

images et métaphores dans l'enseignement des mathématiques

par A. Michel Pajus

Les participants avaient reçu auparavant le texte suivant :

Pour faciliter la compréhension ou la mémorisation de notions mathématiques, l'enseignant, et le mathématicien en général, ont plus ou moins recours à l'image (petit dessin), ou, plus généralement à la métaphore (expression imagée, gestes, etc.)

Certaines représentations sont très classiques (fonctions, géométrie affine...), d'autres apparaissent surtout dans le cours oral (les "trucs" du pédagogue).

Je souhaiterais que cet atelier permette d'en recenser quelques unes, d'étudier leur intérêt, et les problèmes que pose leur utilisation, en vue d'améliorer le fonctionnement de cet outil pédagogique qui me semble très important.

Questions :

— Utilisez-vous des dessins, expressions, gestes, qui ne figurent pas dans les manuels? Vos élèves les prennent-ils en note? Les reproduisent-ils sur leur brouillon, leur copie, au tableau? Les utiliseriez-vous devant un inspecteur?

— Pensez-vous que vos élèves tirent tout le profit souhaité des représentations que vous leur proposez? Pourquoi?

— Avez-vous l'impression que certaines erreurs de vos élèves viennent d'une image fautive ou inadaptée?

Voici ce que j'ai retenu du débat :

1. Les intervenants utilisent beaucoup les métaphores...

— en premier lieu, quitte à inventer un langage qui deviendra un rituel, pour retenir l'attention des élèves, leur inculquer des principes de recherche, de raisonnement, de comportement : "on plonge dans un bassin s'il est piscinable, on dérive une fonction si elle est dérivable", "tout bâton a deux bouts", les fonctions peuvent être "frétilantes" (non monotones par morceaux), les équations "caméléons" (quand elles ont des paramètres).

— ensuite comme aide pour une explication, une recherche, une introduction : par exemple, une situation concrète dont la notion mathématique étudiée est une modélisation (balances = équations, partage de bonbons = congruences...) et évidemment, les "dessins" sur lesquels la discussion s'est approfondie.

Les participants déclarent aussi ne rien changer à leur attitude devant un inspecteur.

...mais est-ce le cas de tous les enseignants ?

Le dessin semble sous-utilisé, même quand il dispose d'un statut officiel dans le programme (Certains enseignants interdisent l'utilisation du cercle trigonométrique pour les tests de contrôle ! Dans les classes post-Bac, il est rare de voir l'élève représenter spontanément une fonction, même simple, pour résoudre un problème d'intégrale ou de séries, certains enseignants "réussissent" à définir l'intégrale de Riemann sans le moindre dessin). Même si ces cas sont marginaux, il reste que, pour toute une génération d'enseignants, le dessin, dit "petit dessin", était un objet plus ou moins honteux pendant leurs études, et bien que leur pratique pédagogique leur en fasse ressentir la nécessité, ils en gardent un malaise qui ne peut se résoudre qu'en analysant les difficultés réelles d'utilisation de cet outil.

2. La lecture du dessin par le professeur n'est pas celle de l'élève...

Le dessin fait appel à des présupposés qu'il faudrait autant que possible rendre communs (par exemple : dessin en perspective). L'image est un code de communication pas toujours clair, au point que la représentation d'un concept est parfois moins accessible que le concept lui-même (diagrammes de Carroll à l'école primaire).

...le dessin doit d'abord intervenir comme objet d'étude

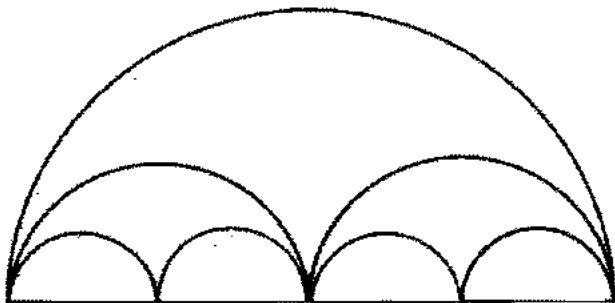
Ce n'est que s'il est d'abord familiarisé avec ces objets en tant qu'objets mathématiques que l'élève pourra les utiliser comme supports de recherche ou "cobayes" pour tester ses hypothèses, comme le feraient des naturalistes.

Pour obtenir cette familiarité avec l'image en tant qu'objet mathématique, tous les moyens doivent être mis en œuvre : dessin soigné à la règle et au compas, dessin à main levée, et aussi "l'image dans la tête", surtout pour les représentations spatiales qui demandent de "contourner" l'image (par exemple : l'algèbre linéaire, dont la compréhension est grandement facilitée par les représentations dans \mathbb{R}^3 , à condition de "voir" dans l'espace à trois dimensions).

3. Par rapport au concept, le dessin en dit trop et pas assez...

Les dessins et situations concrètes ont de multiples facettes, et celles que voient les élèves ne sont pas forcément celles qu'a choisi l'enseignant.

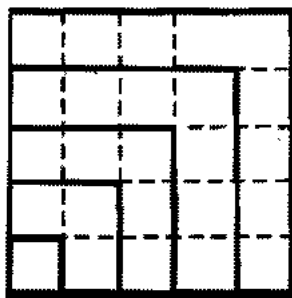
Il est par ailleurs évident qu'il ne représente en général qu'un cas particulier, ou un schéma forcément réducteur. Il peut alors arriver qu'une représentation efficace pour un concept, à un moment donné, dans un contexte donné, gêne l'acquisition d'un autre concept ou la généralisation du premier. Par exemple, on peut comprendre la "limite" en approchant le périmètre d'un cercle par celle des périmètres des polygones inscrits, mais un dessin du même genre peut donner le diamètre comme longueur du demi-cercle ; la compréhension de la tangente comme "limite" des sécantes peut nuire à la compréhension du concept de limite non uniforme d'une suite de fonctions.



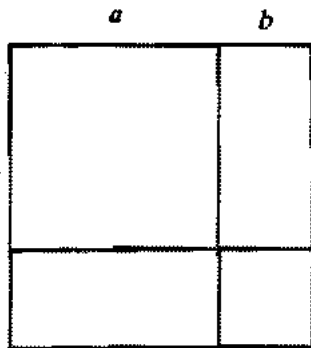
...ce défaut peut se transformer en avantage

Mais les obstacles qui apparaissent permettent d'approfondir la réflexion, et font ressentir la nécessité de préciser, formaliser, construire d'autres outils.

4. Le dessin est-il une démonstration ?



$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = ?$$



$$(a + b)^2 = ?$$

Le problème du statut du dessin se pose différemment suivant les niveaux d'enseignement. Dans certains cas, le dessin n'est pas seulement support, mais démarche mathématique.

Si la démonstration résulte d'une organisation graphique qu'une formulation algébrique ne ferait qu'explicitier, nous considérons que le dessin est une démonstration, puisqu'il contient tous les arguments mathématiques, ce qui n'est pas le cas par exemple pour une représentation graphique de fonction construite avec une calculatrice.

Il n'y a pas de dessins plus nobles que d'autres, mais des dessins plus ou moins adaptés à l'objectif visé et à la pratique des élèves. Pour faire des mathématiques, tous les moyens sont à utiliser, de la phrase bien faite, avec ou sans δ , au gribouillis, en passant par les gestes allusifs, les difficultés de communication se retrouvant partout. Il reste que ces outils pédagogiques, surtout utilisés dans la pratique non écrite, sont mal recensés et que l'évaluation de leur impact n'est pas facile.

Remarques : Ce débat a évidemment soulevé aussi le problème de la rigueur, mais je n'en ai pas rendu compte car ce problème avait fait l'objet d'un débat beaucoup plus approfondi lors des ateliers du jour précédent.

Bien que nous ayions souhaité travailler "de la maternelle à l'université", il n'y avait pas parmi nous de représentants du Premier degré.