dans nos classes

géométrie euclidienne plane dans l'enseignement secondaire

par Gérard Audibert,
I.R.E.M. de Montpellier

Le texte qui suit a pour but de présenter le travail de recherche en géométrie euclidienne plane de l'IREM de Montpellier effectué jusqu'en 1982.

Il se décompose en trois parties. Une première partie concerne la *problématique*, une deuxième la *méthode expérimentale*, une troisième les *résultats* obtenus.

1. La problématique

1. Notre problématique plonge ses racines, en tout premier lieu dans les travaux de l'*Ecole de Genève*. J. Piaget nous a appris que l'enfant, lorsqu'on prend la peine de l'interroger, est un excellent informateur. Jean Piaget et Barbel Inhelder nous ont fait connaître par exemple ce qu'était "*la représentation de l'espace chez l'enfant*" (1947). Nous avons pu aussi confronter notre propre expérience aux études théoriques comme celles portant sur les "*contradictions*" (1974), études aboutissant à la remarquable synthèse constituée par, "*L'équilibration des structures cognitives problème central du développement*" (1975).

Nous bénéficions donc avec l'école de Genève d'une méthode expérimentale, appelée analyse clinique et critique, qui nous a beaucoup inspirés, et d'une recherche théorique postérieure à 1974 que nous avons constamment confrontée à nos propres recherches en didactique.

2. Les questions les plus précises qui ont orienté notre recherche proviennent de la situation faite à *l'enseignement de la géométrie* au cours des années 68-82.

Prenons par exemple la place donnée au concept mathématique de groupe de transformation :

Avant 1960	Il est réservé aux grandes écoles et universités.
Entre 1960 et 1970	Il intervient en classe de Terminale.
Entre 1970 et 1980	Le groupe des isométries est explicitement au programme de Troisième.
Après 1980	Différents groupes de transformations n'apparaissent qu'en classe de Première.

Il semble bien qu'on ne sache pas quelle place lui donner dans l'enseignement.

La situation faite à l'enseignement de la géométrie nous a conduits à nous interroger sur la formation chez l'élève des concepts tels que :

(1) *Groupes de transformations*
(2) *Isométries*
(3) *Cas d'égalité*
(4) *Angles*
(5) *Similitudes*

Nous nous sommes restreints à la *géométrie euclidienne plane* car elle intervient de façon essentielle tout au long de l'enseignement secondaire, de la sixième à la terminale, et bénéficie d'une structure assez bien délimitée. Le rôle pitoyable, réservé au *dessin* durant la décennie 70-80, dans notre enseignement, nous a conduits à donner une place importante à la question suivante :
Comment doit intervenir le dessin dans l'apprentissage de la géométrie ?

3. Le troisième volet de notre problématique est constitué par la résolution de problèmes. Nous mettons l'élève en situation de résolution de problème. Nous abordons ainsi les réponses associées aux deux principales questions suivantes :

(I) Quelles sont les *démarches de pensée* privilégiées par nos élèves ?

(II) Comment se forment les principaux *concepts* de la géométrie dans l'esprit de nos élèves ?

Nous nous interrogeons plus particulièrement sur les rapports entre les procédures et les concepts, sur la place de la démonstration, sur ce qui bloque la recherche de l'élève, etc.

D'autre part, mettre l'élève en situation de résolution de problèmes nous donne une méthode expérimentale.

2. La méthode expérimentale

Si la méthode expérimentale utilisée est fondée sur l'observation d'élèves en situation de résolution de problèmes de géométrie, elle s'appuie sur une condition nécessaire : *le travail collectif d'une équipe d'enseignants en activité.*

C'est sur cet aspect assez particulier de notre méthode que je veux insister maintenant.

La phase la plus longue de notre travail (6 mois pour chaque problème) est la recherche de l'énoncé correspondant à nos objectifs.

Examinons nos exigences vis-à-vis du problème posé car elles sont déterminantes pour notre méthode de travail.

1. Le problème fait intervenir essentiellement un secteur du champ conceptuel choisi.
2. L'énoncé du problème ne laisse pas apparaître le secteur du champ conceptuel propice à la solution ; nous disons que le problème n'est pas localisé pour l'élève.
3. Nous n'utilisons pas d'habillage demandant une mathématisation du problème.
4. Le problème s'adresse à tous les élèves, de la sixième à la terminale.
5. N'importe quel élève du secondaire comprend parfaitement, lorsqu'on le lui explique, un processus de résolution du problème.
6. L'énoncé est compris par les élèves en quelques minutes.
7. La solution n'est immédiatement évidente pour personne.
8. Le problème intéresse l'élève ; son intérêt est soutenu pendant au moins une heure ; et la recherche de ce problème entraîne chez l'élève une activité importante.
9. La solution du problème n'offre aucune ambiguïté.
10. Le problème est traité avec succès par au moins un quart des élèves et conduit à un net échec au moins un quart des élèves, et ceci en une heure de recherche.

Notre travail expérimental se décompose en 3 périodes qui se succèdent chronologiquement :

La *pré-expérimentation sauvage* : divers problèmes sont présentés aux élèves dans nos classes ; les réactions des élèves sont discutées dans l'équipe ; chaque professeur de l'équipe dispose d'une grande initiative.

La *pré-expérimentation* : muni d'un énoncé conçu par l'équipe chacun de ses membres procède à des entretiens individuels de type clinique et critique.
Un rapport général est rédigé à la fin de cette pré-expérimentation.

Vient ensuite l'*expérimentation* proprement dite ; un problème précis est donné aux élèves d'une classe (ou d'une demi-classe) ; chaque membre de l'équipe observe un élève et rédige un compte rendu du travail de cet élève ; nous appelons protocole ce compte rendu. Nous disposons ainsi pour trois problèmes de 205 protocoles.

L'analyse des protocoles est ensuite réalisée et les résultats dégagés s'appuient uniquement sur les protocoles.

Dans tout ce travail, il nous apparaît comme particulièrement important que d'une part, chaque enseignant de cette équipe dispose de toute *l'initiative* possible car ce sont ces initiatives qui font jaillir les plus fondamentales hypothèses associées aux processus scolaires ; d'autre part, il faut qu'une grande *unité* de points de vue apparaisse, ce qui suppose de la part de chaque membre de cette équipe un souci constant de *coordination.* La pré-expérimentation sauvage privilégie l'initiative. L'expérimentation repose sur l'unification des points de vue.

3. Les résultats

1) Rappelons tout d'abord les énoncés des trois problèmes cherchés par nos élèves.

Le premier problème se présente sous la forme d'un simple énoncé :

> *On donne deux cercles et un rectangle, quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection ?*

Un autre problème est le suivant : un pentagone régulier dessiné sur une feuille de papier est distribué aux élèves. Ce pentagone est inscriptible dans un cercle de rayon 10 cm.

> *Quel est le nombre de triangles de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm qui ont leurs trois sommets sur le bord du pentagone régulier ?*

En dernier lieu, examinons le problème sur lequel nous nous attarderons un peu plus. Il est présenté aux élèves de la manière suivante.
Une demi-feuille sur laquelle est dessiné un rectangle est distribuée aux élèves ; une autre feuille carrée et légèrement plus petite sur laquelle est dessinée un triangle est aussi distribuée aux élèves. La figure 1 ci-dessous reproduit à l'échelle $\frac{1}{2}$ le triangle et le rectangle ainsi que les bords des deux feuilles que nous dessinons en pointillés.

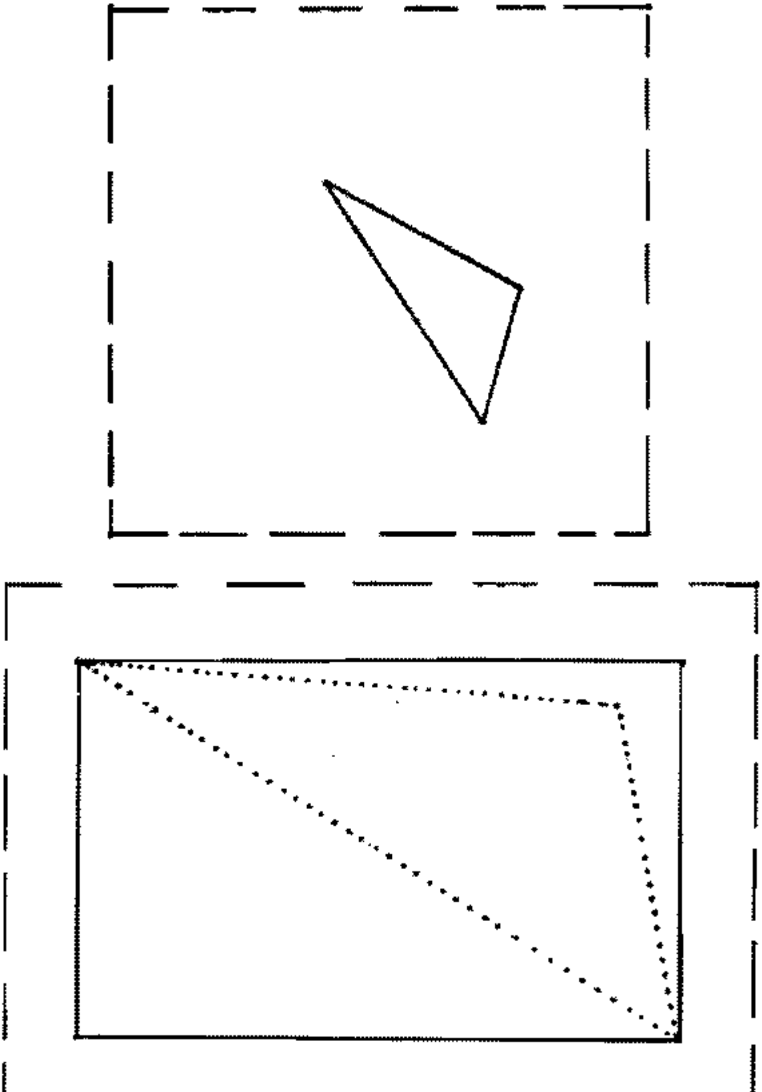


Figure 1

On donne la consigne suivante :

Construisez dans le rectangle, un triangle qui soit le même que celui-ci (on montre le triangle dessiné sur la feuille carrée), *mais le plus grand possible.*

Une solution de ce problème est obtenue en prenant un triangle, semblable au triangle donné dont le grand côté est porté par une diagonale du rectangle.

2) Examinons en détails deux résultats obtenus à l'occasion de ce dernier problème.

Pour cela, présentons le travail d'un de nos élèves que nous appelons JIS.

JIS construit tout d'abord un triangle ABC double du triangle T donné, selon la figure 2.

Il décide alors d'ajouter 1 cm à chacun des côtés et construit ainsi, selon la figure 3, un triangle dont les dimensions sont

$$2\times 8 + 1 = 17$$
$$2\times 6 + 1 = 13$$
$$2\times 4 + 1 = 9$$

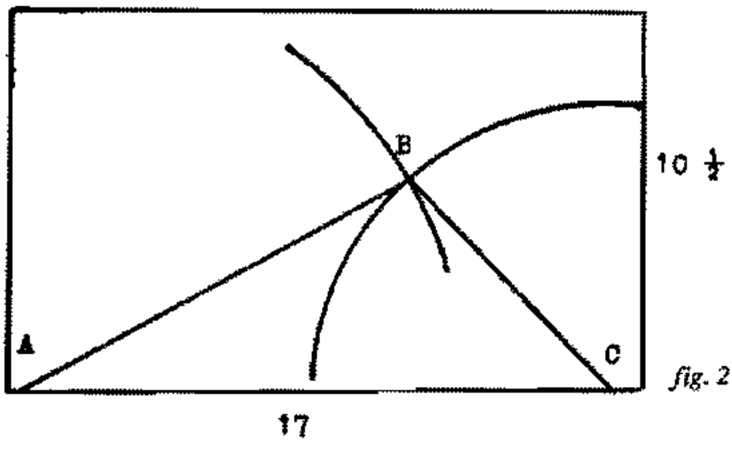


fig. 2

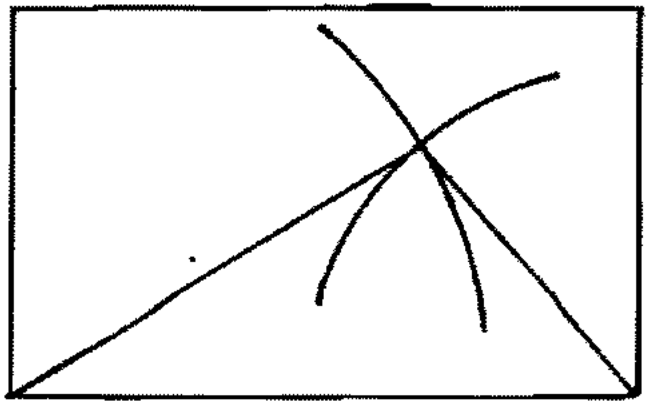


fig. 3

Après réflexion, il envisage de construire un triangle dont le petit côté est porté par la largeur du rectangle. Il place son rectangle verticalement, mesure la largeur et décompose les $10\frac{1}{2}$ cm de AB :

$$10\frac{1}{2} = 4 + 4 + 2\frac{1}{2}$$

Il obtient pour les autres côtés :

$$6 + 6 + 2\frac{1}{2} = 14\frac{1}{2}$$

$$8 + 8 + 2\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}$$

Il estime que son triangle ne rentrera pas dans le rectangle mais il le construit pour "voir de combien ça sort". Il obtient la figure 4. Le sommet du petit angle se trouvant à 8 mm du grand côté du rectangle mais à l'extérieur du rectangle il décide de raccourcir de 8 mm chaque côté du dernier triangle obtenu. Il calcule les dimensions des côtés du triangle cherché et trouve :

$$\begin{array}{rl} 9{,}7 & (= 10{,}5 - 0{,}8) \\ 13{,}7 & (= 14{,}5 - 0{,}8) \\ 17{,}7 & (= 18{,}5 - 0{,}8) \end{array}$$

Il construit au compas le triangle BEC que nous représentons sur la figure 5.

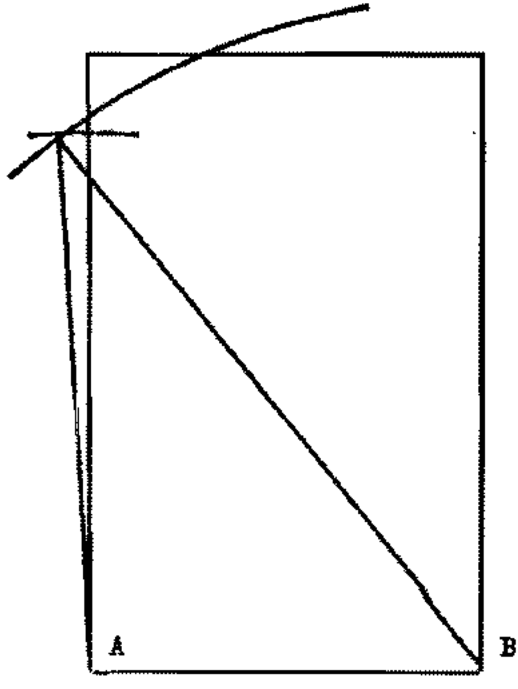


fig. 4

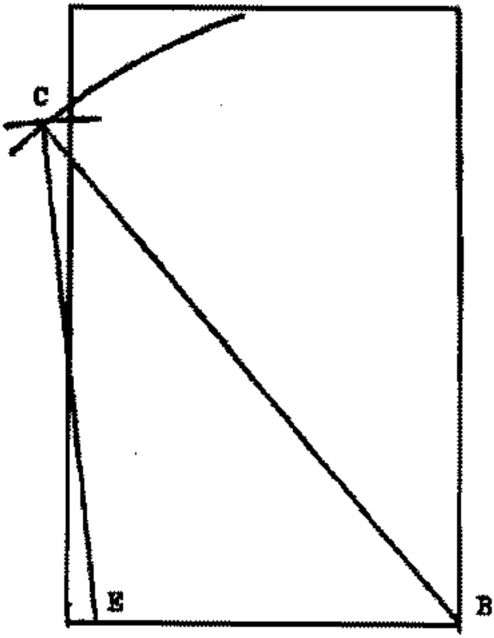


fig. 5

Il s'exclame :

— Je ne comprends pas. Là, je suis un peu perdu. Je pensais qu'il rentrerait vers la droite mais il est descendu vers le bas. Jusqu'à la fin de la séance, il va essayer de faire rentrer cette pointe selon la même méthode mais n'aboutira pas. Nous représentons sur la figure 6 ses trois derniers triangles.

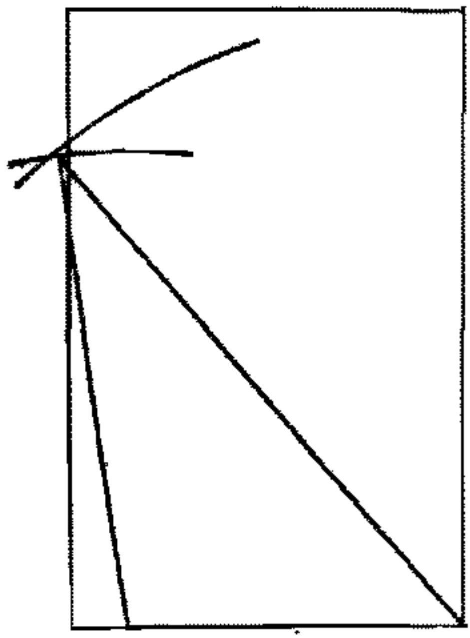


fig. 6 a

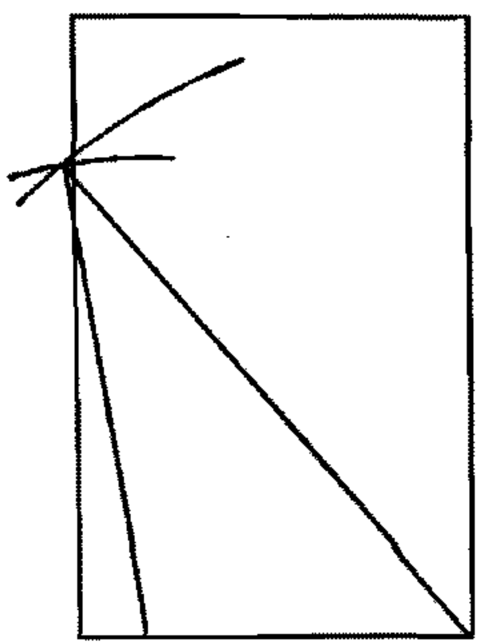


fig. 6 b

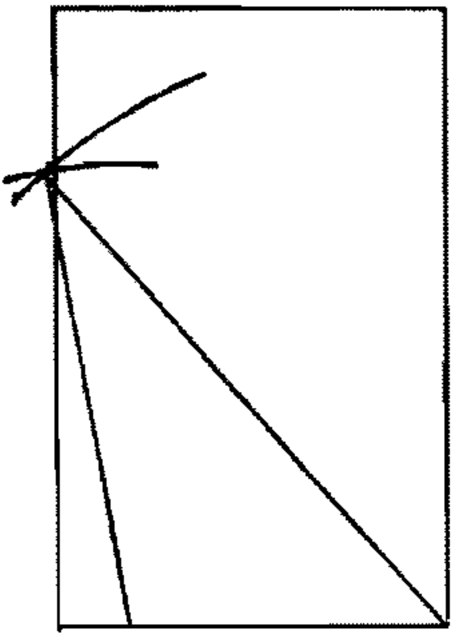


fig. 6 c

Figure 6

Nous pouvons analyser ce protocole de deux manières différentes ; d'une part, nous pouvons prendre en considération les notions mathématiques utilisées et d'autre part, nous pouvons examiner les démarches de pensée suivies par l'élève.

a) Si nous considérons les *notions mathématiques* nous rencontrons ici, à propos de la *similitude*, l'utilisation du double et des pseudos-proportions (si un triangle T_1 a des côtés de dimensions P, M, G et si T_2 a pour dimensions $P + h$, $M + h$, $G + h$, on dit que T_2 est pseudo-proportionnel à T_1) et la conservation des angles.

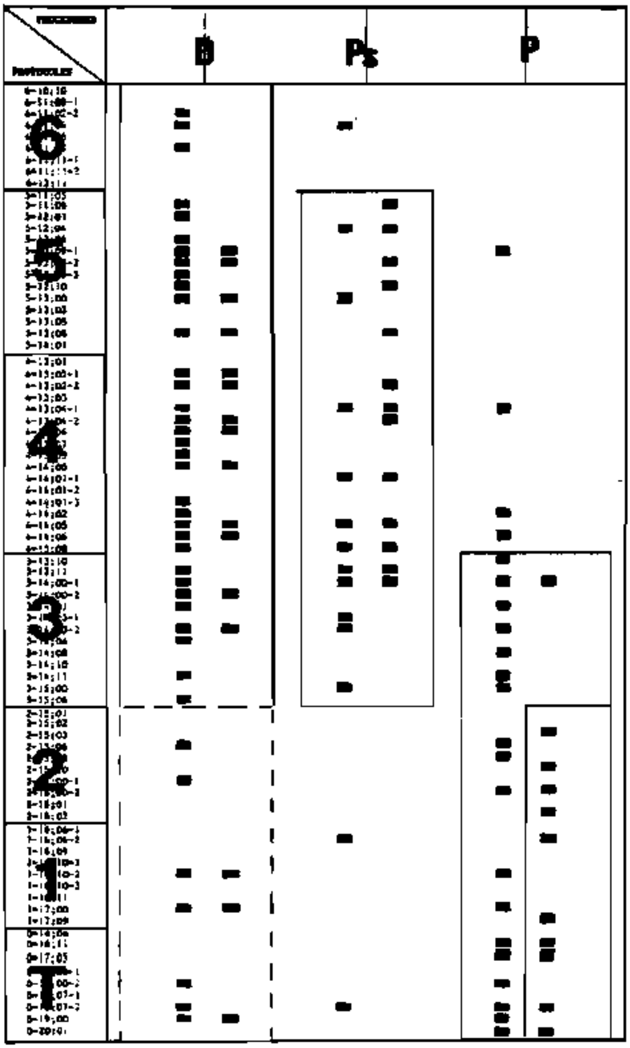
Nous avons donc examiné tous nos protocoles en regardant si la conservation des angles et la conservation des proportions intervenaient.

Nous avons pu ainsi dégager, entre autres, trois grandes tendances :

- La procédure faisant appel au double apparaît essentiellement dans le premier cycle, mais elle est aussi présente de façon non négligeable dans le second cycle.
- C'est dans nos classes de 5ᵉ, 4ᵉ et 3ᵉ que les procédures liées à la pseudo-proportionnalité interviennent de façon importante.
- La conservation des proportions ne s'installe vraiment dans les procédures de nos élèves qu'à partir de la classe de 3ᵉ.

Ces résultats sont schématisés par le tableau 7 ci-après. Dans ce tableau nous trouvons six colonnes de petits rectangles noirs. Un élève ayant fait appel au double est signalé par un petit rectangle noir placé dans la première colonne à la même hauteur que le numéro désignant le protocole de l'élève en question. La lettre D rappelle qu'il s'agit du double. Les rectangles noirs des troisième et quatrième colonnes correspondent à l'usage des pseudo-proportions. Les rectangles noirs des cinquième et sixième colonnes correspondent à l'usage des proportions en toute généralité.

Tableau 7



b) Si nous considérons *les démarches de pensée*, nous constatons tout d'abord que le travail de l'élève peut-être décomposé en une suite de procédures, chacune de ces procédures s'articulant autour d'un dessin. L'articulation peut se décomposer en trois étapes : dans une première étape, l'élève anticipe une image, puis dans une deuxième étape, il réalise un dessin, enfin, il fait des observations et coordonne ses idées et ses observations.

Ces trois étapes situées avant, pendant et après un dessin constituent un tout que nous appelons *processus élémentaire*.

D'une façon quasi générale, les élèves dans la recherche de nos problèmes de géométrie procèdent selon une suite de processus élémentaires. Examinons plus particulièrement dans le protocole de JIS le processus élémentaire se terminant par l'exclamation précédemment citée. JIS constate que le dessin qu'il vient d'obtenir n'est pas conforme au dessin espéré : la pointe ne rentre pas. Nous sommes en présence de ce que nous appelons une *contradiction observée* car l'élève exprime le rejet d'une réalisation qui ne satisfait pas à des contraintes qu'il veut respecter.

On peut estimer à 60 % dans nos problèmes, le nombre de processus élémentaires aboutissant à une C.O. Cet important processus nous a conduits à une méthode d'analyse que nous appelons l'analyse dialectique que nous n'aborderons pas ici. Signalons toutefois que l'analyse dialectique montre, par exemple, que c'est la conservation des angles qui contrecarre ou élimine les pseudos-proportions et permet ainsi l'accès à la proportionnalité en toute généralité. Nous rejoignons donc à travers l'analyse des processus celle de la formation des concepts.

3) D'une manière plus générale, nous avons pu obtenir un certain nombre de résultats portant respectivement sur les concepts mathématiques et sur les processus utilisés par nos élèves.

Examinons sommairement l'ensemble des résultats. En ce qui concerne les concepts :

— La *similitude des triangles*, définie par la *conservation des angles*, est une notion très assimilable par nos élèves du premier cycle dès la classe de 5^e.

— La similitude des triangles, définie par *la conservation des proportions*, n'est vraiment assimilable qu'à la fin du premier cycle ou au début du second cycle.

— La *notion d'angle*, sous forme de couple de demi-droites est en voie de conceptualisation rapide au début du premier cycle (6^e et 5^e). La notion de mesure d'angle est acquise en même temps. Dans la pratique, elle se heurte toutefois aux difficultés dues à l'usage du rapporteur.

— L'unicité, à une isométrie près, d'un triangle défini par la longueur de ses trois côtés *(troisième cas d'égalité)* n'est pas une proposition acquise par nos élèves du secondaire.

— La notion de *translation* existe chez les élèves. Avant que le concept soit formé, la notion apparaît sous une forme pratique reposant sur le mouvement de translation rectiligne et faisant appel plus généralement au mouvement plan sur plan.

— La *symétrie orthogonale* est, elle aussi, en voie de formation, elle est utilisée essentiellement comme une notion pratique sous deux aspects : le retournement et la symétrie-technique. La conservation des mesures de longueur y joue un rôle déterminant.

— La *rotation* n'est pas conceptualisée. Sa forme pratique la plus évoluée fait intervenir la conservation des mesures de longueurs et d'angles.

— Les notions de *conservation*, notamment de conservation de mesures de longueur et d'angles jouent un rôle déterminant dans la formation des concepts de transformations géométriques.

— Aucun indice ne nous permet d'affirmer que le concept de *groupe de transformation* soit en voie de constitution chez nos élèves.

En ce qui concerne les procédures et les processus, nous proposons les résultats suivants :

— La démarche de pensée que l'élève utilise pour résoudre un problème se présente comme une suite de séquences assez courtes relativement indépendantes les unes des autres. Quelques stratégies partielles regroupant plusieurs séquences apparaissent quelquefois. Une stratégie d'ensemble est rarement envisagée a priori. Cela nous a conduit à définir *le processus élémentaire*.

— Certaines situations mathématiques privilégiées, fortement enracinées chez l'élève et s'appuyant sur des figures solidement établies, bloquent souvent la recherche de l'élève. Nous les avons appelées *"positions d'équilibre"*.

— La résolution des problèmes nécessite la mise en place d'un processus de *différenciation-intégration*, difficile à obtenir pour l'élève.

— La *preuve*, lorsqu'elle apparaît, n'apparaît qu'en fin de recherche. Elle n'est le plus souvent qu'un résumé du processus de découverte de la solution. Elle ne répond pas au souci d'un exposé logique de la solution, dénué de contradiction. C'est très rarement une démonstration.

— Pour résoudre un problème de géométrie, l'élève procède surtout *par contradiction*. Les principaux processus fondés sur ces contradictions reposent soit sur les lacunes locales compensées, soit sur l'utilisation du hasard, soit sur l'usage d'un champ de contraintes muni d'une variable.

— Le *dessin*, et plus particulièrement le dessin précis avec usage d'instruments de dessin, joue un rôle indispensable pour l'élève, dans la résolution de problèmes de géométrie euclidienne plane.

— Les trois principaux *instruments de dessin* utilisés sont le double-décimètre, le rapporteur et le compas. Le double-décimètre sert à la fois de règle et d'instrument de mesure, c'est l'instrument de dessin privilégié. Le rapporteur est d'un usage plus difficile pour les élèves.

— L'*approximation* utilisée par l'élève dépend de sa plus ou moins grande maîtrise des connaissances théoriques. L'approximation choisie par l'élève se relâche lorsqu'augmente sa confiance dans les modèles théoriques qu'il utilise.

— Les démarches de pensée que l'élève utilise pour résoudre un problème de géométrie sont essentiellement fondées sur *l'interaction entre ses réalisations pratiques et sa réflexion théorique.*

Ajoutons quelques remarques pour terminer.

Les résultats que nous avons obtenus, ne peuvent être considérés comme des résultats que parce qu'ils sont confirmés par les expérimentations réalisées avec nos trois problèmes. Si nous prenons en considération l'ensemble des élèves de l'enseignement secondaire face à la géométrie euclidienne plane, ces résultats ne peuvent avoir qu'un rôle d'hypothèse. Encore faut-il modifier les énoncés de nos résultats pour les transformer en hypothèses générales, qu'il faudra expérimenter à nouveau.

Les affirmations succintes ci-avant, tant en ce qui concerne les concepts que les processus, n'ont vraiment de sens qu'accompagnées de l'analyse détaillée se trouvant dans les divers chapitres de [1]. C'est dans ce même texte qu'on peut trouver les références bibliographiques nécessaires.

Les résultats que nous avons résumés ci-avant s'accompagnent aussi de questions auxquelles nous ne savons pas répondre. Enumérons en quelques-une, à titre de prototype :

— L'accès aux différentes transformations ponctuelles est-il possible à partir des seules notions de mouvement plan sur plan ou de conservation ? Quel rôle y jouent les fonctions algébriques ?

— Que deviennent les processus élémentaires ou les contradictions observées si le problème proposé porte sur l'analyse ou l'algèbre ?

— Les procédures pratiques sont-elles, en général, indispensables à la formation des concepts ? Qu'en est-il, s'il s'agit de concepts numériques ? algébriques ?

— Faire jouer un rôle important aux procédures pratiques, est-ce compatible avec l'organisation actuelle de la classe et le temps disponible ?

— Peut-on accélérer la conceptualisation en donnant une plus grande place à la recherche de problèmes dans notre enseignement ?

Nous sommes partis d'une problématique née de l'enseignement. Nous voilà revenus à des questions sur l'enseignement. Nous avons signalé, dans le texte [1] quelques conséquences pédagogiques à tirer de notre analyse. Nous insistons cependant sur le fait que ces conséquences pédagogiques n'ont pas été confrontées à l'expérimentation didactique. On doit donc les utiliser avec une grande prudence. Et voici pour terminer, la dernière remarque. Au départ, nos questions étaient vagues. Par leurs procédures de recherches, les élèves ont répondu à certaines d'entre

---

[1] AUDIBERT G., 1982, *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en Géométrie Euclidienne plane.* I.R.E.M. Université des Sciences et Techniques du Languedoc — 831 pages. Place Eugène Bataillon — 34060 MONTPELLIER CEDEX — Nouvelle édition : Publication APMEP 1984 N° 56 (831 pages).

elles. Ces réponses ont quelquefois dépassé nos espérances, car leurs précisions nous ont permis d'obtenir des résultats plus crédibles et d'affiner, par la même occasion, notre problématique.

Nous avons pu constater la variété et l'intelligence des cheminements suivis par tous nos élèves qui ne font jamais rien sans raison et je puis affirmer au nom de toute l'équipe qui a contribué à ce travail que cette recherche fondée sur l'observation des élèves a été pour nous enseignants, certainement un excellent apprentissage.