

les problèmes de l'a.p.m.e.p.

Il y a quinze ans déjà, Gérard LETAC, alors professeur à l'Université de Clermont, proposait au Bulletin d'ouvrir une "rubrique des problèmes" analogue à celle de divers périodiques étrangers destinés aux enseignants de mathématiques. Rapidement la rubrique prenait son essor et se constituait un public régulier de correspondants aimant chercher, pour leur seul plaisir intellectuel, la réponse à des questions non classiques. Ayant posé et résolu une trentaine de problèmes et quittant Clermont au bout de trois ans, Gérard Letac demandait à Charles AUQUE de reprendre le flambeau.

Pendant douze ans, celui-ci lui donna son plein développement publiant plus de soixante énoncés et à peu près autant de solutions, dégageant dans les nombreux apports de ses correspondants les éléments les plus originaux et fournissant lui-même de multiples et astucieuses participations. Ses obligations administratives actuelles ne lui permettent plus d'assurer avec toute la régularité souhaitable la publication de la rubrique mais le Bulletin et l'Association tiennent à lui exprimer leur gratitude et leur reconnaissance pour ces douze années de travail bénévole.

Pressés par les nombreux adhérents qui souhaitent trouver des mathématiques dans le Bulletin, nous avons demandé à Dominique ROUX, professeur au Lycée Simone Weil du Puy et participant fidèle à la rubrique, d'en prendre la responsabilité. Nous sommes sûrs qu'elle est en de bonnes mains et que l'ampleur du courrier qu'il recevra, redonnera bientôt à cette partie du Bulletin tout son rayonnement.

Pour faciliter le travail des historiens et des collectionneurs, nous donnons ci-dessous, la table de la rubrique depuis sa création. Si nous avons de nombreuses demandes, nous pourrions envisager de rassembler tous ces textes en une brochure.

P.L. HENNEQUIN

Table de la rubrique

Bulletins	Enoncés (et auteurs)	Solutions
	* Sous la responsabilité de Gérard LETAC	
274	1 (Letac), 2 (Letac)	
275-276	3 (Lecoq), 4 (Ehrhart), 5 (Laframboise)	
277	6 (Ehrhart), 7 (Laframboise), 8 (Soum)	1
278	9 (Jullien), 10 (Lecoq), 11 (Prudhomme)	
281	12 (Comtet), 13 (Ehrhart), 14 (Letac)	2, 3
283	15 (LeGrand), 16 (Lagrange), 17 (Comtet), 18 (Letac)	4, 5, 6, 7, 10 9, 11
284	19 (Jullien), 20 (Dupac), 21 (Gayheader)	
286	22 (Lagrange), 23 (Bourdeau), 24 (Vidiani), 25 (Blanchard)	12, 14, 15, 16, 18
287	26 (Mamel), 27 (Letac), 28 (Collombat)	17, 20, 21
288	29 (Collombat), 30 (Polvêche), 31 (Adler), 32 (IREM)	22, 23, 24, 25
	* Sous la responsabilité de Charles AUQUE	
295	33 (Hagendorf), 34 (Dubuc), 35 (Radoux)	28, 29, 30
296	36 (Ehrhart), 37 (LeGrand)	8, 13, 31, 32
297	38 (Blanchard), 39 (Anonyme), 40 (Auque)	33, 34, 35
298	41 (Ehrhart), 42 (Adler), 43 (Auque)	36, 37
300	44 (Blanchard), 45 (Adler)	38, 39, 40
301	46 (Riesz), 47 (LeGrand)	41, 42, 43
302	48 (Cuculière), 49 (Ehrhart), 50 (Peronny)	44, 45
304	51 (Leyrolle), 52 (Roux), 53 (Jullien)	46, 48, 50
306	54 (Cuculière), 55 (Warusfel), 56 (IREM)	47, 51, 52, 53
316	57 (Lemaire), 58 (Gautier), 59 (Gibert)	54, 55, 56
317	60 (Auque), 61 (Jullien)	49
318	62 (Ehrhart), 63 (Tissier)	57, 58, 59
319	64 (Ruffin), 65 (Leloustre), 66 (Fayolle)	19, 26
321	67 (Gautier), 68 (Lemaire), 69 (Fulgence)	61, 62
322	70 (IREM), 71 (Gagnaire), 72 (Lemaire)	60
324	73 (Hiriart-Urruty), 74 (Ehrhart), 75 (Royer) + ex 1 et ex 2	64, 66
325	76 (Cuculière), 77 (Lemaire) + ex 3 et ex 4	67, 68, 69
326	78 (Chone), 79 (Fraisie) + ex 5	70, 72 et ex 2
328	80 (Caby), 81 (Hiriart-Urruty) + ex 6 et ex 7	73, 74, 75
329	82 (Belgy), 83 (Auque) + ex 8	76 et ex 3, ex 5
330	84 (Notari), 85 (Fulgence) + ex 9	71 et ex 7
332	86 (Roux), 87 (Roux) + ex 10	80, 81
336	88 (Ehrhart), 89 (Nicolas)	78, 86 et ex 1, ex 9
337	90 (Vidiani), 91 (Auque) + ex 11 et ex 12	84, 85, et ex 4
338	Enoncés d'Olympiades donnés par Deschamps	82, 87
344	92 (Lemaire), 93 (Fulgence) + ex 13	89 et ex 6, ex 8, ex 11
	* Sous la responsabilité de Dominique ROUX	
348	94 (Adler), 95 (Engel), 96 (Roux)	ex 10, ex 12, 91
349	97 (Concours général), 98 (Carréga), 99 (Roux) 100 (Roux)	ex 13, 77, 79

Charles AUQUE avait été amené à diviser la rubrique des problèmes de l'A.P.M.E.P. en deux parties : l'une consacrée aux problèmes inédits, l'autre à des problèmes déjà publiés tels que ceux des Olympiades mathématiques. Pour s'assurer du caractère inédit d'un problème il faudrait connaître tous les énoncés qui ont été publiés tant dans les revues françaises et étrangères que dans les très nombreux ouvrages déjà existants. Un tel contrôle est hors de mes possibilités.

En conséquence, je préfère ne plus conserver la division en deux parties mais au contraire redonner à la rubrique son unité, en proposant des problèmes jugés intéressants ou qui auront plu à des collègues ; problèmes choisis pour leur caractère esthétique ou astucieux, voire récréatif, et dont la résolution nécessite des initiatives, une démarche inventive, une recherche demandant un effort intellectuel. Cela n'exclut donc pas les énoncés rencontrés aux Olympiades ou au CAPES...., et encore moins ceux qui auraient la chance d'être réellement originaux. Il faudra éviter, bien sûr, des questions aisément accessibles dans la littérature courante, et chaque fois que possible préciser la provenance.

Priorité sera donnée aux énoncés composés par des collègues, et au dialogue entre ces derniers par l'intermédiaire des réponses et des solutions. Cette rubrique est pour tous ceux qui aiment inventer ou chercher de "beaux problèmes", ... parfois trouver des solutions, et pour que chacun puisse donner libre cours à son imagination créatrice.

Les énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.):

M. Dominique ROUX
5, avenue Pierre et Marie CURIE
CHADRAC 43000 LE PUY

Bulletin de l'APMEP n°348 - 1985

*les problèmes
de l'a.p.m.e.p.*

ENONCÉS

Enoncé n° 94 (A. ADLER, Paris)

Soit n un entier. Quel est le nombre des suites de n entiers dont chaque terme est égal au nombre de ceux qui le précèdent et qui lui sont strictement inférieurs ? (exemples : 012145 ou 002342).

Enoncé n° 95 (ENGEL, R.F.A.)

Soient a, b, c trois entiers premiers entre eux deux à deux. Quel est le plus grand entier qui ne peut pas s'écrire sous la forme $bcx + cay + abz$ où x, y, z sont trois entiers ? (Cet énoncé provient des olympiades internationales de mathématiques de juillet 1983).

Enoncé n° 96 (D. ROUX, Le Puy)

Combien existe-t-il d'entiers n pour lesquels n^3 est égal à une somme de plusieurs carrés d'entiers consécutifs ?

N.B. : Dans ces énoncés le mot "entiers" désigne les entiers naturels, éléments de \mathbb{N} .

Remarque 1 : Certains lecteurs trouveront peut-être qu'il est beaucoup question de nombres entiers dans ces énoncés, qu'ils se rassurent, les amateurs de géométrie seront servis dans la prochaine rubrique.

Remarque 2 : Il est encore temps d'envoyer des solutions pour les énoncés n° 63, 65, 90, 93.

SOLUTIONS

Exercice n° 10.

Démontrer que l'inégalité

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \geq 0$$

est toujours vraie pour $n = 3$ et $n = 5$, mais peut être fausse pour les autres valeurs de n . (n est un entier strictement plus grand que 2 et les a_k des réels).

Cet exercice a été posé à des élèves de première le 20 mai 1981 à l'occasion du deuxième Rallye Mathématique d'Auvergne. Voici une solution rencontrée :

Désignons par $E_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ l'expression proposée. L'expression ne change pas de valeur si on échange deux lettres, et plus généralement reste invariante dans toute permutation des lettres a_1, a_2, \dots, a_n . On peut donc supposer $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.

1° cas : $n = 3$. $E_3(a, b, c) = (a-b)(a-c) + (b-a)(b-c) + (c-a)(c-b) = (a-b)(a-c-b+c) + (c-a)(c-b) = (a-b)^2 + (c-a)(c-b) \geq 0$ car $(c-a)(c-b) \geq 0$ puisque $a \geq b \geq c$.

2° cas : $n = 5$. $E_5(a, b, c, d, e) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ où :

$$A_1 = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)$$

$$A_2 = (b-a)(b-c)(b-d)(b-e)$$

$$A_3 = (c-a)(c-b)(c-d)(c-e)$$

$$A_4 = (d-a)(d-b)(d-c)(d-e)$$

$$A_5 = (e-a)(e-b)(e-c)(e-d)$$

$$A_5 \geq 0 \text{ car } a \geq b \geq c \geq d \geq e.$$

$$A_1 + A_2 = (a-b) [(a-c)(a-d)(a-e) - (b-c)(b-d)(b-e)] \geq 0$$

$$\text{car } \begin{cases} a-c \geq b-c \geq 0 \\ a-d \geq b-d \geq 0 \\ a-e \geq b-e \geq 0 \end{cases}$$

$$A_4 + A_5 = (d-e) [(a-e)(b-e)(c-e) - (a-d)(b-d)(c-d)] \geq 0$$

$$\text{car } \begin{cases} a-e \geq a-d \geq 0 \\ b-e \geq b-d \geq 0 \\ c-e \geq c-d \geq 0 \end{cases}$$

donc $E_5(a, b, c, d, e) \geq 0$

3° cas : n pair, $n > 2$ $E_n(-1, 0, 0, \dots, 0) = (-1)^{n-1} < 0$: l'inégalité n'est pas vérifiée.

4° cas : $n \geq 6$ $E_n(2, 2, 2, 1, 0, 0, \dots, 0) = -1 < 0$ si il y a au moins deux 0 (c'est-à-dire si $n \geq 6$).

Autre solution : J. LEMAIRE (Lille).

Exercice n° 12 (classique ainsi que ses variantes au CAPES)

Démontrer que si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, on a : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Solution (R. CUCULIÈRE, Paris)

Les longueurs a, b, c vérifient $0 < a < b+c$, $0 < b < c+a$, $0 < c < a+b$.

On sait que $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (car $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$). En conséquence : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$. Il reste donc à prouver que si $Q = \frac{8(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)}{8abc}$ alors $Q \leq 1$. Posons

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (demi-périmètre), il vient : $Q = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

Utilisons la formule de Héron : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ ainsi que $S = pr$ et $abc = 4RS$ où r et R désignent respectivement les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle. On en déduit :

$$Q = \frac{8S^2}{4pRS} = \frac{2S}{pR} = \frac{2pr}{pR} = \frac{2r}{R}$$

Or si I et O sont les centres des cercles inscrit et circonscrit, la relation d'EULER : $OI^2 = R(R-2r)$ prouve que $R \geq 2r$. Donc $Q \leq 1$ *cafd*.

Autres solutions : J. LEMAIRE (Lille), MANAC'H (Lorient), et M. VIDIANI (Dijon) qui propose trois solutions et fait également remarquer qu'il y a égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

Énoncé n° 91 (AUQUE, Clermont-Ferrand).

Que peut-on dire d'un nombre de 9 chiffres (dans le système décimal) tel que la somme des chiffres soit 45 et le produit des chiffres soit 362880 ?

Solution

Première méthode : "à la main". Voici comment procède

J. LEMAIRE de Lille : Puisque $45 = \sum_{i=1}^9 i$ et que $362880 = 9! = \prod_{i=1}^9 i$,

les nombres dont l'écriture, dans le système décimal, se compose des neuf chiffres, de 1 à 9, sont solutions. Toute la question est de voir s'il en existe d'autres.

$362880 = 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7$. L'écriture d'un nombre, de neuf chiffres, dont le produit des chiffres est 362880 doit donc comporter un 5 et un 7, et les sept autres chiffres ne peuvent avoir comme diviseurs premiers que 2 ou 3.

Raisonnons à partir des facteurs divisibles par 3.

1) Si dans l'écriture d'un nombre solution, il existe deux 9, il reste à déterminer cinq chiffres, puissances de 2, de somme 15 et de produit 2^7 .

15 peut se décomposer en :

$8+4+1+1+1$, $8+2+2+2+1$, $4+4+4+2+1$,
sommes dont les termes ont pour produits respectifs 2^5 , 2^6 , 2^7 . On constate que satisfait aux conditions du problème tout nombre dont l'écriture décimale se compose des neuf chiffres 1,2,4,4,4,5,7,9,9.

2) S'il existe un seul 9 et deux 6, il reste à déterminer quatre chiffres, puissances de 2, de somme 12 et de produit 2^5 .

$12 = 8+2+1+1 = 4+4+2+2$: sommes dont les termes ont pour produits 2^4 et 2^6 . Ce qui ne convient pas.

3) S'il existe un 9, un 6 et un 3, les quatre chiffres restants ont maintenant pour somme 15 et produit 2^6 .

La seule décomposition possible de 15 en somme de quatre puissances de 2 ($15 = 8+4+2+1$) conduit effectivement au produit 2^6 . On reconnaît les solutions formées par les entiers dont l'écriture utilise les neuf chiffres 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

4) S'il existe un 9 et deux 3, il reste à déterminer quatre chiffres de somme 18 et de produit 2^7 .

Or les seules décompositions possibles,

$18 = 8+8+1+1$ et $18 = 8+4+4+2$,
donnent respectivement les produits 2^6 et 2^9 et ne fournissent donc pas de solution.

5) S'il existe quatre 6, les trois chiffres restant à déterminer ont pour somme $S = 9$ et produit $P = 2^3$.

$$9 = 4+4+1, \text{ mais } 4 \times 4 \times 1 = 2^4.$$

6) S'il existe trois 6 et un 3, on a $S = 12$ et $P = 2^4$. Or $12 = 8+2+2$ et $12 = 4+4+4$ correspondent aux produits 2^5 et 2^6 .

7) S'il existe deux 6 et deux 3, il vient $S = 15$ et $P = 2^5$. Mais 15 ne peut être somme de trois puissances de 2.

8) S'il existe un 6 et trois 3, $S = 18$ et $P = 2^6$.

$$18 = 8+8+2, \text{ mais } 8 \times 8 \times 2 = 2^7.$$

9) Enfin, s'il existe quatre 3, $S = 21$ et $P = 2^7$. Mais 21 ne peut être écrit comme somme de trois puissances de 2.

Finalement, les nombres solutions sont ceux dont les neuf chiffres de l'écriture décimale sont, à l'ordre près, soit 1,2,3,4,5,6,7,8,9 soit 1,2,4,4,4,5,7,9,9.

Deuxième méthode: à l'aide d'un ordinateur.

M. MANACH de Lorient a écrit pour le ZX 81 le programme BASIC ci-dessous. Ce programme fait former, dans l'ordre croissant toutes les combinaisons avec répétitions des 9 éléments de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (il y en a $C_{17}^9 = 24310$), éliminer celles dont la somme n'est pas 45, puis celles dont le produit ne donne pas 362880, et fait imprimer les solutions: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 et 1,2,4,4,4,5,7,9,9.

```

5 LET C = 0
10 FOR I = 1 TO 9
20 FOR J = I TO 9
30 FOR K = J TO 9
40 FOR L = K TO 9
50 FOR M = L TO 9
60 FOR N = M TO 9
70 FOR O = N TO 9
80 FOR P = O TO 9
90 FOR Q = P TO 9
100 LET S = I+J+K+L+M+N+O+P+Q
110 IF S < > 45 THEN GOTO 200
120 LET P = I*J*K*L*M*N*O*P*Q
130 IF P < > 362 880 THEN GOTO 200
140 PRINT "N="; I; J; K; L; M; N; O; P; Q
200 LET C = C+1
210 NEXT Q
220 NEXT P
230 NEXT O
240 NEXT N
250 NEXT M
260 NEXT L
270 NEXT K
280 NEXT J
290 NEXT I
300 PRINT "TERMINE"
310 PRINT "NB. ESSAIS = "; C
320 STOP

```

Remarque 1: Le compteur C permet de vérifier si le nombre d'essais a été 24 310.

Remarque 2: Le temps de calcul sur le ZX 81 est de 20 minutes environ.

Compléments: Je me suis posé le problème un peu plus général suivant: *que peut-on dire de 9 entiers ayant même somme, et même produit que les entiers de 1 à 9?*

Soit : $\sum_{i=1}^9 x_i = \frac{9 \times 10}{2} = 45$ et $\prod_{i=1}^9 x_i = 9! = 362\,880$. J'ai

également réalisé, en L.S.E., un programme comportant 9 boucles emboîtées ; pour éliminer les répétitions par permutations, j'ai imposé $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_9$, et fait varier x_1 de 1 à 5 ; x_2 de x_1 à $\text{ENT}((45 - x_1):9)$; x_3 de x_2 à $\text{ENT}((45 - x_1 - x_2):8)$ etc..., x_9 de x_8 à $45 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8$.

En cinquante minutes cela a donné 12 solutions :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	6	6	6	7	10
1	2	4	4	4	5	7	9	9
1	3	3	3	4	6	7	8	10
1	3	3	4	4	4	7	9	10
1	3	3	4	4	5	6	7	12
2	2	2	3	4	6	7	9	10
2	2	2	3	5	6	6	7	12
2	2	3	3	3	5	7	8	12
2	2	3	3	4	5	6	6	14
2	3	3	3	3	4	5	8	14
2	3	3	3	4	4	4	7	15

Il résulte de ceci (en ôtant le 9) que le problème analogue dans le cas de 8 nombres n'admet que 4 solutions : la solution triviale $x_i = i$ et les

3 autres $\left\{ \begin{array}{l} 1 \ 2 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 7 \ 9 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 7 \ 10 \\ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 7 \ 10 \end{array} \right.$

et que pour au plus 7 entiers le problème analogue n'admet plus qu'une solution.

Ce qui démontre le résultat suivant :

Si 7 entiers ont même somme et même produit que 1,2,3,4,5,6,7 alors ce sont ceux là (à l'ordre près).

COURRIER DE LECTEURS

Madame S. CHRÉTIEN de Villemomble propose pour la rubrique l'énoncé suivant : "On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle \odot . Quelle est l'enveloppe de la droite de Simson d'un point M qui décrit le cercle \odot ?".

Suit une impeccable démonstration analytique prouvant qu'il s'agit d'une H_3 : hypocycloïde à 3 points de rebroussements, et de la remarque suivante : *Il est surprenant que partant d'un triangle quelconque, on aboutisse à une figure invariante par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. (En effet les 3 points de rebroussements sont sommets d'un triangle équilatéral).*

Le problème est trop classique pour être posé dans la rubrique, il a fait l'objet de nombreuses publications, par exemple voir *Hypocycloïdes et épicycloïdes* de J. LEMAIRE (éditions ALBERT BLANCHARD) 1967 livre II, chapitre III, et généralisation au chapitre IV. Mais la remarque est profonde, ce n'est pas un cas isolé, on peut citer au moins trois autres exemples conduisant à la même constatation :

1) Lorsqu'on construit extérieurement au triangle ABC des triangles équilatéraux ABC' , BCA' , CAB' , leurs centres sont les sommets d'un triangle équilatéral. Si on construit les triangles intérieurement cela donne de même un autre triangle équilatéral. Ce sont les deux "triangles de NAPOLEON", la différence de leurs aires est celle du triangle ABC).

Référence : redécouvrons la géométrie de COXETER (DUNOD) 1971 ; Chap. 3.

2) Les 27 points d'intersections des trisectrices associées d'un triangle se répartissent aux sommets de 27 triangles équilatéraux. (Théorème de MORLEY).

Référence : *Leçons sur les constructions géométriques* de Henri LEBESGUE, (GAUTHIER-VILLARS) 1950, deuxième partie, chapitre IV.

3) Les 3 cercles ayant pour diamètre les segments déterminés sur chaque côté du triangle ABC par les bissectrices de l'angle opposé s'appellent cercles d'APPOLONIUS. Ils se coupent en deux points I et I' sous des angles de 120° et sont orthogonaux au cercle circonscrit au triangle. Par suite toute inversion de pôle I ou I' transforme A,B,C, en les sommets d'un triangle équilatéral.

Référence : *La géométrie du triangle* par T. LALESCO (Annales roumaines de Mathématiques) 1952 chapitre 6.

Bref dans tous ces exemples il surgit une symétrie ternaire, alors qu'a priori on ne l'attendait pas.

Monsieur PRUD'HOMME de Lille, dans sa lettre du 1^{er} mai 1983 nous propose comme énoncé la conjecture suivante : " $2^n - 2$ n'est jamais divisible par n^2 ".

Empressons nous de lui répondre qu'il serait vain d'en chercher une démonstration, il y a des contre-exemples, rares et très recherchés lorsqu'ils sont pour n premier, en raison du théorème suivant dû à WIEFERICH (1909) sur le dernier théorème de FERMAT : Si p est un nombre premier impair tel que p^2 ne divise pas $2^p - 2$, $x^p + y^p = z^p$ n'a pas de solution entière avec $xyz \neq 0$.

En 1913 MEISSNER montra que $p = 1093$ vérifie : p^2 divise $2^p - 2$, puis en 1922 BEEGER trouva le suivant : $p = 3511$.

Les calculs faits par BRILLHART, TONASCIA et WEINBERGER (1971) montrent qu'il n'y a que ces deux nombres premiers vérifiant cette propriété parmi ceux qui sont inférieurs à 3×10^8 .

Référence : *13 lectures on Fermat's Last theorem* de RIBENBOIM (SPRINGER) 1979.