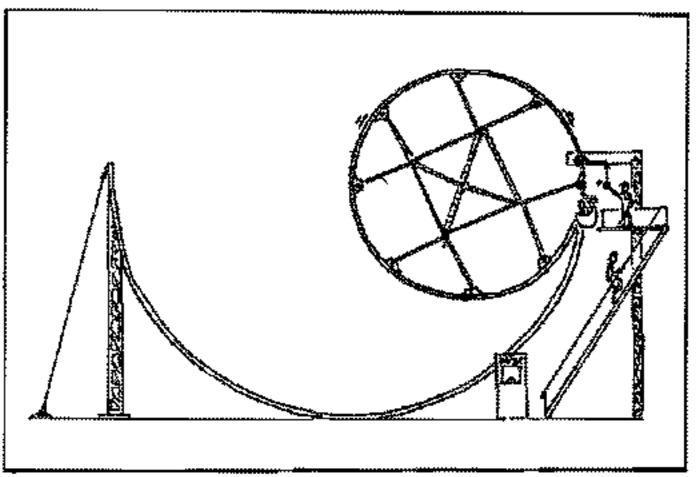
problèmes chocs

à la foire du trône

par Jacques Lubczanski
ENSET Cachan



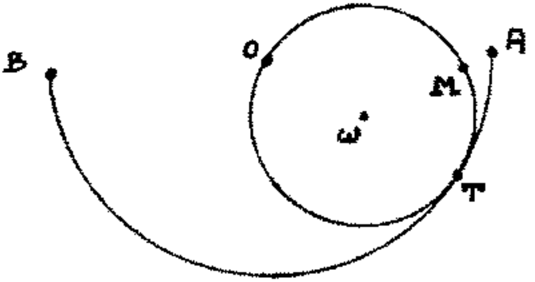
L'opérateur lâche le frein : la roue se met en mouvement, emmenant avec elle la nacelle et son occupant.

Quelle est la trajectoire de la nacelle ? (voir Bulletin 348 page 254).

I. Modèle mathématique proposé :

On va étudier la trajectoire du point de la roue où la nacelle est suspendue ; le rayon de la roue est supposé deux fois plus petit que le rayon de la rampe circulaire sur laquelle elle roule (sans glisser).

Notations : O est le centre de la rampe, A et B ses extrêmités.
M est le point dont on étudie la trajectoire, T le point de contact de la roue avec la rampe, ω le centre de la roue.
Donc O, A et B sont des points fixes ; ω, M et T des points mobiles.



A Etude de quelques positions particulières

Au départ, M est en A.

• Dessiner les positions successives du système, lorsque la roue a fait : un quart de tour, un demi-tour, trois quarts de tour, un tour. Qu'observez-vous ?

• Que se passe-t-il ensuite ?

B Etude d'une position quelconque

1. Si α est une mesure, en radians, de l'angle $\widehat{T\omega M}$, et R le rayon de la roue, exprimer en fonction de α les longueurs des arcs de cercle $\widehat{TM}$ et $\widehat{TA}$.
En déduire, en fonction de α, une mesure de l'angle $\widehat{TOA}$.

2. Quelle relation y a-t-il entre α et une mesure de l'angle $\widehat{TOM}$?

3. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

C Conclusion de l'étude

Quelle est la trajectoire du point M ?
Conclure.

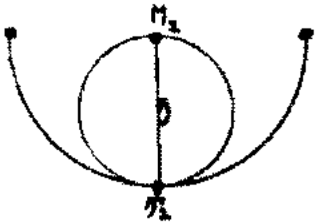
II. Solution

A - Etude de quelques positions particulières

Après un demi-tour :

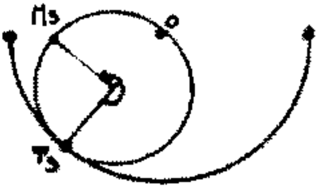
T a tourné autour de O
de 1/8 de tour (de rampe)

Après un quart de tour :



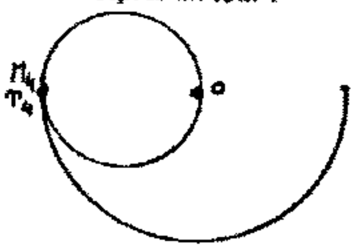
T a tourné de 1/4 tour

Après trois quarts de tour :



T a tourné de 3/4 tour

Après un tour :



T a tourné d'un 1/2 tour

• Au bout d'un tour, le problème n'est plus mathématique, mais physique : la rampe s'arrête en B donc la roue ne doit pas aller plus loin : elle doit revenir en arrière.

• On observe que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont tous sur le droite (AB).

B - Etude d'une position quelconque :

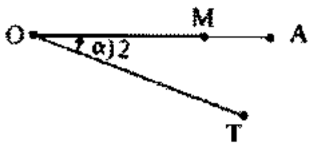
1 - Longueur de l'arc $\widehat{TM}$: l'angle au centre mesurant α radians, l'arc TM mesure $R\alpha$.

Longueur de l'arc $\widehat{TA}$: c'est la même, si la roue roule sans glisser sur la rampe.

Mesure de l'angle $\widehat{TOA}$ ***:*** le rayon de la rampe est $2R$ et l'arc de mesure $R\alpha$: il s'ensuit qu'une mesure de $\widehat{TOA}$ est $\dfrac{R\alpha}{2R} = \dfrac{\alpha}{2}$

2 - Mesure de l'angle $\widehat{TOM}$ ***:*** D'après le cours de géométrie (''théorème de l'angle inscrit''), une mesure de TOM est la moitié d'une mesure de l'angle au centre $\widehat{T\omega M}$: une mesure de $\widehat{TOM}$ est donc $\dfrac{\alpha}{2}$.

3 -



il s'ensuit que les points M et A sont sur une même droite issue de O : *O, M et A sont alignés.*

C - Conclusion :

Lorsque la roue fait un tour, M, aligné avec A et B, décrit le diamètre [AB] : sa trajectoire est donc rectiligne horizontale, ce qui explique qu'on n'a jamais vu de telles machines sur les foires : ça ne remue pas assez !