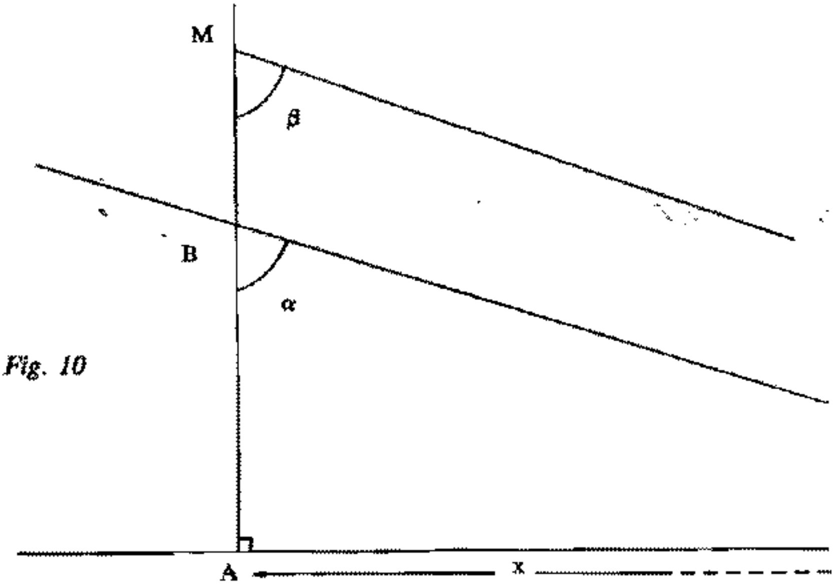


Fig. 10

Onzième solution ... à marginaliser selon nous (professeur).

On utilise la réciprocité polaire.

On trace la polaire △ de M par rapport à D_1 puis la polaire d'un point I de △ est la droite cherchée : (MM').

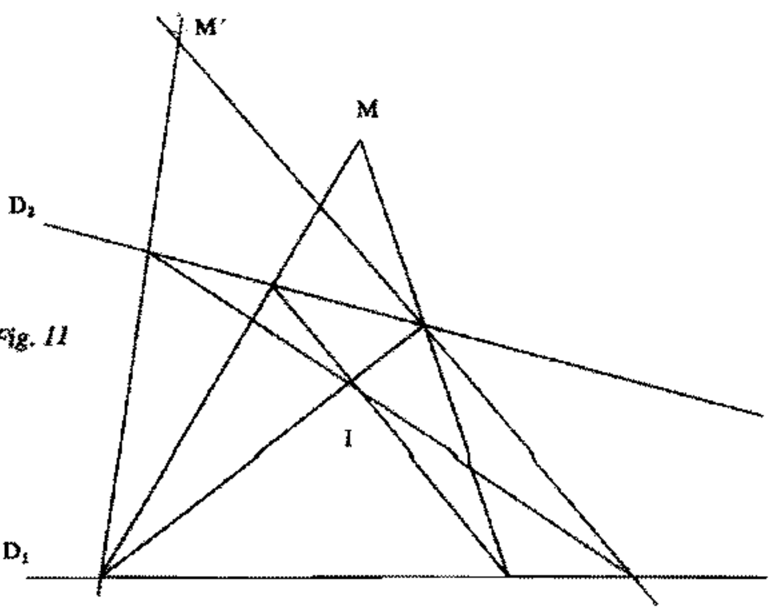


Fig. 11

Remarque :

C'est une construction entièrement réalisable à la règle, pas toujours effective d'ailleurs.

Mais attention : la conjugaison n'est pas dans les programmes, même si un certain nombre de situations sont susceptibles de la faire intervenir (exercices des manuels ou solutions possibles comme ici) il faut éviter toute inflation et avoir clairement conscience du domaine d'intervention de la géométrie que l'on veut enseigner : encore des choix précis à faire... et tout le problème de son enseignement actuel.

Pour conclure...

L'envie de trouver

Soulignons le cas de l'élève qui a proposé la septième solution : il a les résultats les plus faibles de sa Terminale C, il a manifesté plusieurs fois un vif intérêt et beaucoup d'imagination pour des problèmes "gratuits" ; cela l'a valorisé par rapport à son professeur, ses camarades et surtout par rapport à lui-même.

Cette septième méthode n'est pas celle qu'on attend : mathématiquement elle surprend et peut paraître farfelue. Mais sur 40 élèves (17 de Terminale C et 23 de Première S), 4 ont proposé une solution (dont la septième) et ce, le lendemain du jour où le problème a été posé : c'est l'envie de trouver qui importe.

Le moment où l'élève propose à la classe sa solution est un moment qui fait date.

Un problème

Découper dans une feuille de papier un quadrilatère convexe ABCD non trapèze.

Placer un point M sur la feuille.

Comment donner un pli passant par M à cette feuille pour que dans la forme dièdre non aplati obtenue, les points A, B, C, soient coplanaires (quel que soit l'angle).

Ecrivez-nous ! pour donner votre avis ou apporter des témoignages.

Bibliographie

Géométrie dans l'espace ; activités de constructions géométriques effectives. IREM de Bordeaux.