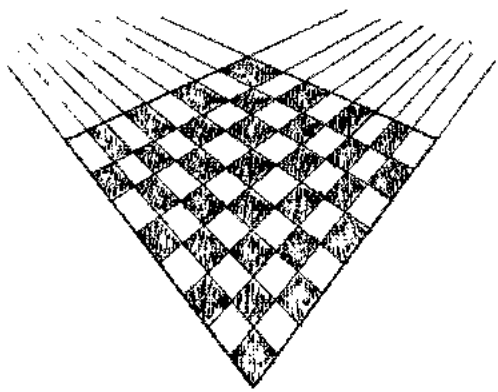
une problématique en géométrie : la perspective

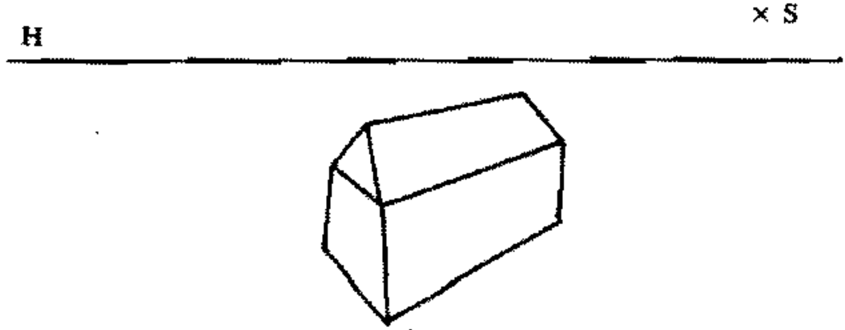
par Michel Soufflet,
Régionale de Caen

Deux dessins, assortis chacun d'une question, sont proposés à l'assemblée :

Un échiquier en perspective ?



S est le soleil
H la ligne d'horizon,
Construire l'ombre solaire de la maison (telle qu'on la verrait sur une photographie)



Ces questions posées, j'ai laissé l'assemblée chercher pendant une demi-heure environ ; la diversité des remarques, toutes très loin du problème, prouvait une ignorance quasi générale des propriétés de la perspective conique. Rien de surprenant en fait puisqu'elle n'est enseignée à aucun moment de la scolarité "normale" d'un futur professeur de mathématique.

Un moment, plusieurs personnes ont soupçonné une supercherie dans le 2e dessin : "S ne peut pas être le soleil". Je leur ai fait remarquer que, sur une photo, le soleil, la ligne d'horizon et la maison pouvaient très bien se stiuer ainsi. En fait, il ne faut pas considérer S comme le soleil mais comme le point de fuite des rayons solaires, et S peut très bien se trouver en dessous de la ligne d'horizon si, dans l'espace, le soleil est situé derrière l'observateur. Les remarques de l'assistance étaient très loin de ces considérations, la notion de point de fuite n'étant pas suffisamment maîtrisée. J'ai donc décidé de faire un bref exposé des notions essentielles de perspective conique, ce qui a provoqué des réactions diverses : vif intérêt pour les uns, critique pour les autres : ils auraient voulu tout découvrir par eux-mêmes (ce qui est très louable). En fait le manque de temps ne m'en laissait guère le choix. Le dialogue qui a eu lieu par la suite a soulevé plusieurs problèmes de fond en pédagogie.

— Faut-il laisser les élèves découvrir tout par eux-mêmes, au risque de perdre beaucoup de temps. Est-ce vraiment du temps perdu ?
— Peut-on retrouver en quelques heures des propriétés qui ont mis plusieurs siècles à se formaliser ?

Je ne sais pas répondre à ces questions, mais je sais que, dans le cas de la perspective, l'étude théorique m'a apporté un éclairage nouveau sur les problèmes de représentation de l'espace.

Voici donc quelques éléments de théorie, tous extraits ou inspirés du cours de Didier BESSOT dans les cahiers de la perspective n° 1 et 2 édités par l'IREM de Basse-Normandie et dont je recommande vivement la lecture (le résumé qui suit n'étant pas suffisant pour une bonne compréhension du problème).

Définition d'une projection conique

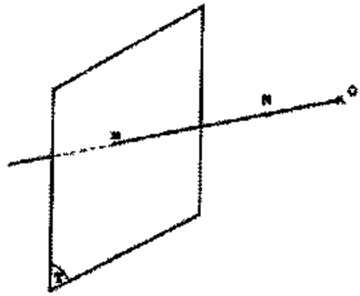
$\mathcal{E}$ étant l'espace affine réel de dimension 3.

Une projection conique centrale $\mathcal{P}$ ***de*** $\mathcal{E}$ est une transformation de $\mathcal{E}$ définie comme suit :

1°) On donne un plan fixe (T) de $\mathcal{E}$ et un point O de $\mathcal{E}$, hors de (T).

2°) L'image par $\mathcal{P}$ d'un point M de $\mathcal{E}$ est le point d'intersection de la droite (OM) et de (T). On notera ce point m.

$$m = \mathcal{P}(M) = (OM) \cap (T).$$



T est appelé *plan du tableau*.
O correspond à *l'œil* de l'observateur en perspective conique.

Domaine de définition : On appelle **N** (plan neutre) le plan passant par O et parallèle à T.
Le domaine de définition de $\mathcal{T}$ est $\mathcal{E}$ privé de **N**.

Image d'une droite (non parallèle à T).

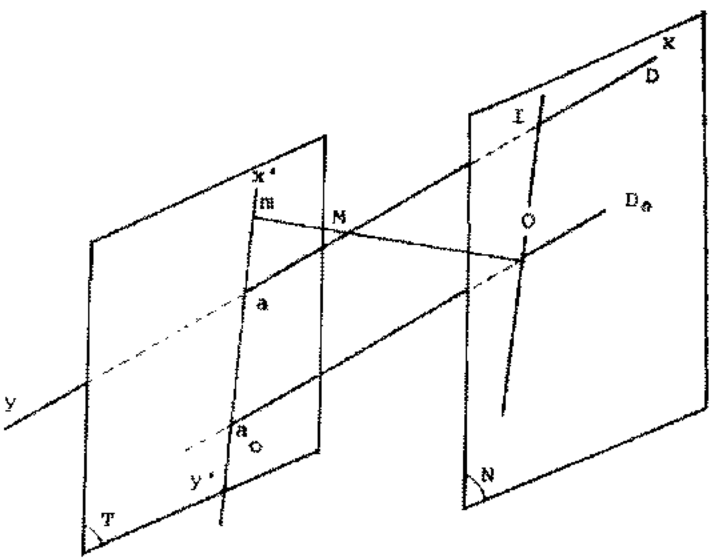


Image de la droite D : a est l'intersection de D avec T, a_0 l'intersection de la parallèle D_0 à D passant par O avec T ; I l'intersection de D avec N.

Si M ∈ [a,I] , m ∈ [a,x') M est entre l'observateur et le tableau .

Si M ∈ [a,y) , m ∈ [a,a_0] M est derrière le tableau

Si M ∈ [I,x) , m ∈ [a_0,y') M est derrière l'observateur.

a_0 n'est pas l'image d'aucun point de D.
I n'a pas d'image.
La demi-droite [I,y) a pour image la demi-droite [a_0,x').

Le point a_0 est appelé *point de fuite* de D (intersection avec 1 de la parallèle à D passant par l'obsevateur). Soit D' une parallèle à D ; elle a le même point de fuite que D : en perspective conique on représentera D et D' par deux droites concourantes en a_0.

Image d'une droite parallèle à T et ne passant pas par O : l'image de D est parallèle à D.

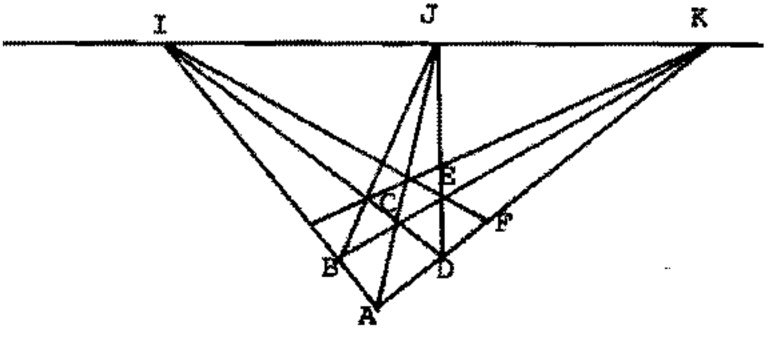
En perspective conique, le parallélisme est donc conservé lorsque les droites représentées sont parallèles au plan du tableau.

Remarque : la *ligne d'horizon* est l'ensemble des points de fuite des droites horizontales, c'est aussi l'intersection du plan horizontal passant par O avec le plan T.

Ces considérations étant établies, on peut répondre à la première question en remarquant que sur le dessin les diagonales ne sont pas alignées : l'échiquier n'en est donc pas un vrai puisqu'il n'est pas formé de carrés égaux.

En fait comment construire un échiquier ?

— *Cas où un des faisceaux de diagonales est parallèle au plan du tableau* : il faut choisir trois points de fuite I, J, K équidistants sur la ligne d'horizon et se donner le côté AB du carrelage.



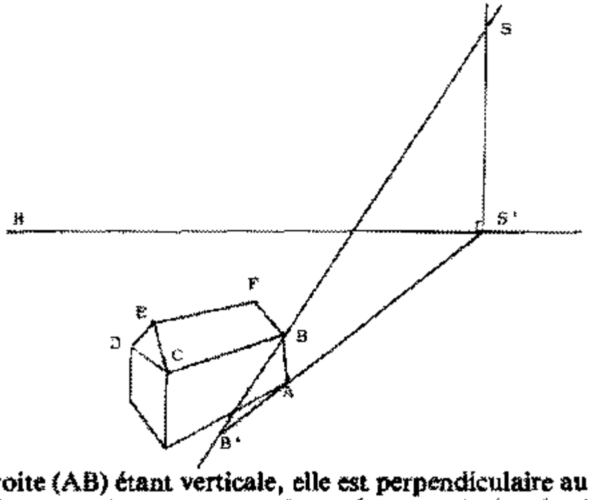
L'intersection de (BK) avec (AJ) donne le point C et l'intersection de (IC) avec (AK) donne le point D...

Si les diagonales (BD) , (EF) ... ne sont pas parallèles au plan du tableau, alors il faut prendre, sur la ligne d'horizon, quatre points formant une division harmonique (voir les articles de Didier BESSOT cités plus haut concernant le fait que la projection conique conserve le birapport).

Remarque : même si l'échiquier proposé au départ avait été dessiné avec cette méthode, il n'aurait pas été possible de conclure. En effet, le dessin obtenu peut être celui de l'image d'un dallage carré dans une projection conique, mais il peut être aussi l'image d'un dallage rectangulaire (ou formé de losanges ou de parallélogrammes). Pour conclure, il faut des renseignements plus précis concernant la position de l'observateur.

Revenons au 2e problème

L'ombre du segment [AB] sera le segment [AB'], B' étant l'intersection de (SB) avec le sol : c'est donc ce point B' qu'il faut construire.



La droite (AB) étant verticale, elle est perpendiculaire au plan du sol (supposé horizontal). Le plan ABS est donc vertical et la droite (AB') horizontale : la projection orthogonale S' de S sur H est donc dans le plan ABS, et la droite (AB) étant incluse dans ce plan, S' ne peut qu'être le point de fuite de la droite (A'B'). Le point B' est donc obtenu comme l'intersection de (SB) avec (AS').

Pour obtenir l'ombre complète, il faut recommencer avec les points C, D, E et F ; il se peut que le point C' se trouve à l'intérieur de la zone d'ombre, c'est qu'alors C n'est pas éclairé par le soleil !

Remarques

— Les projections sur un plan donné et selon une direction donnée (perspective cavalière et ombres solaires) figurent au programme de la classe de 1ère S. Les projections coniques (perspective conique et ombre à partir d'une source lumineuse ponctuelle non située à l'infini) n'y figurent pas, et c'est peut être dommage, car elles donnent un sens aux mathématiques que l'on enseigne en apportant des techniques aux élèves intéressés par le dessin.

— En fait le problème précédent qui consiste à étudier une ombre solaire en perspective conique revient à composer une projection de direction donnée avec une projection conique ; ce point de vue est fort intéressant mais, avant d'en parler aux élèves, il convient de se demander s'il sera source d'ombre ou de lumière ... !

BIBLIOGRAPHIE

Article de Didier BESSOT dans *les cahiers de la perspective* édités par l'IREM de Basse-Normandie - Bd du Maréchal Juin, 14000 Caen.
Cahiers n° 1 : 10 F - Cahiers n° 2 : 20 F - Cahiers n° 3 : à paraître.