l'erreur, source de progrès

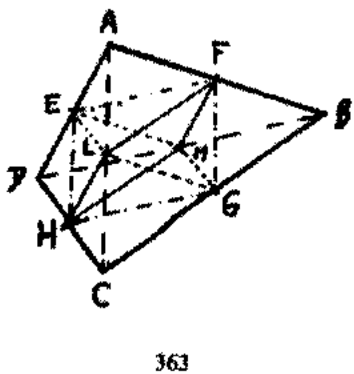
par Christian Frattini,
Lycée Carnot, Grasse

A la suite des Journées de Sophia-Antipolis, où Christian Frattini animait un atelier intitulé "l'erreur, source de progrès", J.F. Hatte en a rédigé un compte rendu, et l'animateur a précisé par écrit ce qu'il n'avait pas eu le temps de dire. Voici une synthèse de ces deux textes, présentée par C. Frattini avec l'accord de J.F. Hatte et l'aide de Louis Duvert pour la rédaction définitive.

1. Une façon de "traiter" le programme de géométrie de Quatrième.

Quinze jours après la rentrée, je distribue aux élèves le texte et la figure suivants (cf [1], page 39) :

Un quadrilatère, ses diagonales, les quadrilatères formés par les milieux des côtés et des diagonales.



Et j'attends.

Ils sont décontenancés par l'absence de questions. Après un temps de flottement, ils observent des parallèles, des parallélogrammes, des segments, des milieux ; ils envisagent de les compter, de colorier, de découper. A la fin de l'heure, je les invite à continuer chez eux.

Lors de la séance suivante, ils donnent leurs idées ; certains n'ont rien trouvé. On note au tableau les "résultats" (objets, conjectures, questions) :

- parallélogrammes
- droites
- points
- triangles
- droites parallèles
- milieux
- moitiés
- ...
- certains se ressemblent
- ...
- combien ?
- comment les superposer ?
- ...

Par groupes, ils se lancent à nouveau dans la recherche, chaque groupe ayant choisi plus particulièrement l'un des sujets. Cela dure encore trois à quatre heures (deux heures par semaine). Ils me rendent alors un compte rendu par équipe, sur lequel je mets des annotations, des conseils, des questions, des pistes de recherche, mais, surtout, aucune réponse.

Ils cherchent encore deux à quatre heures ; puis on passe aux exposés. J'ai refait, sur transparent, tous leurs dessins pour rendre plus vivants et plus faciles leurs exposés par l'utilisation d'un rétroprojecteur.

Au début, on a compté les points, les segments, les figures géométriques... (On travaille alors sur le dénombrement, le vocabulaire de la géométrie, les arbres de choix...).

Chaque exposé débouche sur une série de questions et de conjectures. La classe y réfléchit pour la séance suivante. On décide alors ensemble de :

— ce qui est évident et devient axiome (évidemment, je sers de garde-fou) ; on a choisi, comme premier axiome : "les quadrilatères qui semblent être des parallélogrammes sur le dessin en sont" ;

— ce qu'il faut définir (ici, "parallélogramme") ;

— ce qu'il faut démontrer (même si c'est faux à *mes* yeux).

Puis on choisit parmi les propositions :

— celles qu'on admettra parce qu'elles sont presque évidentes ou parce qu'on décide de faire confiance au professeur (ce qui permet d'éviter des démonstrations fastidieuses ou inutiles) ;

— celles qu'on va essayer de démontrer.

Enfin, on passe aux actes ; en utilisant les acquis antérieurs et les axiomes, on démontre avec rigueur et on prend alors conscience de ce qui est faux et de ce qui est vrai.

J'ai mené cette expérience deux ans (1981 et 1982/83) et chaque fois les élèves ont découvert, puis structuré, et démontré avec moi *tout* le programme de géométrie (la première année, ils m'ont même amené à parler d'homothéties).

Après chaque acquisition nouvelle, j'ai essayé de trouver des activités ou des exercices permettant de faire fonctionner cet acquis et amenant les élèves à prendre conscience de l'importance et de l'utilité de ce qu'ils avaient fait.

Pour aller encore plus loin dans les détails :

Un jour, un groupe de quatre élèves me fait constater qu'"elles ont découpé le trapèze LMGH et l'ont posé sur LMFE ; c'est le même." Je leur demande de me dire comment elles ont fait "pour le poser". Petit à petit, elles ont découvert qu'il fallait faire un demi-tour et ont fini par préciser autour de quel point. Pendant ce temps, une élève du groupe avait essayé autre chose : pliage autour de (LM) puis "retournement". A force de réclamer des précisions, elles sont arrivées à décrire ces deux mouvements et cela fut l'occasion, lors de leur exposé, ou plutôt de l'exploitation de leur exposé, de démontrer que, sous certaines conditions, la composée de deux symétries axiales est une symétrie centrale dont on connaît le centre. Ensuite, les propriétés de ces relations ont été étudiées avec facilité.

Au cours de l'exposé, un élève a dit : "Etes-vous sûres que c'est un trapèze ?". Nous avons noté la question, sans interrompre l'exposé ; et ce fut l'objet d'une démonstration à l'heure suivante. Le groupe des quatre, horrifié, a alors dit : "Mais alors, tout ce qu'on a fait est faux !" Mais la motivation pour l'étude généralisée des symétries axiales et centrales était là ; si j'avais dit, dès le début, à ces élèves : "Ce n'est pas un trapèze", le quadrilatère ne les aurait plus intéressées et rien de tout cela ne serait arrivé.

2. Autres exemples d'activités (Ils se retrouvent dans les brochures de l'A.P.M.E.P. citées dans la bibliographie où sont issus des travaux menés dans divers IREM)

6ᵉ-5ᵉ. Un radiophare émet des signaux de fréquences différentes : toutes les 24 secondes ; toutes les 64 secondes ; toutes les 145 secondes. 1° A *quels intervalles sont émis deux signaux en même temps? 2° A quels intervalles sont émis les trois signaux en même temps?*

Certains élèves feront du calcul, d'autres des "dessins",... Accepter toutes les questions et les proposer à l'ensemble de la classe. Selon le cru, on sera surpris du nombre de notions abordées.

6e-5e. Choisir un texte d'une vingtaine de lignes. Compter le nombre de a, *de* e, *de* i, *de* o, *de* u, *de* y. *Se poser des questions et essayer de tirer des conclusions.*

On peut faire recommencer avec un texte en anglais et faire des comparaisons. Notions abordées : présentation des résultats, tableaux, pourcentages...

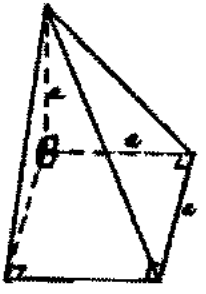
6e-5e. On lance deux dés; on calcule la somme des deux nombres affichés (exemple: on jette 2 et 3; on obtient 5).

Ici, il est inutile de poser des questions : les élèves se les poseront. Si on leur laisse suffisamment de temps, ils feront des statistiques (essais de cent coups), les présenteront en tableaux, feront des pronostics, des calculs de pourcentages de chances, puis des probabilités avec arbre de choix... et auront envie de développer le cube-dé, de classer les développements; ils chercheront à savoir si tous les dés sont identiques, d'où la notion d'orientation d'un cube dans l'espace.

Si, si! J'ai essayé en recherche libre; on y a passé six à huit heures. Ils en ont vraiment envie si on les laisse chercher et si on évite de répondre trop vite à leurs questions.

3e. [2], page 34. *Faire réaliser aux élèves, en bristol, des pyramides de même taille puis essayer d'en assembler quelques-unes.*

Avec trois pyramides, ils trouveront un cube et découvriront la formule du volume de la pyramide.



3e. [2], page 39. *Activité sur un tronc de pyramide.*

On met en application les théorèmes de Thalès et de Pythagore.

4^e-3^e. **Pour conjecturer :**

• *L'orthocentre d'un triangle est-il à l'intérieur du triangle ?*

• *Comparer 3 ; 6 ; 15 ; 20 ;... à leurs carrés. Que peut-on conjecturer ?*

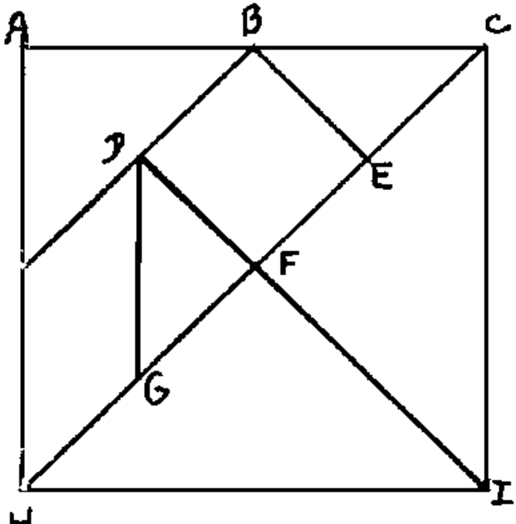
• *Soit un cercle et un point A. M décrit le cercle. Que peut-on dire de tous les points I milieux des divers segments [AM] ?*

• *Deux rectangles qui ont même aire ont-ils le même périmètre ?*

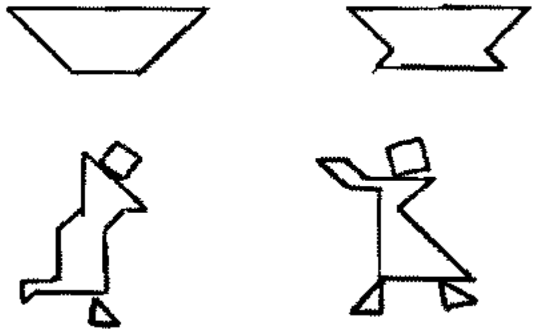
On les aide à organiser leur travail, à choisir des exemples (une aire de 16 carreaux,...)

CPPN-CPA ou... Voici quatre activités que j'ai utilisées dans une classe de quatrième constituée de 18 élèves qui avaient été refusés en CPPN-CPA.

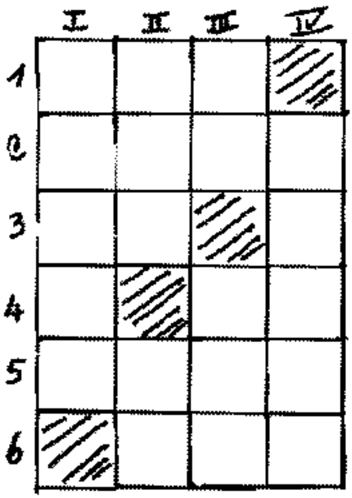
• **Tam-gram.** Il s'agit d'un puzzle chinois.



Faire des remarques sur les emplacements des points B, D, F, E, G ; par exemple, B est le milieu de [AC]. Citer des figures géométriques. Découper dans du carton et essayer de faire des assemblages conformes aux dessins ci-dessous, ou d'autres que vous inventerez (les dessins inventés, ils les proposent aux autres élèves).



• **Naturels croisés.** Dans chaque case blanche doit figurer un seul chiffre. On ne définit que les nombres qui ont au moins deux chiffres.



Horizontalement ;
1 - Naturel compris entre 200 et 300 et multiple de 2, de 3 et de 17.
2 - Puissance de 2.
3 - Naturel premier le plus voisin de 65.
4 - Puissance de 4.
5 - Carré du plus grand naturel de deux chiffres.
6 - Produit de deux naturels consécutifs.

Verticalement :

I - Carré d'un naturel compris entre 146 et 150.

II - Lu de bas en haut, c'est le produit d'un naturel premier par une puissance de 10.—

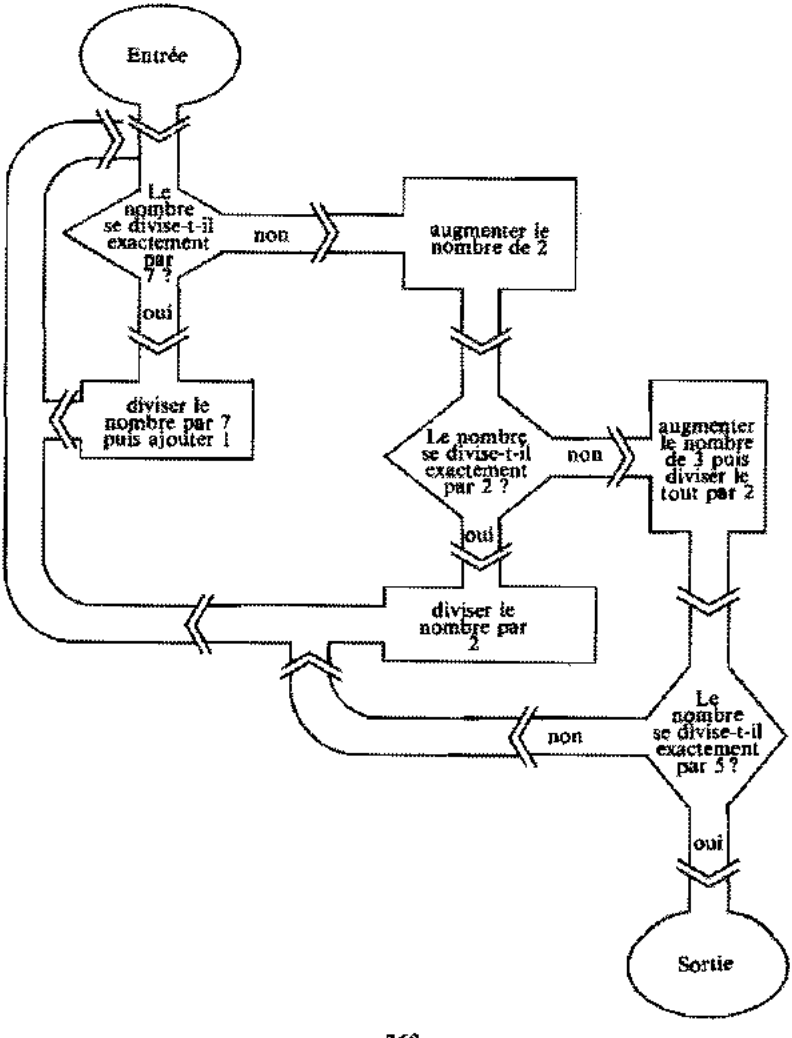
Ce naturel, qui n'est pas un carré, est impair et multiple de 3.

III - Admet 7 pour diviseur.—

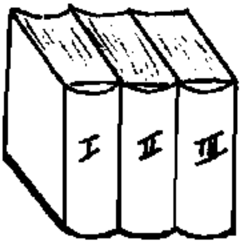
Ce naturel est divisible par 3, par 5 et par 7.

IV - Carré du naturel du 1 horizontal.

• ***Ordinogramme*** (trouvé dans [7]). *Un seul des nombres 497, 498, 499, 500, 501 permet d'atteindre la sortie.*

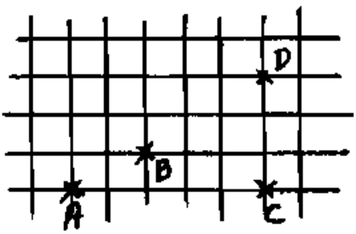


• *L'affamé de culture. Un ver s'est installé dans une bibliothèque. Voici qu'il commence à "dévorer" la page 1 du tome I d'une encyclopédie en trois volumes. Après quatre jours, durant lesquels il n'a cessé de ronger, page après page, il atteint la dernière page du tome III. L'épaisseur de chaque volume, couvertures comprises, est de 6 cm ; la couverture seule a 1,5 mm d'épaisseur. Le ver se déplace perpendiculairement aux plans des pages de l'encyclopédie. Quelle distance a parcourue le ver durant ces quatre jours ?*



Seconde. Taxi-distance. *Sur un quadrillage, on ne peut se déplacer que "horizontalement" et "verticalement" entre deux "nœuds". La distance entre deux nœuds est donnée par le plus court chemin qui respecte cette loi.*

Exemples : $d(A,B) = 3$
$d(B,C) = 4$
$d(A,C) = 5$



Se poser des questions sur les médiatrices, cercles, droites,... (Choisir un repère).

Après cette activité, ils sauront repérer un point du plan et ils seront prêts à comprendre plus aisément la distance euclidienne et les valeurs absolues.

Seconde. Vrai ou faux ?

• *Tout polygone convexe ayant un nombre impair de côtés a un nombre impair de diagonales.*

• $\forall x \in \mathbf{R} \quad \frac{1}{x} \leqslant x$

• $\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad x \leqslant x^2$

Etude critique d'un énoncé et de la réponse qui vient immédiatement à l'esprit.

3. Une méthode de travail.

Elle se devine déjà par ce qui précède.

Je choisis une activité (problème ou exercice) qui, présentée sans préparation (je veux dire sans que les élèves puissent sentir immédiatement le lien avec ce qui a été fait précédemment) pour ne pas risquer de les enfermer dans *une* démarche calquée sur un modèle, pourrait permettre de travailler sur un ou plusieurs points du programme. Je leur donne cette activité en pâture sans préciser ce qu'on attend d'eux ni ce qu'ils doivent découvrir. *Je les laisse chercher* une, deux, trois heures si nécessaire (trois heures sur une année, c'est peu). Puis, avec eux, avec ce qu'ils auront découvert (juste ou faux), avec les questions qu'ils se sont posées, j'essaie de les amener, sans jamais leur donner de réponse définitive, à rédiger des conclusions solides, rigoureuses, justifiées, s'appuyant sur leurs acquis.

A travers cette activité, ils doivent d'eux-mêmes découvrir les notions qui leur manquent et demander à être éclairés à leur sujet (la motivation entraîne l'intérêt); ils doivent, d'eux-mêmes, utiliser leurs acquis pour démontrer leurs conjectures ou les infirmer.

Essayez : vous serez surpris de la motivation des élèves, de leur capacité à inventer, de leur volonté de réussir et de ne pas rester sur un échec, de leur plaisir d'avoir découvert quelque chose par eux-mêmes. Vos élèves sont bien plus doués que vous ne le pensez.

Une mise en garde : au bout d'un certain temps, les élèves ont tendance à se décourager, ils ne trouvent plus rien ; le professeur, angoissé, a envie d'arrêter ou de les aider. C'est le moment critique : il faut arriver à patienter et à relancer l'action. Qui d'entre nous n'a pas rencontré ce phénomène de saturation, cette impression de ne pouvoir aller plus loin ? Mais, après un certain temps, la solution vient à l'esprit. Ce déroulement est normal. Si l'élève passe ce cap, il est amené à comprendre l'une des causes de ses échecs : l'abandon prématuré, le manque de persévérance.

Il en va de même pour l'acquisition d'une notion nouvelle. Après une phase apparemment stérile où les élèves se familiarisent avec les différents aspects de la notion, sans arriver à la faire fonctionner, on a la surprise de constater que tout à coup la structure se met en place ; et on se rend compte qu'on n'a pas perdu son temps : la notion, auto-construite, est bien acquise et on n'a pas à la rabâcher.

Les solutions trouvées par les élèves ne sont pas validées directement par le professeur, mais par la confrontation avec les autres. En effet, à chaque séance, les élèves qui ont terminé leurs exercices comparent leurs résultats au sein de groupes de trois à cinq, cooptés ; si le groupe est bloqué, il peut faire appel à un élève d'un autre groupe, ou au professeur, ou à un manuel ; finalement, quand l'accord s'est fait dans chaque groupe, les groupes confrontent leurs résultats. Le nombre des élèves donne une multiplicité de regards critiques, qui permet souvent de trouver la ou les réponses exactes. Si toutefois la classe entière se trompe, le professeur fournit un ou des contre-exemples et tout le monde reprend les recherches.

En définitive, on note dans un classeur les résultats établis qui sont à connaître et on fait le bilan des questions et des conjectures qui seront étudiées plus tard.

Les élèves plus rapides peuvent au choix se reposer, ou aider les autres, ou approfondir un exercice dans le but de l'exposer à la classe, ou traiter un exercice plus complexe, ou faire une recherche libre.

Quant à l'évaluation des résultats, elle est plus formative que sommative. Quand j'ai l'impression que l'ensemble de la classe a compris, je fais un test. J'utilise une grille de correction par rapport aux objectifs généraux suivants :

- calcul numérique
- connaissances
- raisonnement
- tracé géométrique
- pour les travaux à la maison, soin et orthographe

Il y figure d'autre part la liste des objectifs ainsi testés. Une appréciation générale par le choix d'une lettre de A à E (pour l'évaluation trimestrielle) complète l'évaluation.

Les élèves reportent le bilan de ce test sur :

— leur *liste d'objectifs* du programme. Chaque item est ainsi testé plusieurs fois dans l'année, le but étant d'obtenir deux succès à chaque item. En fait, les élèves n'arrivent pas tous à obtenir deux succès partout.

— leur *grille d'observation* continue où l'on voit l'évolution des résultats.

— leur *fiche d'observations* où ils notent les remarques, les conseils et les notions à revoir.

Le travail de la classe est organisé de la façon suivante : au début de chaque mois, chaque élève reçoit :

— une liste d'exercices et la date à laquelle chacun sera corrigé ;

— un plan de travail (voir annexe). Il y note la date où il fera chaque exercice, date qu'il choisit lui-même ; il y reporte aussi, en fin de période, le bilan de ce travail. Je complète alors la partie réservée à l'enseignant, puis les parents visent le tout ;

— lorsqu'un élève se sent en échec, je lui fournis un livret d'exercices auto-correctifs dès qu'il apparaît une lacune sur un sujet précis.

4. Conclusion

En résumé :
— absence de cours magistral : tout ou presque est fait par les élèves ;
— respect du rythme de travail de chaque élève ;
— autonomie d'organisation des élèves face au travail ;
— rythme d'acquisition naturel des connaissances par confrontation et mise en commun entre les élèves ;
— mise en jeu du désir des élèves de connaître, de se construire un savoir.

On voit que je m'inspire de la pédagogie Freinet.

Le résultat de la méthode que j'utilise n'a pas fait l'objet d'une évaluation scientifique ; mais les témoignages des anciens élèves montrent que ceux-ci ne réussissent pas plus mal que les autres, et qu'en plus ils ont acquis une capacité d'adaptation et un sens de l'autocontrôle que les autres n'ont pas ; et d'après la conseillère d'orientation, ils savent mieux s'organiser dans leur travail scolaire et extra-scolaire.

Certains lecteurs se disent sans doute : "Moi, ça, je ne sais pas le faire", ou "Encore un qui cache son incompétence derrière le masque d'une pseudo-pédagogie", ou "Il a des élèves exceptionnels pour pouvoir faire ça avec eux".

Essayez plutôt ; essayez d'abord de proposer une des activités précédentes...

Je n'ai plus qu'un mot à dire :
— à ceux qui veulent essayer : courage !
— à ceux qui ne sont pas tentés, ou qui ont peur : dommage !

Bibliographie

[1] Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 1 (brochure A.P.M.E.P. n° 33).

[2] Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2 (brochure A.P.M.E.P. n° 38).

[3] Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes (brochure A.P.M.E.P. n° 35).

[4] Mathématique active en Seconde (brochure A.P.M.E.P. n° 43).

[5] Pour une mathématique vivante en Seconde (brochure A.P.M.E.P. n° 27).

[6] Le Grenier mathématique (IREM de Rouen).

[7] Jeux et stratégie.

Annexe

PLAN DE TRAVAIL N° ____________

Nom : ____________ Prénom : ____________ Classe : ____________

Durée prévue : du ____________________ au ____________________

Thème : ____

Documents et exercices	A faire le	Pour le	A revoir

Test portant sur : prévu le : fait le :

Mon bilan : J'ai compris : ____________ ____________ Mes difficultés : ____________ ____________ ____________ ____________ Remarques : ____________ ____________ ____________	***Bilan du professeur***
J'évalue Mon niveau : ____________ Mon travail : ____________ Ma participation : ____________ Mon intérêt Ma motivation } pour ce thème : ____________ ***Remarques et signature des parents :***	***Evaluation du travail*** Soin ____________ Travail en groupe ____________ Persévérance ____________ ____________ ***Appréciation générale :***