

enseignement de la géométrie à l'université (ou l'enfant de l'eau du bain)

*par Daniel Lehmann
Université de Lille I*

Il serait très utile que les professeurs de faculté soient davantage interpellés par leurs collègues de l'enseignement secondaire sur l'enseignement dispensé à l'Université, non seulement en Deug, mais aussi en licence et maîtrise. C'est là, en effet, que se fait l'essentiel de la formation initiale des professeurs et que se forge le modèle idéologique de l'activité mathématique qui sera véhiculé partout ailleurs : bon ou mauvais, ce modèle concerne tout le monde !

Ces dernières années, l'enseignement de la géométrie en faculté a été souvent quasi-inexistant en propédeutique et second cycle, se limitant la plupart du temps à la définition de quelques "grandes" structures (algèbre linéaire, espaces affines et projectifs, avec les groupes de transformations correspondant), dont on ne faisait guère ensuite un véritable usage. L'extrême morcellement des cours et le découpage de l'enseignement en rondelles, confiées chacune à des collègues irresponsables de l'ensemble (du moins de facto) et ayant tendance à s'ignorer les uns les autres, ont fait que la géométrie sous-jacente à beaucoup de situations d'analyse était souvent occultée. Même (1) l'algèbre linéaire était parfois plus ou moins coupée de ses racines géométriques, mi volontairement sous le prétexte que cette théorie a bien d'autres domaines d'application, mi involontairement quand ces racines allaient tellement de soi pour les enseignants qu'ils oublièrent de les préciser, alors que les étudiants étaient évidemment rarement aptes à rétablir spontanément la vision géométrique des choses. Quand on sait que cette vision géométrique est souvent bien plus qu'une simple "interprétation", mais contient l'essentiel de la situation étudiée, on comprendra que ce n'est pas le seul enseignement de la géométrie qui est en cause, mais bien celui de toutes les mathématiques.

Mon expérience personnelle récente concerne deux enseignements distincts à l'Université de Lille I :

— un module d'"algèbre géométrique", facultatif en licence (3^e année de faculté), que j'enseignais l'année dernière pour la première fois,

(1) Evidemment, on ne m'a pas attendu pour dénoncer ces excès, et j'ai bénéficié de discussions avec divers collègues, en particulier A.-M. BRASSELET, R. BKOUCHE et R. GERGONDEY.

— un module de "géométrie et topologie des surfaces", obligatoire en maîtrise (4^e année de faculté), que j'ai pratiqué pendant 5 ans.

1 - Algèbre géométrique

Il est probable, lorsque ce module de licence a été créé à Lille il y a plus de 10 ans (il était alors obligatoire), que des collègues ont eu l'intention d'y enseigner ce qu'E. Artin mettait sous ce titre dans le cours (2) qu'il professait à New-York vers les années 50 : essentiellement les "groupes classiques", en plus de quelques généralités sur les espaces affines et projectifs. L'idéologie dominante (3) était alors que la géométrie élémentaire traditionnelle était complètement dépassée, non seulement dans ses méthodes mais même dans son objet, ayant tout avantage à être remplacée par l'algèbre linéaire (considérée comme bien plus puissante), et ses figures habituelles par les groupes de transformations. Pour être tout à fait honnête, je dois préciser que les tenants de cette idéologie préconisaient davantage, en théorie, d'unifier la géométrie et l'algèbre que de remplacer l'une par l'autre ; mais dans la pratique qu'ils ont suscitée, la "nuance" n'a pas été souvent perçue. Il était dès lors inévitable que l'on coure à l'échec, car ces théories modernes étaient puissantes peut-être, mais puissantes à quoi faire, et unificatrices de quoi ? On oubliait purement et simplement de poser la question, tant cela avait pu aller de soi pour des mathématiciens nourris de cette géométrie traditionnelle à propos de laquelle ils étaient naturellement à même — eux — de comparer les artifices d'antan et les nouvelles méthodes. Et l'illusion a prévalu, pendant ces années, qu'un exposé formel de ces théories puissantes créerait spontanément, par une sorte d'auto-allumage, le besoin de s'en servir. Plus exactement, la confusion était faite entre les problèmes de géométrie qu'un néophyte pouvait avoir envie de se poser (ou acceptait de se poser après suggestion du professeur) et les outils permettant de les résoudre ou de les résoudre à moindre frais ; de sorte que les seuls problèmes qui étaient posés, étaient ceux inhérents au développement de l'outil, devenu une fin en soi. De même qu'il ne suffit pas de disposer d'un bon atelier de menuiserie pour savoir automatiquement fabriquer des meubles ni même seulement pour penser à en fabriquer, ne suffit-il pas non plus d'avoir vu expliciter la notion d'indépendance linéaire ou définir celle d'espace projectif pour avoir envie de s'en servir à bon escient et le savoir ; de même que la fabrication et le perfectionnement des ciseaux à bois ne sauraient constituer l'objet ultime de la menuiserie, le fait que le théorème de Pappus n'est plus valable en géométrie projective sur un corps non commutatif ne peut que laisser parfaitement indifférents des étudiants qui n'auraient pas d'abord manipulé suffisamment de figures de géométrie projective ordinaire (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

(2) E. ARTIN : *Algèbre géométrique* (Gauthiers-Villars)

(3) J. DIEUDONNE : *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire* (Hermann)

Bien entendu il faut être très vigilant pour éviter l'écueil d'un retour aveugle du balancier : il ne saurait être question de revenir 30 ans en arrière en ignorant l'algèbre linéaire et les méthodes modernes, mais seulement de mieux réfléchir au rôle de ces méthodes et de les replacer dans leur contexte.

C'est donc par le commencement, c'est-à-dire par l'étude de quelques figures choisies qu'il nous a fallu commencer. Il nous a paru d'abord que c'était probablement davantage du côté des vieilles "relations métriques" qu'il pouvait être le plus utile d'élaguer, plutôt que de celui des figures traditionnelles que l'on étudiait surtout à partir de la 4^e. Les relations métriques, en effet, sont souvent avantageusement remplacées par un usage convenable des produits scalaire et vectoriel (bien que certaines formules de trigonométrie gardent tout leur intérêt, en calcul intégral par exemple, ou pour paramétrer des courbes unicursales). Les figures, elles, présentent d'abord un caractère esthétique qui n'a rien de négligeable. Elles permettent surtout de suggérer de jolis résultats, curieux, parfois étonnants, même s'ils sont faciles à démontrer, s'énonçant souvent dans un langage simple ne nécessitant aucune structure savante : par exemple, le fait que $(MA, MB) = C^te$ quand M parcourt un cercle passant par A et B ; rien n'est plus simple à exprimer, à démontrer, et pourtant les étudiants trouvent ça beau (plus beau que la forme équivalente, mais non cinématique, qui donne la condition pour que 4 points soient cocycliques, même si c'est souvent sous cette dernière forme que le résultat sera plus tard utilisé). Non seulement les étudiants n'avaient le plus souvent jamais vu ça (il n'y a pas honte à cela), mais (c'est plus grave) ils étaient en général bien incapables d'utiliser les savants outils dont ils étaient censés disposer pour le démontrer analytiquement.

Partant de cette beauté et de cette simplicité, accessibles au débutant, la géométrie élémentaire nous semble remarquablement bien adaptée pour mener, avec ces futurs professeurs de mathématiques que sont la plupart des étudiants qui suivent ce module, une réflexion épistémologique sur la nature de l'activité mathématique et de son enseignement.

1) Certains objets (les points à l'infini comme directions de droites par exemple) seront manipulés heuristiquement bien avant de recevoir leur statut formel ; quand la définition précise des espaces projectifs sera donnée, avec ou non spécialisation d'un hyperplan de l'infini pour faire de la géométrie affine, cela correspondra à un "besoin naturel" faisant suite à toute une pratique antérieure. Comparer avec la méthode d'exposition formaliste qui interdirait de prononcer certains mots avant que les structures sous-jacentes ne soient rigoureusement mises en place, pourra faire l'objet d'un débat fructueux avec les étudiants. Même en ce qui concerne l'analogie du rôle joué par les droites et les cercles en géométrie anallagmatique : on ressent naturellement le besoin de travailler sur la sphère de Riemann (complété du plan par 1 point à l'infini) pour expliquer que les faisceaux de cercles concentriques et les faisceaux de droites

ne jouent aucun rôle particulier. Une réflexion sur les deux compactifications du plan affine réel E^2 .

- par 1 point à l'infini en géométrie anallagmatique ($P^1(\mathbb{C})$),
- par une droite de points à l'infini en géométrie projective ($P^2(\mathbb{R})$),
pourra alors s'ensuivre, bien utile pour préciser certaines idées confuses.

2) Les définitions raffinées d'objets que les étudiants croyaient connaître, n'interviendront qu'au fur et à mesure des besoins, quand on aura rencontré des difficultés avec les définitions plus naïves qui suffisaient jusqu'alors (exemples : les différents types d'angles, orientés ou non, de vecteurs ou de droites...); mais on rejettera a priori de prétendues "définitions rigoureuses" quand elles ne correspondent à aucun besoin préalable, car elles ne peuvent alors fonctionner que comme des interdits arbitraires et donc paralysants.

3) Au lieu de "remplacer les figures traditionnelles par les transformations géométriques", comme cela avait été préconisé (4), on s'efforcera plutôt de réfléchir aux différents rôles que peut avoir en géométrie la notion de transformation. Pour ma part, j'en vois au moins trois (d'ailleurs étroitement reliés) :

— tout d'abord, et bien évidemment, le rôle "moderne" auquel tout le monde pense désormais depuis F. Klein, qui consiste à classer les propriétés d'une figure et les notions que l'on peut être amené à définir, selon le groupe des transformations qui les conserve. Il faut prendre bien garde, cependant, que cette utilisation des transformations est loin d'être la plus accessible au débutant en géométrie : le problème du classement ne se pose en effet que lorsqu'on a suffisamment d'objets à classer, et il faut déjà disposer d'un bon stock de définitions et propriétés naturelles pour éprouver le besoin de mettre un peu d'ordre dans tout ça ; on ne range pas le vide ! Que des débutants puissent mettre par exemple sur le même plan la notion affine de "parallélisme" et celle — métrique — de "perpendicularité", non seulement n'est pas choquant, mais semble même inévitable : l'absurdité (5) des anciens programmes de 1970 en classe de 4ème, où — sous prétexte de classer — on autorisait l'élève à voir des parallélogrammes mais pas à distinguer les rectangles, où on l'autorisait à comparer les longueurs de segments seulement lorsque ceux-ci étaient parallèles, où la vision d'un cercle ou d'un angle étaient des choses interdites, est là pour en témoigner (on n'aurait pu justifier ces interdits qu'en introduisant explicitement le groupe affine du plan, ce qui aurait été rigoureusement incompréhensible à ce niveau ; on s'est contenté du groupe affine de la droite, avec le succès que l'on sait),

(4) Cf. DIEUDONNÉ, déjà cité.

(5) Cf. R. BKOUCHE : la trahison du programme d'Erlangen (IREM de Lille).

— il est une autre utilisation des transformations, que l'on connaissait bien il y a 30 ans, et qui faisait les délices des fabricants de problèmes de concours général, consistant à **transformer une figure bien connue** en une figure nouvelle : on a beaucoup daubé sur l'intérêt limité, pour le mathématicien, des résultats nouveaux que l'on pouvait obtenir par ce procédé ; et sans doute, du strict point de vue de la recherche mathématique, avait-on raison ; mais n'a-t-on pas simultanément négligé la valeur formatrice de ce genre d'exercices ? N'est-il pas intéressant déjà de faire prendre conscience aux étudiants qu'ils peuvent créer eux-mêmes des énoncés plus ou moins inédits ? C'est une façon de démystifier certains types d'énoncés, et de faire jouer aux étudiants un rôle beaucoup plus actif que vis-à-vis des classiques rédactions de problèmes de la forme : "démontrez que...". Certaines des situations nouvelles obtenues très naturellement par ce procédé sont parfois importantes pour la suite du cours : les propriétés du quadrilatère complet ou le théorème de Desargues par exemple, s'obtiennent quasi automatiquement, sans presque le vouloir, par perspective d'un parallélogramme ou de deux triangles homothétiques ; et de même en ce qui concerne certaines propriétés des coniques à partir de celles du cercle ; certes, ces résultats peuvent aussi s'obtenir analytiquement...

... à condition d'y penser, et toute personne qui aura un peu rêvé devant l'ombre portée de son abat-jour sur le mur de sa chambre, hésitera quelques instants avant de destiner définitivement le théorème de Dandelin à l'oubli ou au musée : s'il ne faut pas confondre une courbe et son (ses) équation(s), peut-être aura-t-on intérêt à ne voir les formes quadratiques que comme outils permettant (entre autres choses) d'étudier les coniques, et non comme étant les coniques elles-mêmes. L'exercice inverse (trouver "la" bonne transformation, si elle existe, permettant de ramener une figure bizarre à une situation classique), pour artificiel qu'il puisse paraître, peut être aussi très formateur si l'on n'en abuse pas ; en particulier, il implique une analyse serrée du type de propriétés que doit conserver la transformation cherchée ainsi que du degré de liberté dont on dispose, et donne au classement des géométries (affine, projective, anallagmatique, réelle,...), auquel il est donc intimement lié, tout son rôle opérationnel.

— un troisième type d'utilisation enfin, ressort de la recherche des "symétries" cachées d'une figure, c'est-à-dire des transformations qui laissent une figure invariante : un exemple élémentaire tout à fait typique de ce point de vue est la démonstration classique de l'existence de l'orthocentre à partir de celle — évidente — du centre du cercle circonscrit, grâce à l'utilisation d'une homothétie de rapport (-2) et centre le centre de gravité (d'où la droite d'Euler comme sous-produit de cette homothétie).

Les considérations qui précèdent commandent l'agencement général du cours, essentiellement divisé en 4 grandes parties, qui interfèrent nécessairement entre elles, avec des redites, puisqu'elles doivent progressivement mener l'étudiant de l'aspect élémentaire et heuristique des choses à celui des méthodes plus puissantes mais plus sophistiquées. Notre thèse est, pour l'essentiel, que la valeur de ces méthodes ne peut être perçue, si l'on a court-circuité le point de vue un peu naïf du début :

1) un stock de figures élémentaires

(afin d'avoir à transformer et à classer ensuite autre chose que du vent !).

2) quelques transformations nouvelles : à ce sujet, il faut prendre bien conscience, que mis à part peut être quelques affinités dont ils n'ont d'ailleurs guère vu que les définitions (combien ont étudié l'ellipse à partir de son cercle principal ?), les étudiants n'ont encore jamais manipulé que des translations et des similitudes, qui ne changent pas la forme (6) des figures. En introduisant explicitement des perspectives (ou projections coniques et cylindriques), des inversions, des transformations par polaires réciproques relativement à un cercle, et en transformant explicitement certaines des figures introduites dans la 1ère partie, on fait franchir aux étudiants un pas entièrement nouveau dont on ne saurait sous-estimer l'importance. De plus, ces transformations s'avèreront extrêmement utiles en tant que modèles d'autres transformations que les chercheurs d'aujourd'hui ne renieraient pas : les perspectives ne servent pas seulement au dessin — ce qui est d'ailleurs intéressant en soi —, mais sont aussi les prototypes des transformations projectives ou homographies ; les inversions, à composition près avec la symétrie par rapport à une droite, sont les prototypes des transformations conformes de la sphère de Riemann ; quand aux transformations par polaires réciproques, elles se généralisent à n'importe quelle conique, permettant de comprendre le lien entre formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques, elles permettent d'introduire la dualité qui s'est révélée si féconde, elles fournissent aussi les premiers exemples de transformations pour lesquelles les ensembles source et but sont distincts.

3) Mise en place d'outils nouveaux :

- les espaces projectifs et les homographies,
- les géométries :
 - . projective sur $P^1(\mathbb{R})$, $P^1(\mathbb{C})$
 - . réelles et complexes : $P^n(\mathbb{R}) \subset P^n(\mathbb{C})$
 - . affines $\text{Aff}^n(K) \subset P^n(K)$
 - . conformes (ombilicale, points cycliques)
 - . anallagmatique sur $P^1(\mathbb{C})$,
- synthèse d'Erlangen,
- révision sur les formes quadratiques.

4) Utilisation des outils nouveaux : comparaison avec les méthodes plus naïves, et résultats nouveaux ; méthodologie de certains problèmes que l'on peut ramener à un cas particulier déjà connu ou plus facile à traiter.

Il est à remarquer que beaucoup d'objets ont une existence transversale tout au long du cours, tels

(6) C'est-à-dire les angles et les proportions.

— le birapport, qui est d'abord une obstruction à l'harmonicité d'une division, avant de devenir successivement un invariant naïf de la perspective d'une droite sur une autre, l'invariant fondamental des homographies, puis la coordonnée d'un point de la droite projective par rapport à un repère projectif, avec très vite l'utilisation de l'angle de droites en tant que birapport avec les isotropes,

— les coniques, de l'étude élémentaire plane en 1ère partie aux classifications et études analytiques en 4ème partie, en passant par les perspectives de cercle en 2ème partie, et les générations homographiques diverses (de l'arc capable au théorème de Poncelet et à la situation dégénérée du théorème de Pappus),

— la notion de "faisceau" qui n'est autre que celle de droite projective dans un ensemble préalablement muni d'une structure d'espace projectif,

— la notion de "courbe unicursale" ou structure de droite projective sur une courbe algébrique dans un espace projectif, avec application aux intégrales abéliennes.

2 - Géométrie et topologie des surfaces

Nous avons déjà dénoncé plus haut l'extrême parcellisation de l'enseignement universitaire. Le premier intérêt de ce module, obligatoire à Lille en fin de maîtrise, qui utilise des connaissances antérieures de Deug ou Licence relativement élémentaires d'origine extrêmement variée (calcul différentiel, intégration, algèbre linéaire, géométries élémentaire et cartésienne, fonctions de variables complexes, ...) est de contribuer à redonner une certaine unité aux mathématiques, qui surprend fort les étudiants : même si ce n'est pas l'objet de ce cours, on a sans arrêt besoin, tantôt d'intégrer une équation différentielle, tantôt de construire une courbe en coordonnées polaires, d'appliquer le théorème des fonctions implicites, la formule de Green-Riemann, ou d'utiliser une transformation conforme ; et l'expérience montre que les étudiants — qui trouvent ce module difficile — butent bien davantage sur ces connaissances supposées déjà acquises (7), que sur la matière véritablement nouvelle.

Cette richesse de structures, inhérente à la géométrie et à la topologie différentielles, et qui en fait l'un des intérêts, explique aussi les difficultés qu'il y a en contrepartie à l'enseigner :

— difficulté de s'orienter au milieu d'une prolifération tous azimuts de résultats,

— difficulté de dépasser le stade des outils purement techniques et bagages prérequis, en quantité plus importante qu'ailleurs, pour pouvoir aborder enfin des résultats un peu profonds,

— difficulté enfin, sinon impossibilité, de tout formaliser, sous peine d'en rester à des généralités d'un intérêt limité.

(7) Etant bien entendu que les équations différentielles rencontrées ou courbes en coordonnées polaires sont toujours choisies parmi les plus simples qui puissent exister !

C'est pourquoi la tentation est grande, aux niveaux des premier et second cycles universitaires, de limiter l'enseignement de la géométrie et de la topologie aux quelques directions qui se laissent le mieux axiomatiser, telles la topologie générale, ou des rudiments de géométrie différentielle uniquement locale, au risque d'oublier qu'une formalisation trop aisée peut se faire au détriment d'une compréhension réelle des phénomènes géométriques (une courbe n'est pas une équation, une rotation n'est pas une matrice), au risque aussi d'occulter tout ce qui ne s'intègre pas à un contexte choisi a priori davantage en fonction de son aptitude à être exposé linéairement que de son intérêt réel. Même au niveau du troisième cycle, le risque existe de limiter l'enseignement de la géométrie à l'introduction d'outils plus ou moins "savants" (variétés, fibrés, connexions, groupes de Lie, foncteurs classiques de topologie algébrique), dont on n'a pas toujours ensuite le temps de faire un usage réellement proportionné à leur sophistication : on fait ainsi, de la construction des outils, une fin en soi, au détriment des problèmes que ces outils devraient servir à résoudre : c'est là une aliénation qui nous semble particulièrement grave, bien que fréquente à l'heure actuelle, de l'enseignement des mathématiques.

Et pourtant, il ne serait pas raisonnable de limiter l'enseignement de cette discipline, seule parmi toutes les autres branches mathématiques, aux seuls futurs spécialistes : l'étude de ces formes différentielles fermées et non exactes sur un simple ouvert de \mathbb{R}^2 , ou la formule de Green-Riemann, ne sauraient laisser indifférents analystes ou physiciens, pas plus que la notion de courbe intégrale d'un champ de vecteurs ou celle de surface développable ; et l'intérêt d'enseigner le théorème d'Ascoli à des étudiants qui n'auraient pas d'abord compris pourquoi une sphère ou un tore sont compacts tandis qu'un plan ne l'est pas, paraît douteux.

La solution que nous avons choisie, part de l'observation que beaucoup des grandes théories de géométrie et topologie se simplifient énormément sur le plan technique quand on les applique aux surfaces, tout en fournissant des résultats qui restent consistants et significatifs, et plus faciles en même temps à conceptualiser parce que se prêtant souvent au dessin. Le principe consiste donc, au lieu de choisir l'une ou l'autre de ces grandes théories et d'en faire un exposé aussi général que possible, d'en voir au contraire davantage dans le cas particulier des surfaces (présentation "horizontale"). Un autre principe de base a été de traiter explicitement un assez grand nombre d'exemples, considérés comme partie intégrante du cours, afin de réagir contre cette tendance, fréquente en France, qui consiste à valoriser la théorie et à reléguer les situations concrètes en "exercices" ou "applications", avec toute la connotation hiérarchique que ces mots comportent et les effets néfastes qui en résultent. Dans le même esprit, nous avons multiplié les figures, qu'on a trop méprisées en répétant "qu'elles ne prouvaient rien" (quand on n'oubliait pas, purement et simplement, qu'il était possible d'en faire et qu'il y avait quelque chose à voir !). Certes, avec une figure, on peut "démontrer" des choses fausses ; mais ce n'est pas parce qu'on s'est un jour tapé sur les doigts

avec un marteau* qu'il faut jeter celui-ci à la poubelle: mieux vaut apprendre à le manipuler avec discernement !

Ce cours a fait l'objet d'un manuel (8), mis au point en collaboration avec C. Sacré, dont voici le plan.

Chapitre 0 - *Surfaces topologiques et différentiables.*

Chapitre I - *Fonctions différentiables, vecteurs tangents et champs de vecteurs sur une surface C^∞ .*

Chapitre II - *Chaînes singulières différentiables, formes différentielles et intégration sur une surface.*

Chapitre III - *Géométrie riemannienne des surfaces.*

Chapitre IV - *Pavages, homologie entière et cohomologie réelle d'une surface compacte.*

Chapitre V - *L'invariant d'Euler-Poincaré d'une surface compacte.*

Les trois premiers chapitres concernent essentiellement l'outillage nécessaire à la suite.

Dès la fin du chapitre 0, le lecteur dispose d'une importante collection de surfaces : il connaît en effet toutes celles qui sont compactes (le fait qu'il n'y en a pas d'autre sera admis), ainsi que beaucoup de non compactes.

Excepté en ce qui concerne figures et exemples, nous avons essayé de réduire le plus possible cette partie 1, qui n'a d'intérêt qu'en fonction des usages qui en sont ensuite faits, et dont beaucoup de sections peuvent, dans un cours oral, n'être introduites qu'au fur et à mesure de ces usages. Par exemple, nous n'avons pas fait d'algèbre homologique, ni introduit le produit extérieur des formes différentielles, ces outils nous ayant semblé inutilement sophistiqués tant qu'on restait en dimension 2 : au chapitre IV, le théorème de de Rham est démontré "à la main", ce qui aurait été inextricable en dimension plus grande : la topologie d'une surface compacte est entièrement déterminée par ses seuls nombres de Betti, sans qu'il soit nécessaire de préciser la structure multiplicative de la cohomologie de de Rham.

Le chapitre I aurait pu être présenté en dimension quelconque, presque sans changement : nous avons résisté à cette tentation par souci d'unité et pour n'avoir pas à développer d'autres exemples que ceux des surfaces, mais la remarque peut facilement en être faite aux étudiants motivés (à propos de la mécanique par exemple).

Nous avons insisté à plusieurs reprises, tout au long de ce cours, sur une dualité entre deux aspects de la géométrie, formellement équivalents mais jouant en général des rôles bien distincts :

(*) Cette métaphore m'a été prêtée par Valabrière.

(8) D. LEHMANN et C. SACRÉ - *Géométrie et Topologie des surfaces* - Presses Universitaires de France (déc. 82).

— l'aspect global ou "fini" (groupes de transformations à 1 paramètre, commutation de 2 tels groupes, transport parallèle, holonomie, intégration), plus heuristique, mais pas toujours aisé à manipuler ;

— et l'aspect infinitésimal (champs de vecteurs, crochets, dérivation covariante, courbure, formes différentielles), plus abstrait, mais donnant souvent lieu à des calculs plus automatiques.

Beaucoup de cours de géométrie différentielle ne présentent que l'aspect infinitésimal, sans doute précisément parce qu'il se prête mieux au calcul. Cette optique nous a semblé trop restrictive, puisqu'elle masquait l'origine géométrique des phénomènes : quel que soit l'alourdissement qui en résultait, il nous a paru au contraire indispensable d'enseigner à sauter d'un mode à l'autre suivant les besoins.

Beaucoup d'autres développements seraient possibles auxquels nous avons dû renoncer, ne pouvant pas tout faire, mais avec un regret particulier concernant

— la démonstration du théorème de classification topologique des surfaces compactes, (9)

— l'étude du groupe fondamental des surfaces (nous disposions pourtant des actions totalement discontinues et séparantes vues au chapitre 0, du groupeïde des chemins entr'aperçu au chapitre III, et des représentations planaires de surfaces compactes exhibées au chapitre IV), (9)

— une introduction aux surfaces de Riemann (si la structure était aisée et rapide à définir, il n'en était pas de même quant aux divers usages qu'on pouvait en faire, dont aucun ne nous a paru à la fois suffisamment simple et motivé au niveau élémentaire auquel nous voulions nous placer).

En guise de conclusion, on pourra observer que beaucoup de principes d'enseignement, tel par exemple celui de distinguer les outils techniques et les résultats fondamentaux (quels que soient les caractères relatifs et subjectifs de ces notions) sont communs à des enseignements très différents [et pourraient s'appliquer dans bien d'autres matières et à bien d'autres niveaux]. On observera aussi que la géométrie dite "élémentaire" n'est pas seulement le prétexte à "former au raisonnement" des élèves de 4ème, mais conserve tout son intérêt y compris comme prérequis à des enseignements réputés traditionnellement plus "universitaires", tel celui de géométrie et topologie différentielle sur les surfaces.

(9) D'excellents manuels traitent ce sujet. Contentons-nous de citer celui, déjà ancien, de SEIFERT et THRELFAH ("Lehrbuch der Topologie" : éd. Teubner 1934. Traduction anglaise parue en 1980 aux Academic press).