les suites et les séries géométriques : essai d'analyse contextuelle

par Christiane Hauchart et Nicolas Rouche
Groupe d'enseignement mathématique
Louvain-La Neuve, Belgique

Ce texte a été présenté en mai 1983 au colloque Inter-IREM de Géométrie de Louvain-La Neuve. Il réapparaîtra, mutatis mutandis, dans un livre en préparation et qui a pour titre : ***Premiers pas vers les limites.***

Dans ce contexte, on a vite fait le tour du sujet.

De manière plus générale, nous avons voulu illustrer l'intérêt pour le professeur de pouvoir "penser à côté", de se dégager des chemins que sa formation mathématique lui indique en l'aveuglant parfois ; bref, l'intérêt qu'il a à retrouver de temps en temps un regard naïf. Nous tenterons d'observer aussi, sur cet exemple de suites et de séries géométriques, la maturation conceptuelle chez les élèves.

Nous avons essayé de montrer la richesse que peuvent cacher des situations de suites et de séries géométriques par rapport à la relative pauvreté de ces notions dans les maths déjà structurées. Là, une suite géométrique n'est rien d'autre qu'une suite du type

$$(ar^n)_{n \geq 1}$$

et une *série* géométrique est une suite de sommes partielles du type

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = a\ \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

1. Les suites ont des facettes multiples

Le débutant qui rencontre des suites par un travail de recherche sur des situations ou problèmes, ne rencontre pas de prime abord des applications au départ de $\mathbb{N}^*$, mais plutôt des rangées d'objets, de figures articulées les unes aux autres, des successions d'événements, des colonnes de nombres,... Qui plus est, *presque chaque suite ainsi rencontrée possède plusieurs facettes,* peut être considérée de plusieurs points de vue ou matérialisée dans divers supports.

Ainsi par exemple :

fig. 1 $\quad \frac{8}{9}, \left(\frac{8}{9}\right)^2, \left(\frac{8}{9}\right)^3, \left(\frac{8}{9}\right)^4, \left(\frac{8}{9}\right)^5, \ldots$

fig. 2

0,888889
0,790123
0,702332
0,624295
0,554929
0,493270
0,438462
0,389744

De même une série numérique peut être perçue comme une "somme infinie" ou comme une suite de sommes partielles ou encore comme la suite de ces dernières effectuées :

fig. 3 $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$

fig. 4

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

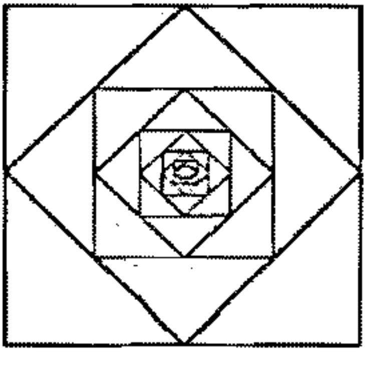
$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

....

fig. 5 $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \frac{40}{81}, \ldots$

Les carrés emboîtés dans la figure ci-dessous peuvent évoquer davantage selon les cas une suite de figures, une suite d'ensembles de points ou une suite d'aires.

fig. 6



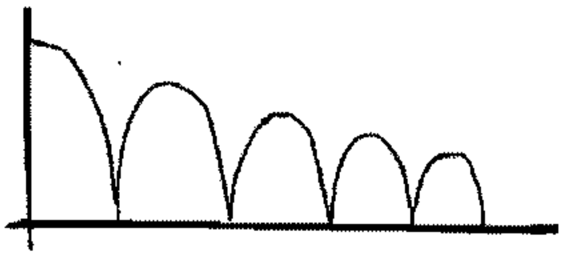
Si on considère le problème de la balle :

fig. 7 **On lâche une balle de ping-pong, d'une hauteur *h*, au-dessus d'une table horizontale, dans le champ de la pesanteur.**

Après l'expérience, on pose les questions suivantes. Combien de fois a-t-elle rebondi ? Est-elle arrêtée maintenant ? Si c'est le cas, combien de temps lui a-t-il fallu pour s'arrêter ?

on peut voir plutôt une suite d'événements, une suite de hauteurs ou une suite de graphes...

fig. 8



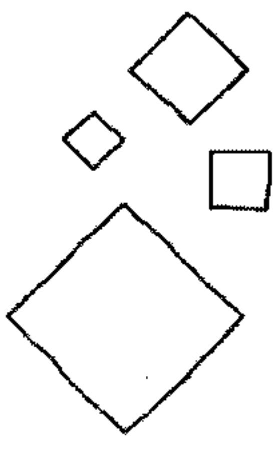
Tout cela est encore bien loin d'une application au départ de N*.

2. Qu'est-ce qui provoque l'apparition d'une suite ?

Pratiquement, on ne peut présenter aux élèves que des ensembles finis d'objets, de figures, d'événements ou de nombres. Quand et comment leur arrive-t-il de les prolonger mentalement pour en faire des suites infinies ?

Considérons les six carrés de la fig. 9, puis les mêmes carrés disposés comme sur la fig. 10.

fig. 9



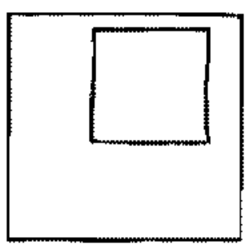
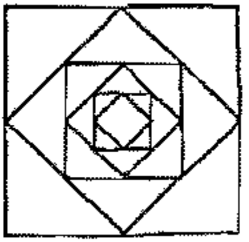


fig. 10



On ne sait que penser des premiers, sinon dans un premier temps qu'on pourrait les classer, ce qui créerait une situation nouvelle. Les seconds, par contre, exhibent un ordre et une loi d'engendrement ; le lecteur se sent comme invité à poursuivre le dessin et même à le poursuivre indéfiniment. Il en va ainsi en général, *il faut qu'un mode d'engendrement soit, sinon explicité, au moins perçu, senti de quelque façon.*

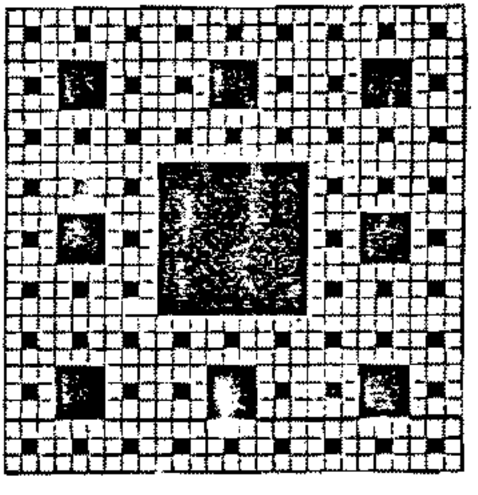
Mais selon le biais par lequel une suite est abordée, son mode d'engendrement sera perçu clairement, difficilement ou pas du tout.

a) Ainsi, l'explication verbale de la construction des étapes du "carré passoire" suggère clairement qu'on peut la poursuivre indéfiniment,

fig. 11 **On part d'un carré d'aire égale à 1. A la première étape, on divise le carré de départ en 9 carrés égaux et on enlève le carré central. A la deuxième étape, on divise chacun des huit carrés restant en 9 carrés égaux et on enlève le carré central. Et ainsi de suite.**

tandis que la figure :

fig. 12



invite peu à poursuivre.

b) En général, on a beaucoup de peine à voir comment est construite une suite de nombres donnée par ses quelques premiers termes sortant d'une calculatrice. En effet, on ne peut lire qu'un nombre à la fois, ce qui oblige à en mémoriser plusieurs pour percevoir comment ils évoluent.

Ainsi donc, toute suite pouvant être abordée de diverses façons, son existence et sa forme peuvent être perçues plus aisément sur un support que sur un autre. Qui plus est, l'imagination se laisse emporter d'autant plus facilement à prolonger une suite finie que cette suite est plus longue. Ainsi par exemple, le dessin de la figure 13 est plus suggestif que celui de la figure 14.

fig. 13

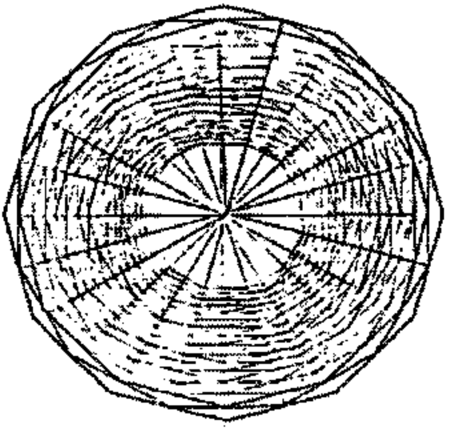
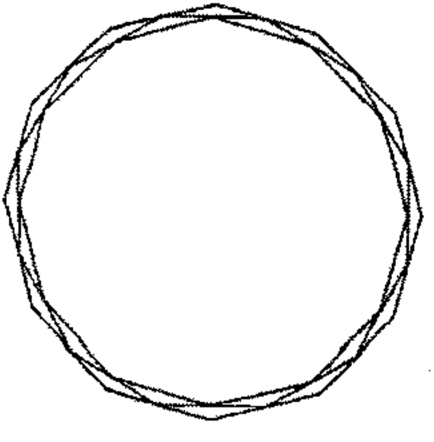


fig. 14



3. Débrouiller le mode d'engendrement d'une suite

Les exemples d'objets ou de nombres perçus comme des amorces de suites ne sont pas, on vient de le voir, des exemples quelconques : ils ont une forme, ils exhibent un mode d'engendrement. Mais ce dernier n'est souvent saisi de prime abord que de façon sommaire.

Voyons maintenant comment on arrive à passer de la perception première à une vue plus approfondie, multipliant les points de vue.

3.1. Suites d'aires ; l'effet d'échelle. Les aires de figures géométriques formant une suite sont, selon le cas, simples ou moins simples à évaluer ; simples par exemple pour le cas des carrés emboîtés (cfr. fig. 10), assez simple pour le "carré-passoire" (cfr. fig. 15 et 16),

fig. 15

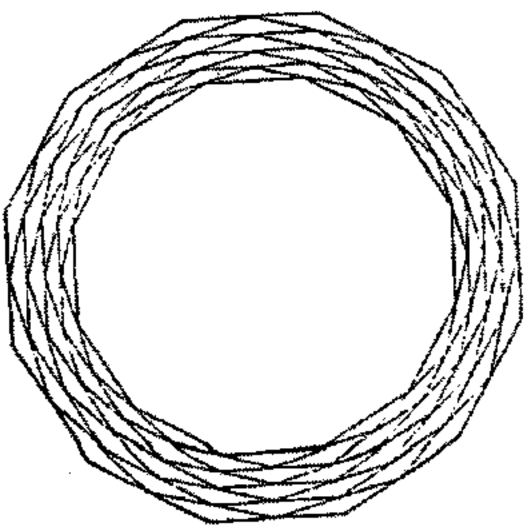
$$\frac{1}{9} \searrow \frac{8}{9} \nearrow \frac{8}{9^2} \searrow \frac{8^2}{9^2} \nearrow \frac{8^2}{9^3} \searrow \frac{8^3}{9^3} \nearrow \frac{8^3}{9^4} \searrow$$

fig. 16

$$\frac{8}{9}, \left(\frac{8}{9}\right)^2, \left(\frac{8}{9}\right)^3, \left(\frac{8}{9}\right)^4, \left(\frac{8}{9}\right)^5, \ldots$$

plus compliquée pour les dodécagones emboîtés (cfr. fig. 17).

fig. 17



Dans ce dernier cas, en effet, il faut non seulement reconnaître la similitude des dodécagones successifs, mais encore calculer le rapport de similitude, égal au rapport de l'apothème d'un dodécagone au rayon de son cercle circonscrit.

Fait remarquable, on peut identifier le mode d'engendrement des dodécagones en évitant de *calculer* le rapport de similitude. Il suffit de constater l'*existence* d'un rapport de similitude : "le passage d'un dodécagone au suivant est toujours pareil", quel que soit le couple de dodécagones successifs que l'on considère. Le rapport des aires sera donc toujours le même, et même si on ne le connaît pas, on peut le désigner par a, reconnaître que $0<a<1$, et raisonner sur la suite a, a^2, a^3,... On saute ainsi du géométrique au littéral, sans passer par l'intermédiaire du numérique.

Cette manœuvre est fondée sur un *effet d'échelle* : d'un couple de dodécagones successifs à un autre, il n'y a que l'échelle du dessin qui diffère.

3.2. Passer d'une facette à une autre plus suggestive

La loi d'engendrement de la suite de la fig. 4 est très simple. Néanmoins, en travaillant cette suite intelligemment, on peut la voir sous d'autres points de vue intéressants. Il ne faut pas se précipiter sur la calculatrice, ce qui a pour seul effet d'en fournir une version décimalisée qui n'a rien d'éclairant. Mieux vaut au contraire, en respectant sa présentation fractionnaire, simplement réduire au même dénominateur (fig. 5), ce qui amène à conjecturer la forme du terme général :

$$a_n = \frac{1/2(3^n - 1)}{3^n}.$$

On peut généraliser cette observation : si une suite se présente sous une forme intéressante, présentant quelque régularité ou symétrie, il faut la transformer prudemment, en tâchant de respecter ou de mettre en valeur sa forme. La calculatrice est contre-indiquée dans l'exemple que nous venons de voir, car elle brise les formes.

3.3. Le point de vue additif

Même dans le cas de suites géométriques, il arrive que la loi d'engendrement se présente naturellement sous une forme additive et non sous une forme multiplicative : pour passer d'un terme au suivant, *on ajoute* telle valeur. C'est le cas, par exemple, des problèmes d'intérêt composé : le capital initial est majoré par *accumulation* des intérêts. La suite des capitaux successifs se calcule en alternance avec la suite des intérêts : une fois calculé l'intérêt pour une année, on l'ajoute au capital, ce qui fournit la base de calcul pour l'intérêt de l'année suivante et ainsi de suite.

fig. 18 a **1 franc à intérêt composé de 5 %**

intérêts	***capitaux***
0,05	**1 + 0,05**
(1 + 0,05) 0,05	**1 + 0,05 + (1 + 0,05) 0,05**
[1 + 0,05 + (1 + 0,05)0,05]0,05	**1 + 0,05 + (1 + 0,05)0,05 + [1 + 0,05 + (1 + 0,05)0,05]0,05**

La loi d'engendrement s'éclaire dès qu'on concentre son attention sur la seule suite de capitaux : pour y arriver, il faut donc passer du point de vue additif au point de vue multiplicatif, et donc, s'aviser que majorer un capital de i % revient à le multiplier par $(1 + \frac{i}{100})$.

fig. 18 b

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1{,}05 \\ (1{,}05)^2 \\ (1{,}05)^3 \\ (1{,}05)^4 \\ (1{,}05)^5 \\ \ldots\ldots \end{array}$$

3.4. Caractérisation des suites géométriques

Tout ce qui vient d'être exposé montre la variété des points de vue possibles sur le mode de fonctionnement d'une suite. Illustrons à nouveau cette variété en rassemblant quelques définitions usuelles de suites géométriques. On dira en parlant d'une telle suite (1) que :

a) le quotient de deux termes successifs est constant ;

b) chaque terme, à partir du deuxième, est moyenne proportionnelle entre le précédent et le suivant ;

c) on obtient chaque terme, à partir du deuxième, en multipliant le précédent par un nombre donné, toujours le même ;

d) c'est une suite (a_n) telle que pour tout n

$$a_{n+1} = r a_n \qquad \text{où } r \in \mathbf{R} ;$$

e) c'est une suite du type :

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots \quad \text{où } a \text{ et } r \text{ sont réels.}$$

S'il s'agit d'une suite positive, on peut encore en parler dans les termes suivants :

f) chaque terme, à partir du deuxième, représente un pourcentage donné, toujours le même, du précédent ;

(1) Il s'agit de suites non identiquement nulles.

g) pour passer d'un terme au suivant, il faut chaque fois ajouter (ou retirer selon le cas) un même pourcentage ;

h) les termes de la suite peuvent être représentés comme des longueurs (ou des aires) de figures semblables, le rapport de similitude d'une figure à la suivante étant toujours le même.

Voilà donc huit façons d'aborder une suite géométrique. Un mathématicien les déclarera volontiers équivalentes ou à peu près. Elles ne le sont pas immédiatement pour un élève et celui qui sera passé par la reconnaissance d'une structure unique derrière ces formes différentes s'en trouvera plus fort.

3.5. Ajuster une suite comme modèle mathématique

Dans certains cas, le problème n'est pas de débrouiller le mode d'engendrement d'une suite donnée, mais plutôt de créer et d'ajuster une suite mathématique de sorte qu'elle traduise au mieux une suite empirique donnée. Ce travail est d'un autre ordre.

C'est ainsi que pour construire une suite appropriée au tableau de la fig. 18a de l'effectif de la population mondiale, il faut d'abord extraire de ce tableau des années de recensement régulièrement espacées, puis reconnaître un comportement approximatif, pour finalement sélectionner et ajuster un modèle qui ne trahisse pas trop les données.

Par exemple, la suite ainsi sélectionnée coïncide, pour le premier terme, et est supérieure, pour les termes suivants, à une suite géométrique de premier terme 750 et de raison 1,28.

fig. 19 a

Année	Effectif en millions d'habitants
1650	500
1750	750
1800	960
1850	1.240
1900	1.650
1930	2.070
1950	2.524
1960	3.037
1970	3.695

fig. 19b

Année	Effectif	Quotient de deux effectifs successifs
1750	750	
1800	960	1,28
1850	1.240	1,29
1900	1.650	1,33
1950	2.524	1,53

4. Où va la suite ?

Nous nous sommes demandé ce qui provoque l'apparition d'une suite ou ce qui donne envie d'en construire une. Puis, nous avons étudié comment on approfondit le mode d'engendrement d'une suite. Et maintenant vient la question : où va la suite ? Que se passe-t-il quand on essaye de la pousser loin, très loin ? Peut-on aller aussi loin qu'on veut ? Peut-on discerner où va une suite prolongée indéfiniment ? De quelles illusions peut-on être victime quand on regarde ainsi une suite s'en aller vers l'infini ?

4.1. Presques toutes les suites finissent par s'enrayer

Une suite peut être poussée plus ou moins loin selon la nature de son support. Diverses contraintes physiques empêchent le plus souvent de répéter un processus infini plus de dix ou vingt fois : on sort de la feuille, l'épaisseur du trait de crayon devient gênante, la balle cesse de rebondir, ... Au-delà de ces limites, la seule ressource est d'imaginer et de raisonner, ou peut être, dans un premier temps, de passer à la facette numérique de la suite.

Une suite numérique, en effet, peut souvent être poursuivie beaucoup plus loin grâce aux calculatrices. Mais cela ne fait que postposer les difficultés.

Ainsi, si la suite étudiée varie très lentement, on ne voit pas où elle va, même en calculant très longtemps. Par exemple, si une suite géométrique de raison inférieure à 1 mais très proche de 1 n'a pas été identifiée comme suite géométrique et qu'on en considère seulement les valeurs numériques décimales (approchées), on verra bien qu'elle descend, descend,... mais jusqu'où ?

Dans la plupart des cas cependant, la machine finit par s'enrayer d'une manière ou d'une autre : soit elle donne l'alarme en dépassant sa capacité vers les petits ou les grands nombres (elle clignote !), soit elle répète indéfiniment le même nombre. Ce dernier, si la suite converge, peut être la limite (indûment atteinte le cas échéant), ou est proche de la limite. Comportement erroné le plus souvent, mais néanmoins utile quand il amène à conjecturer la limite.

Ainsi, les suites physiques s'enrayent, les suites numériques vont plus loin mais s'enrayent aussi. Qu'y a-t-il donc par delà ces irrémédiables blocages, dans l'immense domaine au delà de l'expérience, là où l'imagination demeure seule à nourrir l'activité théorisante ? Tout un monde, comme nous allons le voir.

4.2. On découvre simultanément plusieurs sortes d'infini

On pourrait croire, en abordant les suites ou processus infinis, que la seule sorte d'infini rencontrée au départ est celle du nombre de termes que chaque suite comprend (le cardinal des entiers). Et la difficulté serait là pour le débutant. Or les choses sont plus compliquées que cela car une suite infinie engendre nécessairement plusieurs autres sortes d'infini.

Considérons en effet une suite réelle :

a) ou bien elle est non bornée, c'est-à-dire qu'elle contient des termes aussi grands qu'on veut. On y trouvera *"l'infiniment grand"* ;

b) ou bien elle est convergente (2) et la différence de ses termes à la limite (et aussi la différence de ses termes successifs) devient aussi petite qu'on veut, et c'est *"l'infiniment petit"*.

En outre, on bute sur le *temps physique infini*, non borné, qui serait nécessaire pour parcourir les termes de la suite : même si celle-ci est dénombrable, elle n'est pas explicitement énumérable. Certes l'imagination dépasse les difficultés physiques et calculatoires, mais elle se trouve elle-même embarrassée parce qu'elle s'exerce dans le temps physique : elle ne peut s'arrêter à chaque terme d'une suite.

En résumé, le domaine des suites est structuré de telle façon qu'il manifeste en même temps et nécessairement trois sortes d'infinis : l'infini cardinal de l'ensemble des termes de la suite, l'infiniment grand ou l'infiniment petit numérique et l'infini temporel de l'énumération jamais achevée.

En quoi cette pluralité influe-t-elle sur la perception des suites ? Tout se passe, semble-t-il, comme si les diverses sortes d'infinis formaient, dans la première appréhension de l'infini, un tout mal différencié, en quelque sorte embryonnaire. D'où divers glissements d'un infini à l'autre.

4.3. Les situations cinématiques

Quel que soit le support physique ou numérique d'une suite infinie, le temps est mêlé à sa perception sous la forme, comme nous l'avons vu, du temps physique de l'énumération impossible. C'est le *temps subjectif* du sujet pensant, celui dans lequel s'exerce son imagination.

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque la suite envisagée, issue d'une situation cinématique, se double d'une suite de durées, c'est-à-dire s'inscrit dans le *temps objectif* d'une évolution physique. C'est le cas pour la balle qui rebondit (cf. fig. 8). Dans cet exemple, nous avons appelé les temps subjectif et objectif respectivement temps du discours et temps du parcours.

Le fait que ces deux temps soient des grandeurs de même nature semble faciliter les glissements mentaux de l'un à l'autre comme : "si la balle rebondit une infinité de fois, elle ne s'arrête jamais de rebondir".

4.4. Les rôles pivots de 2 et 1/2

Le nombre 2 joue souvent un rôle pivot dans la perception des suites numériques croissantes. En effet, on convient facilement qu'une suite

---

(2) Et si par hasard, elle est bornée et non convergente, elle contient une sous-suite convergente et l'infiniment petit y intervient de même.

positive tend vers l'infini si chaque terme a_{n+1} vaut au moins le double de a_n. Mais il se fait que doubler (au moins) à chaque étape, c'est aussi ajouter chaque fois au moins la valeur du premier terme de la suite. Cette dernière est donc minorée par une suite arithmétique croissante, c'est-à-dire par une suite très simple tendant vers l'infini.

La valeur 1/2 joue pour les suites décroissantes un rôle dual de la valeur 2 pour les suites croissantes. En effet, on convient facilement qu'une suite tend vers zéro si, pour passer de a_n à a_{n+1}, on enlève au moins la moitié de a_n.

Remarquons que si 2 et 1/2 sont des valeurs particulières du point de vue de la perception première du comportement d'une suite géométrique, il n'en est pas de même du point de vue théorique : pour $0 < a < 1$, on démontre que a^n tend vers 0 sans évoquer la valeur $a = \frac{1}{2}$ et de même pour $a > 1$, on démontre que a^n tend vers l'infini sans évoquer le cas particulier où $a = 2$.

5. Plusieurs suites apparaissent en même temps

On pourrait croire que des problèmes dans lesquels intervient une suite seulement peuvent se résoudre à l'aide de cette suite seule, éventuellement envisagée sous différentes facettes (cf. 1). Nous allons voir, et cela dans divers contextes, qu'une suite apparait rarement seule mais en amène avec elle une ou plusieurs autres. Quand on observe par exemple une suite numérique, on observe aussi, implicitement au moins, les quantités "ajoutées" pour passer d'un terme au suivant, c'est-à-dire la suite des différences.

Nous allons examiner maintenant l'apparition de plusieurs suites et les effets de structure qui en résultent. Cet élargissement du contexte, le fait d'avoir devant les yeux non plus une suite mais plusieurs liées entre elles provoque un regard nouveau sur le problème et amène parfois la solution.

5.1. Les figures "bien emboîtées"

Considérons par exemple les représentations des quatre suites monotones suivantes : les carrés emboîtés (fig. 20), les polygones emboîtés (fig. 21), la série $\Sigma \frac{1}{2^n}$ (fig. 22) et la série $\Sigma \frac{1}{3^n}$ (fig. 23).

fig. 20

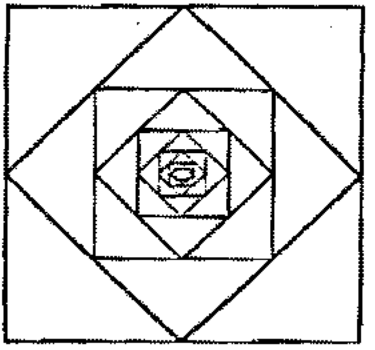


fig. 21

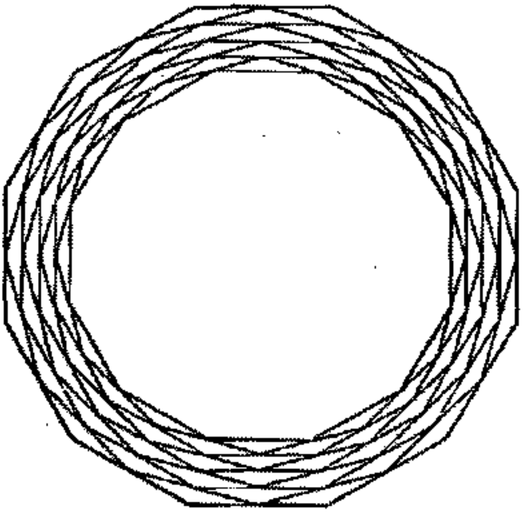


fig. 22

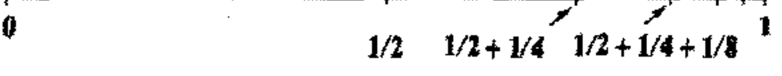
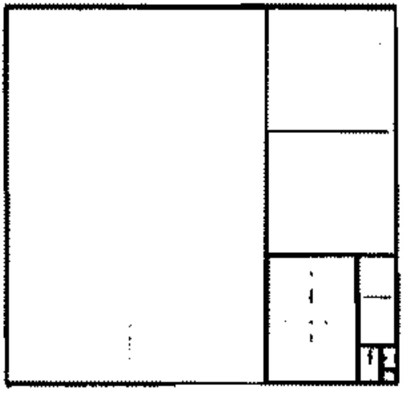


fig. 23



Dans chacune de ces représentations, on peut voir une suite décroissant vers zéro, une suite de différences entre deux termes successifs et la série de ces différences. En effet, aux fig. 20 et 21, les figures s'emboîtent indéfiniment vers l'intérieur, donnent des différences (les triangles) qui se juxtaposent pour reconstituer en une sorte de puzzle la figure initiale ; à la fig. 22, les figures (les segments $[0, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}]$) s'emboîtent indéfiniment vers l'extérieur, donnent des intervalles de différences jointifs qui reconstituent le segment [0,1] donné cette fois non pas par la figure initiale mais comme point de repère ; la situation décrite à la figure 23 est encore du même type : les figures se juxtaposent les unes aux autres et tendent ainsi à reconstituer le carré de départ.

Il y a une sorte d'instabilité de la perception de ces figures. Premièrement, en regardant par exemple la fig. 20, on apercevra selon le cas la suite des triangles, celle des carrés ou encore la série des triangles. Deuxièmement, si l'on considère la fig. 21, on peut avoir deux perceptions bien différentes. Ou bien on observe que les aires des polygones décroissent très lentement, ce qui amène plutôt à douter de la convergence vers zéro ; ou bien on observe que les aires enlevées à chaque étape sont presque égales, d'où l'idée que les aires des polygones s'approchent de zéro à un rythme constant. Numériquement, ces deux points de vue reviennent à considérer d'une part la suite géométrique.

$$a, a^2, a^3, a^4, \ldots$$

des aires des polygones et d'autre part la suite géométrique elle aussi et de même raison

$$a - a^2, a^2 - a^3, a^3 - a^4, a^4 - a^5, \ldots$$

des aires enlevées à chaque étape.

Nous avons illustré ci-dessus ce que nous entendions par figures bien emboîtées. Chacune de ces figures faisait naître trois suites. Terminons en montrant quelques figures qui ne sont pas de ce type.

fig. 24

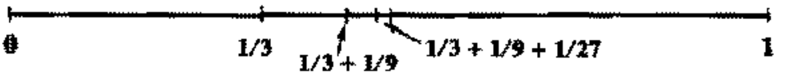


fig. 25

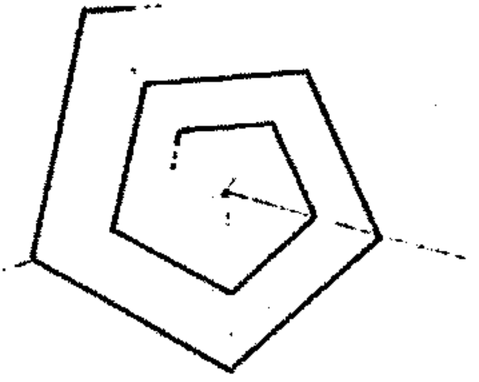
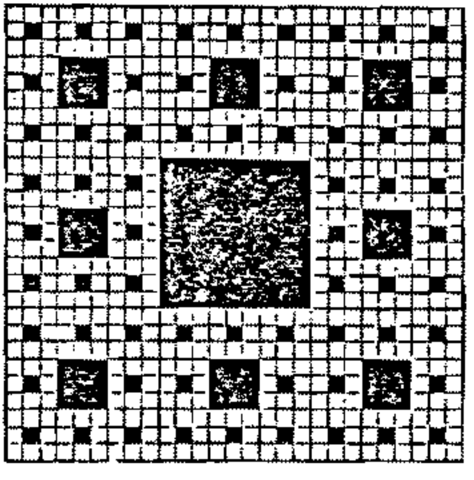


fig. 26



Dans chacun de ces trois contre exemples, on ne voit pas où va la suite.

5.2. Les figures symétriques : une suite ou une série se dédouble comme dans un miroir.

Considérons le problème que voici :

fig. 27 **Deux locomotives avancent l'une vers l'autre sur une voie rectiligne. Elles roulent chacune à 50 km/h et sont éloignées de 100 km à l'instant initial. Une mouche qui vole à 100 km/h part de la première locomotive et vole vers la seconde. Dès qu'elle est arrivée, elle repart en sens inverse vers la seconde et ainsi de suite.**

et intéressons-nous à la série des abscisses de la mouche. Il s'agit de la série

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \ldots$$

dont on ne voit pas directement comment elle se comporte à l'infini. Par contre, si nous la remplaçons dans son contexte, nous faisons apparaître deux séries symétriques (celle des abscisses des deux locomotives) qui encadrent la série des abscisses de la mouche.

fig. 28

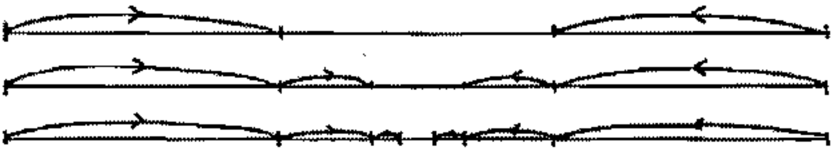
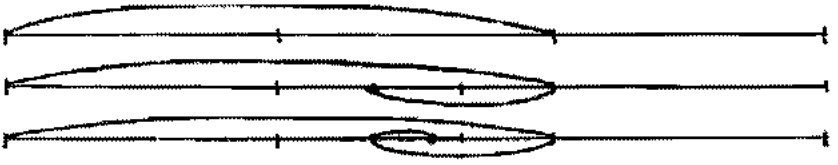


fig. 29



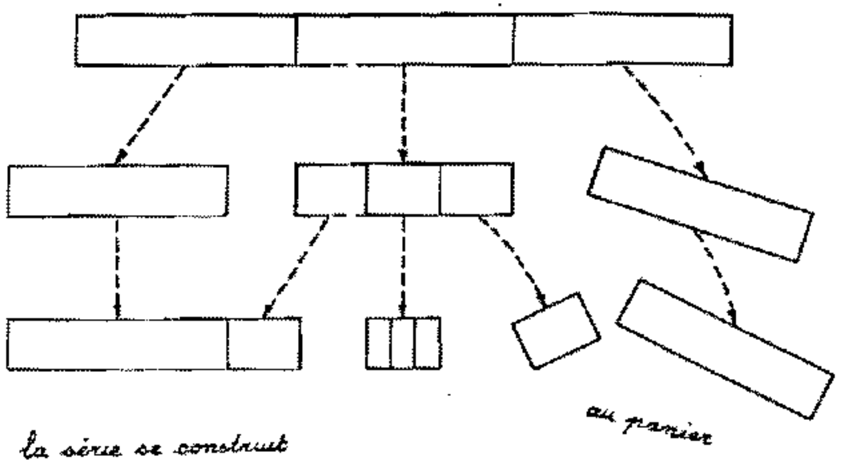
Il va de soi (voir l'énoncé) que les séries des abscisses des locomotives sont convergentes vers 1/2. Et dès lors, on en déduit aussi la convergence vers 1/2 de la série des abscisses de la mouche. Le fait d'avoir mis une série en relation avec d'autres provoque un éclairage nouveau sur cette série et fournit ici sa limite.

C'est la même situation qui se présente à propos de la série

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

Il y a une différence énorme entre, d'une part, considérer cette série en tant que telle (cf. fig. 25) et, d'autre part, la considérer en la construisant dans une bande de papier comme indiqué à la fig. 30.

fig. 30 **On construit une image de la série $\Sigma \frac{1}{3^n}$ en alignant des bandes de papier de longueur appropriée. Pour cela, prendre une bande de papier de longueur 1 ; couper cette bande en trois parties égales que nous appellerons partie de gauche, partie centrale et partie de droite ; ranger la partie de gauche : elle correspondra au premier terme de la série, jeter la partie de droite au panier et couper la partie centrale en trois parties égales (chacune ayant la longueur $\frac{1}{9}$) ; et ainsi de suite.**



Dans le premier cas, seule la série est présente et on n'y voit pas très clair. Dans le second cas, la série étudiée se dédouble et apparaît dans l'équation

$$S_n + \frac{1}{3^n} + S_n = 1$$

de laquelle on déduit sa limite.

5.3. Une même suite ou série réapparaît, transformée par un changement d'échelle, linéaire ou non

Nous venons de voir (en 5.1 et 5.2) deux types de situations pour lesquelles le fait de placer une suite ou une série dans un contexte modifie toute la perspective. Il s'agissait de figures "bien emboîtées" sur lesquelles la limite est inscrite ou de figures dont la symétrie permet de déduire la limite.

Nous allons voir maintenant une situation que le contexte enrichit par le truchement d'un changement d'échelle. Considérons la série

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^n + \ldots \text{ où } 0 < \alpha < 1$$

représentée à la fig. 32(a). L'élève parce qu'il ne connaît pas encore la théorie des suites géométriques, est amenée à construire un contexte autour de la série qu'il étudie et à l'étoffer jusqu'au moment où apparaissent des relations intéressantes.

fig. 31 **Donnons-nous un segment de base de longueur 1 et construisons, comme en (b), les termes α, α^2, α^3,... La figure obtenue fait surgir la suite**

$(1 - \alpha, \alpha - \alpha^2, \alpha^2 - \alpha^3, \ldots)$ représentée en (c) et la série

$(1 - \alpha) + (\alpha - \alpha^2) + (\alpha^2 - \alpha^3) + \ldots$ représentée en (d).

Si l'on sait déjà qu'une suite telle que (b) tend vers zéro, on voit alors que la série (d) tend vers 1. Mais cette série (d) peut se réécrire sous la forme

$$(1 - \alpha) + (1 - \alpha)\,\alpha + (1 - \alpha)\,\alpha^2 + \ldots$$

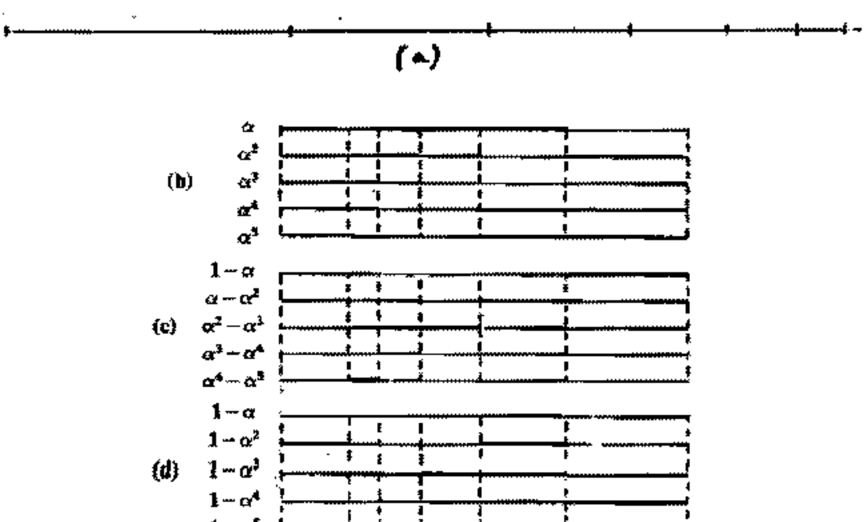
Elle est, comme la série (a), géométrique de raison α. Ainsi les séries (a) et (d) sont proportionnelles. On a

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots = \frac{\alpha}{1-\alpha}\ [(1-\alpha) + (1-\alpha)\,\alpha + (1-\alpha)\,\alpha^2 + \ldots]$$

Puisque la série entre crochets tend vers 1, on a

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

fig. 32



Dans le problème que nous avons pris ici pour exemple, la relation s'établit quand on voit réapparaître, transformée par un changement d'échelle, la série qu'on étudiait.

D'autres problèmes se résolvent par le biais d'une déformation plus profonde qu'un simple changement d'échelle linéaire. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on démontre qu'une suite géométrique a^n de raison positive et inférieure à 1 tend vers zéro : en général, on se ramène à l'étude de la suite $(\frac{1}{a^n})$, géométrique mais de raison supérieure à 1.

5.4. Une suite ou une série se compare à une autre mieux connue ou plus facile.

Dans les deux sections précédentes, l'élargissement du contexte menait finalement à une égalité qui fournissait la solution. Dans l'exemple qui suit, l'élargissement du contexte débouche sur une inégalité : pour obtenir des informations sur une suite, on la compare comme on peut à une autre mieux connue.

Ainsi, il est naturel de comparer la suite des capitaux placés à intérêts composés à la suite correspondante des capitaux placés à intérêts simples.

Il est remarquable que cet exemple soit aussi un modèle d'une démonstration théorique : on montre que

$$\alpha^n \to +\infty \qquad \text{si } \alpha > 1$$

en explicitant α sous la forme

$$\alpha = 1 + \epsilon \qquad \text{où } \epsilon > 0$$

et en minorant α^n par

$$1 + n\,\epsilon.$$

6. Des classes infinies de suites

A divers moments de son travail dans la suite des problèmes que nous lui proposons, l'élève est amené à structurer ses connaissances. Au début, chaque problème est résolu pour lui-même ; plus tard, l'ensemble des problèmes déjà traités constitue une toile de fond d'où se dégagent des questions plus générales ("est-ce toujours comme ça ?") ou des essais de classification. Nous en citons ci-après quatre exemples.

Un premier exemple part du problème des dodécagones emboîtés (cfr. fig. 21) et du jeu du défi qu'on peut en tirer. "Les aires des dodécagones semblent tendre vers zéro. Et si on considérait des 100-gones ? Et des million-gones ?..." Le problème initial concernait une suite géométrique donnée. Il débouche sur une classe infinie de problèmes analogues.

Un second exemple est celui d'une réorganisation mentale dans l'appréhension de l'ensemble des nombres. Beaucoup d'élèves sont familiarisés avec les nombres entiers, les nombres fractionnaires, les décimaux périodiques ou non. Mais ils perçoivent souvent mal les liens qui unissent ces nombres. Aussi, le moment où deux classes de nombres, si souvent perçues comme distinctes (les fractions et les décimaux illimités périodiques) se rejoignent par le biais de séries géométriques, est un moment fort.

Enfin, après avoir traité beaucoup de problèmes dans lesquels interviennent des suites géométriques, il arrive un moment où l'on a envie de les classer en fonction de leur comportement. Ainsi, les raisons 1 et -1, ainsi que le premier terme 0 se détachent comme points de repère dans la classification des suites géométriques. Ces points de référence fournissent les quatre comportements : tendre vers $+\infty$, vers $-\infty$, vers 0 ou diverger.

Tout comme les nombres 1, -1 et 0 ont servi de pivots pour classer les suites géométriques, les suites arithmétiques et les suites géométriques vont servir à classer des suites du point de vue de leur mode de croissance. Cette classification peut être amenée par la recherche d'un modèle pour la croissance de la population.