échanges

sur le problème des treize boules

par E. Ehrhart
Strasbourg

En 1952, Van der Waerden et Schütte ont démontré qu'on ne peut entourer une boule de 13 autres de sa taille qui la touchent*. Le problème était ouvert depuis Newton, mais naturellement on savait alors déjà qu'on peut le faire avec 12 boules.

Nous allons retrouver "naïvement" la solution "régulière" pour 12 boules, et montrer simplement l'existence d'une infinité d'autres solutions irrégulières. Le tout sans calcul.

Ensuite, nous donnerons une nouvelle démonstration de l'impossibilité d'un entourage convenable de 13 boules, démonstration plus courte et plus élémentaire que celle de Van der Waerden, qui a dix pages dans les Mathematische Annalen et s'appuie sur la théorie des graphes. Nous terminerons par un mot sur l'empilement aléatoire de sphères égales.

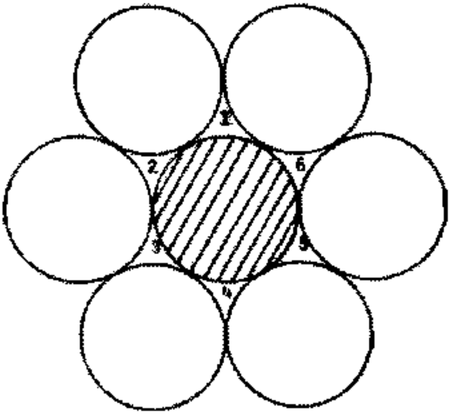
Dans la suite il sera sous-entendu que toutes les boules intervenantes ont même rayon r. Pour réaliser matériellement l'entourage régulier, on peut prendre des billes, que l'on maintient sur un support par une goutte de colle et par une ceinture de scotch.

---

* C'est le "*kissing problem*" des Anglais. Voir "*Comment ranger des balles de ping-pong*" par E. CHANEY dans l'Ouvert n° 36 (sept. 1984).

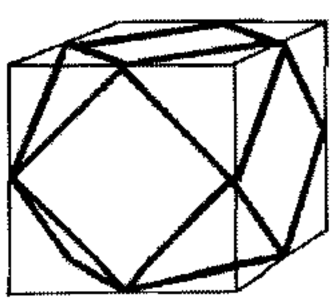
I. Entourage rigide

Posons sur un plan horizontal une boule O et six autres qui la touchent. On formera ainsi six trous 1, 2, 3, 4, 5, 6. Plaçons ensuite trois boules sur les trous 1, 3, 5. Chacune d'elles touche les deux autres, car on montre facilement que leurs centres forment un triangle équilatéral de côté 2r. Imaginons maintenant que l'on appuie sur les trous 4, 6, 2 un triplet de boules symétrique du précédent par rapport au centre de O. On aura bien alors 12 boules touchant la treizième.



Leurs centres sont les sommets d'un polyèdre semi-régulier, dont les faces sont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux et dont les 24 arêtes sont égales à 2r.

Ce polyèdre est donc le cube tronqué, dont la figure ci-dessous montre les arêtes apparentes. Ses sommets sont les milieux des arêtes du cube (C). C'est le fameux *cuboctaèdre d'Archimède*, familier aux cristallographes.



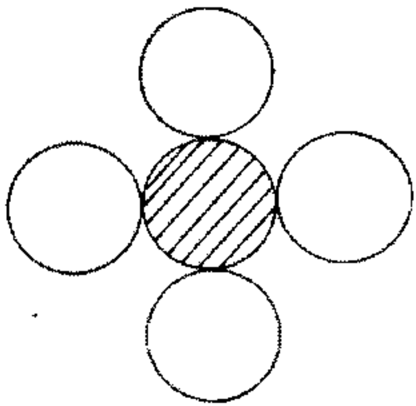
Remarques

1) En adjoignant de même à tout cube du réseau de base (C) ses treize sphères, on voit qu'on obtient un ***empilement régulier de sphères égales***, dont chacune est tangente à ses 12 voisines.

2) En appuyant le triplet inférieur de boules sur les mêmes trous que le triplet supérieur, on obtient ***un second entourage rigide***.

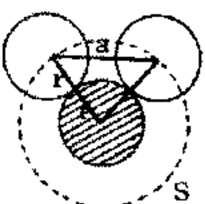
3) Si dans la figure ci-dessous (4 boules en croix touchant la centrale) on appuie dans les interstices 4 boules en haut et 4 boules en bas, on obtient aussi un entourage rigide convenable. ***Il est identique à l'entourage régulier*** vu plus haut. Ceci s'observe aisément sur le cuboctaèdre d'Archimède, dont apparaissent les sections carrées ou hexagonales régulières.

Chaque boule d'un quadruplet intersticiel en touche deux autres, car les centres des quatre boules forment visiblement un carré de côté 2r.



II. Entourage déformable

On sait que l'arête a d'un *icosaèdre régulier* (12 sommets, 20 faces triangulaires, 30 arêtes) est plus longue que le rayon 2r de sa sphère circonscrite (S).



Les 12 boules centrées en ses sommets constituent donc un entourage convenable de la boule centrale. Comme elles sont disjointes, on obtient encore un entourage convenable en déplaçant légèrement leurs centres sur

(S). *Il existe donc une infinité d'entourages irréguliers convenables.* Ils dépendent de $12 \times 2 = 24$ paramètres !

Remarques

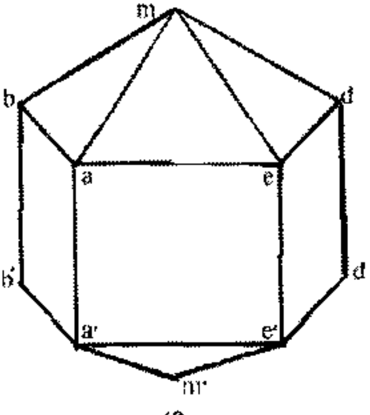
1) On obtient aussi un entourage déformable convenable par deux couronnes de 5 boules, plus une de part et d'autre. Mais *il entre dans la famille précédente*, car si l'on considère deux sommets opposés d'un icosaèdre régulier, ses autres sommets forment deux pentagones plans.

2) Si l'on centre douze boules aux sommets d'un icosaèdre de côté 2r (donc inférieur au côté a de l'icosaèdre précédent), elles forment un entourage rigide d'une sphère de rayon inférieur à r, où chacune touche ses 5 voisines. On en déduit que sur la boule centrale de (S), on peut entourer une boule, centrée à un sommet de l'icosaèdre inscrit, d'une couronne de 5 boules disjointes équidistantes qui la touchent. *Les deux couronnes relatives à deux sommets opposés de l'icosaèdre peuvent tourner* en bloc, indépendamment l'une de l'autre, autour de l'axe joignant ces sommets, en glissant sur la boule centrale.

3) Pour la *réalisation matérielle*, on prend cette fois des balles de ping-pong. La distribution régulière icosaédrique est pratiquement infaisable, l'écart entre deux balles voisines y étant *d'un vingtième environ de leur diamètre.*

On colle sur la balle centrale O une balle M. Puis sur O et M une balle A, puis sur O, M et A une balle B, et ainsi de suite pour former autour de M une couronne de cinq balles A, B, C, D, E, qui ne laisse un écart qu'entre E et A. Enfin, on opère de même à partir de la balle M', diamétralement opposée à M.

Si l'on place la couronne de M' de manière que chacune de ses balles touche une balle de la couronne de M, les centres des 12 balles périphériques sont les sommets *d'un pentadécaèdre intéressant* : ses 15 faces sont dix triangles et cinq rectangles (dont 8 triangles équilatéraux et 4 carrés) ; ses 25 arêtes, sauf deux, sont égales au rayon 2r de sa sphère circonscrite.



III. Impossibilité d'un entourage de 13 boules

Il suffit de montrer qu'on ne peut tasser les douze boules de l'entourage déformable, de manière à libérer un espace qui permette d'en placer une de plus.

Considérons une boule périphérique M entourée d'une couronne de 5 autres, qui la touchent ainsi que la centrale O. (Elles sont tangentes à un même plan diamétral de O). Il y a alors deux manières de dégager, en dehors de la place qu'elles occupent, un espace libre relativement grand :

1) La couronne de M est formée de 5 boules équidistantes et les 5 d'une seconde couronne s'appuient sur O dans les interstices de la première. On montre sans trop de peine qu'on ne peut placer qu'une seule boule convenable dans l'espace libre ainsi dégagé.

2) Les boules M, M′ et leurs couronnes ont la disposition pentadécaédrique de la remarque 3 II. On voit facilement que l'espace libre entre les boules A, E, E′, A′ est trop petit pour pouvoir y placer une treizième.

IV. Sur l'empilement aléatoire de sphères égales

Il y a une vingtaine d'années, on a fait à Strasbourg, au laboratoire de Mécanique des Fluides, l'expérience suivante :

On remplit un gros tuyau d'un grand nombre de billes de verre égales, que l'on tasse par secousses rythmiques. En répétant l'expérience plusieurs fois dans les mêmes conditions (même nombre de billes), on constate :

1) Le niveau de l'empilement est remarquablement stable ;

2) La vitesse d'écoulement d'eau à travers l'empilement varie de manière appréciable d'une expérience à l'autre.

Conclusion (prévisible ?) : *Dans un empilement aléatoire de sphères égales leur disposition varie, malgré une densité sensiblement constante.*

Rappelons que les densités approchées des empilements aléatoire et régulier sont respectivement 0,63 et 0,74 et que, curieusement, *la question de l'empilement le plus dense reste ouverte.*

Remarque

Il existe une infinité d'empilements distincts de densité 0,74.

En effet, considérons un réseau de sphères égales à centres coplanaires, chacune touchant ses six voisines. De part et d'autre de cette couche 2, on peut appliquer deux couches 1 et 3 qui lui sont égales. On obtient deux figures non superposables en appliquant ces couches dans les mêmes trous de 2 ou dans des trous différents. En appuyant sur la couche 3 une nouvelle couche 4, on a encore deux choix et ainsi de suite.

Il est hautement probable que 0,74 soit la densité maximum cherchée car tous ces empilements sont, par couche, le plus denses possible.