dans nos classes

une petite expérience en terminale C
mathématiques et travaux pratiques sur micro-ordinateur : étude de suites récurrentes

par Michelle Demarcus
Lycée J. Aicard, Hyères

Soit $f_p(x) = x + \frac{1}{2}(p - x^2)$, p est un paramètre réel strictement positif. Le problème posé est : *approche de l'étude des suites définies par :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(p - u_n^2), & \text{c'est-à-dire } f_p(u_n). \\ u_0 & \end{cases}$$

Cette suite dépend des 2 paramètres p et u_0. Cette manipulation est destinée à des TC (Cette expérience a eu lieu en janvier 1984). Le micro-ordinateur permet, d'une part la visualisation du tracé de la suite dans un repère orthonormal à partir du graphique de f_p et de $y = x$ (et de la donnée du premier terme u_0, bien sûr), d'autre part de nombreux calculs.

Les élèves doivent :

• étudier de nombreux cas particuliers ou familles de cas ;
• se demander si, p étant donné, la suite est convergente ou non ; si la limite est RAC(p) ou $-$RAC(p) ; quelle est l'influence de u_0 sur la nature de la suite.

Le problème posé étant très large, j'avais remis, aux élèves, un plan de travail (prendre $0<p\leqslant 1$, $u_0< -\mathrm{RAC}(p)$, $-\mathrm{RAC}(p)\leqslant u_0\leqslant \mathrm{RAC}(p)+2$, $1<p\leqslant 4$ ...) (Voir Annexe 1)

A partir des tableaux obtenus (et du graphique), on établit une ou plusieurs conjectures. Dans la première partie ($0<p\leqslant 1$) on peut facilement conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite, la position de u_0 étant déterminante (voir tableaux annexe 2). On a obtenu la convergence vers $-\mathrm{RAC}(p)$ pour $u_0=-\mathrm{RAC}(p)$ et $u_0=2+\mathrm{RAC}(p)$ (valeur symétrique par rapport à $x=1$, axe de symétrie de la parabole).

Pour $1<p\leqslant 4$, la suite, lorsqu'elle est convergente, n'est plus monotone. Les valeurs des tableaux ci-dessus ne sont pas suffisantes. Pour établir une conjecture solide, on a observé plus de 2000 termes avec u_0 bien choisi... comme disaient les élèves "ça s'enroule beaucoup et ça se rapproche de plus en plus de (RAC(p),RAC(p))".

Pour $p>4$, les phénomènes sont plus complexes à analyser. Le cas $p=13$, $u_0=5$ montre comment l'ordinateur induit en erreur : il tronque les résultats (au lieu de 1 il sort le développement .999999..9 mais tronqué). Il y a ensuite accumulation de l'erreur et sur l'écran quand on prend plus de 50 termes, la suite tend vers plus l'infini alors qu'elle est en fait périodique. Le tableau obtenu permet quand même de saisir facilement ce qui se passe.

Etablissons un lien entre cette étude et l'article de R. Thibault "Les attracteurs étranges" paru dans ce Bulletin en février 83 (numéro 337, page 83). Il apparaît que le point ($-\mathrm{RAC}(p)$, $-\mathrm{RAC}(p)$) est répulsif et (RAC(p),RAC(p)) attractif jusqu'à $p=4$. Après cette valeur il y a déstabilisation : ce point devient répulsif, tandis qu'il apparaît, pour $f_p \circ f_p$ (composée de f_p par elle-même), deux nouveaux points fixes (d'abscisses $2+\mathrm{RAC}(p-4)$,$2-\mathrm{RAC}(p-4)$) qui semblent attractifs (voir le cas $p=5$, $u_0=2$) mais pas pour longtemps (voir le cas $p=8$)... Nous voici donc en plein dans les comportements chaotiques définis par R. Thibault... A vous de continuer les découvertes...

Ces observations dépassent le cadre que je m'étais fixé : j'ai tenu à coller au programme tout en montrant une forme de recherche accessible à tous, mais il est certain que cette étude est un exemple simple des phénomènes décrits dans "les attracteurs étranges".

Je joins à cet article, outre les tableaux, la liste des démonstrations demandées à mes élèves. Je tiens aussi à remercier M. Labrousse, directeur d'IREM, pour m'avoir conseillé cette étude de suites.

Annexe 1

Questions posées aux élèves

Soit $f_p(x) = x + \frac{1}{2}(p - x^2)$, p paramètre réel strictement positif.

1. Etude de f

On travaille dans un repère orthonormal.

• Etudier, suivant les valeurs de p, la position du sommet de la parabole par rapport à $y=x$. A est le point d'intersection d'abscisse positive de $y=x$ avec le graphique.

• Quel est le maximum M de f?
Quand a-t-on $M \leqslant X_A$? X_A est l'abscisse positive du point A.

• Peut-on avoir $f o f(x) = x$?
Sur quel ensemble a-t-on $|f'(x)| < 1$?

2. Etude de quelques suites

Soit $0 < p \leqslant 1$.

• $u_0 = 0$; $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite?

• $u_0 = -2$. Pour tout $n \geqslant 1$, montrer que :

* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})(2-(u_{n-1}+u_n))$.
* $u_n < -\mathrm{RAC}(p)$.
* $u_{n+1} - u_n \leqslant k(u_n - u_{n-1})$ où $k > 1$ (k est à déterminer).
* En déduire que $u_{n+1} - u_n \leqslant k^n (u_1 - u_0)$.
* Conclure que (u_n) diverge.

3. Prenons $p = 2{,}5$

• Montrer que $f[0{,}1 ; 1{,}9]$ est incluse dans $[0{,}1 ; 1{,}9]$.

• Montrer que pour tout x de $[0{,}1 ; 1{,}9]$, on a $|f'(x)| \leqslant 0{,}9$.

• Soit $u_0 = 0{,}1$; $u_{n+1} = f(u_n)$; $L = \mathrm{RAC}(p)$.
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|u_n - L|$ est majoré par le terme général d'une suite géométrique convergente, pour tout n. En déduire la limite de (u_n).

4. Prenons $p = 4$

• Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole (fait en 1)?

• Montrer que $f[1, (p+1)/2]$ est incluse dans $[1, (p+1)/2]$.

• Quel est le sens de variation de la restriction de f à $[1, (p+1/2]$, de $f o f$?

• Sens de variation de f^{2k}, de f^{2k+1}.

Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
— Quel est le sens de variation de (u_{2k}) où k décrit $\mathbb{N}$?
— Quel est le sens de variation de (u_{2k+1}) où k décrit $\mathbb{N}$?

— Montrer que (u_{2k}) est majorée.
— Montrer que (u_{2k+1}) est minorée.

Conclusion : Convergence et limite de chacune de ces deux suites.

5. Soit $p = 20$; $u_0 = 6$; $u_{n+1} = f(u_n)$

Quelle est la nature de la suite (calculer les premiers termes) ?

En comparant vos observations et les démonstrations, que pensez-vous ?

Annexe 2

$p = .3$ $u_0 = 0$	$p = .6$ $u_0 = 0$	$p = .9$ $u_0 = 0$	$p = 1$ $u_0 = 0$
Calcul de u_n	Calcul de u_n	Calcul de u_n	Calcul de u_n
.15	.3	.45	.5
.28875	.555	.79875	.875
.397061719	.7009875	.829749219	.9921875
.468232715	.755295762	.947532414	.999969482
.508611777	.770059918	.948623576	1
.529268807	.770563779	.948680231	1
.539206072	.774363319	.94868814	
.543834478	.774544044	.94868329	
.545956508	.774584806	.948683297	
.546922253	.774593995	.948683298	

Nous avons calculé les carrés des u_n pour les comparer à $(\sqrt{p})^2$ (c'est-à-dire p).

Les élèves ont remarqué la rapidité de convergence et la stricte monotonie des suites obtenues ci-dessus.

$p = .3$ $u_0 = 3$	$p = .6$ $u_0 = 3$	$p = .9$ $u_0 = 3$	$p = 1$ $u_0 = 3$
Calcul de u_n	Calcul de u_n	Calcul de u_n	Calcul de u_n
− 1.35	− 1.2	− 1.05	− 1
− 2.11125	− 1.62	− 1.15125	− 1
− 4.18993829	− 2.63220001	− 1.36393829	− 1
− 12.8177298	− 5.79643845	− 1.84410212	− 1.00000001
− 94.8148279	− 22.2957878	− 3.09445843	− 1.00000002
− 4589.59062	− 270.546866	− 7.43229493	− 1.00000003
− 10536760.5	− 36868.0501	− 34.6017989	− 1.00000007
	− 679663428	− 632.794044	− 1.00000013
	− 2.36971188E + 17	− 200846.495	− 1.00000027
	− 2.6673845E + 34	− 2.01698592E + 10	

On voit bien sûr l'influence de u_0. Pour $p = 1$, $u_0 = 3$ il y a convergence vers $-\sqrt{p}$ (et on voit apparaître des erreurs d'arrondi).

$p=2.5$ $u_0=3$	nombre d'itérations 10	$p=2.5$ $u_0=.1$	nombre d'itérations 10
Calcul de u_n	Calcul de u_n^2	Calcul de u_n	Calcul de u_n^2
−.25	.0625000002	1.345	1.809025
.968749999	.938476562	1.6904875	2.85774799
1.54951172	3.06079126	1.51161351	2.28497539
1.56911609	2.15830209	1.61912581	2.62156839
1.58996505	2.68948536	1.55834161	2.42842859
1.54522237	2.38771217	1.59412732	2.54124192
1.50136628	2.56437398	1.57350636	2.47592227
1.5691793	2.46232366	1.58554523	2.51395366
1.53801747	2.52179947	1.57866839	2.49187817
1.57711773	2.48730034	1.58262931	2.50471553

$p=2.5$ $u_0=5$	Nombre d'itérations 6
Calcul de u_n	Calcul de u_n^2
−6.25	39.0625
−24.53125	601.782228
−324.172364	105087.722
−52866.7832	2.79489677E+09
−1.39750125E+09	1.95300974E+18
−9.56504872E+17	9.53561768E+35

Avec $u_0 = 0.1$, la suite "s'enroule". On a calculé un grand nombre de termes. Les élèves ont remarqué la "déformation" de la parabole, la position par rapport à $y = x$.

La construction des suites récurrentes et le rôle de $y = x$ ont été compris (enfin...).

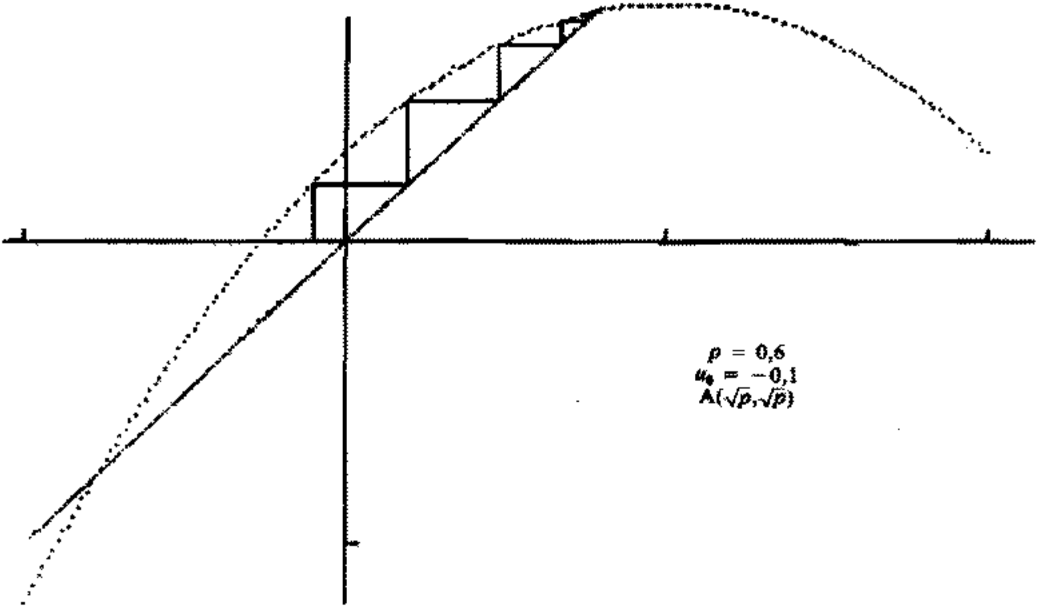
$p = 13$ $u_0 = 5$ Nombre d'itérations 10	
Calcul de u_n	Calcul de u_n^2
-1	1
5	25
$-.99999999$	.99999998
5.00000002	25.0000002
-1.00000002	1.00000005
4.99999995	24.9999995
$-.999999815$	.999999629
5.00000028	25.0000028
-1.00000113	1.00000226
4.99999774	24.9999774

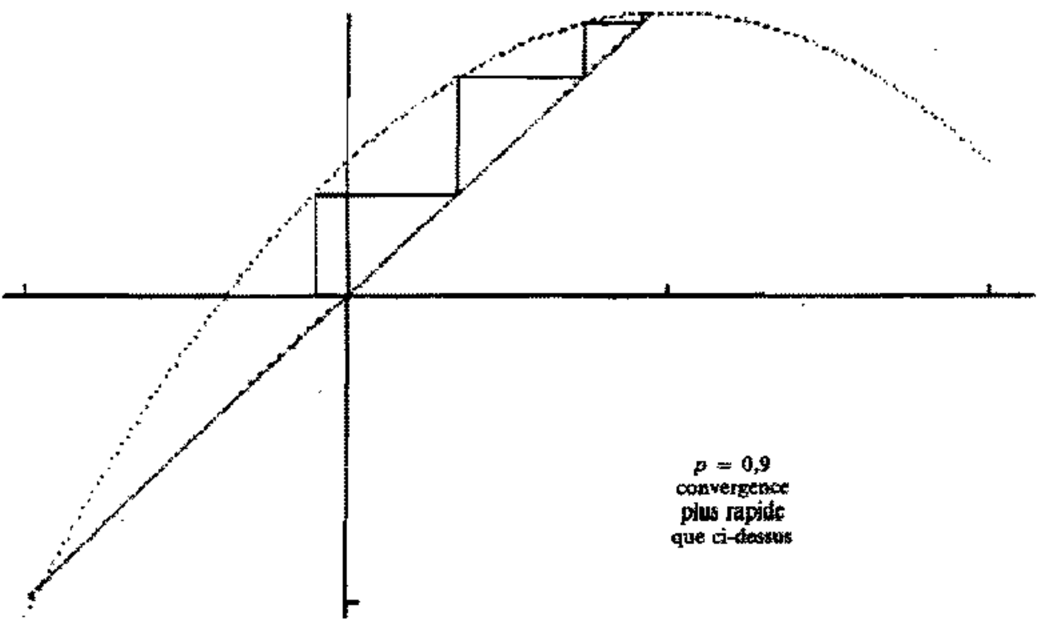
Voici un exemple de "troncature" ; au lieu de 1, il sort .999...9 mais comme il n'y a qu'un nombre fini de 9, ce phénomène d'arrondi induit une erreur qui s'accentue avec les calculs suivants.

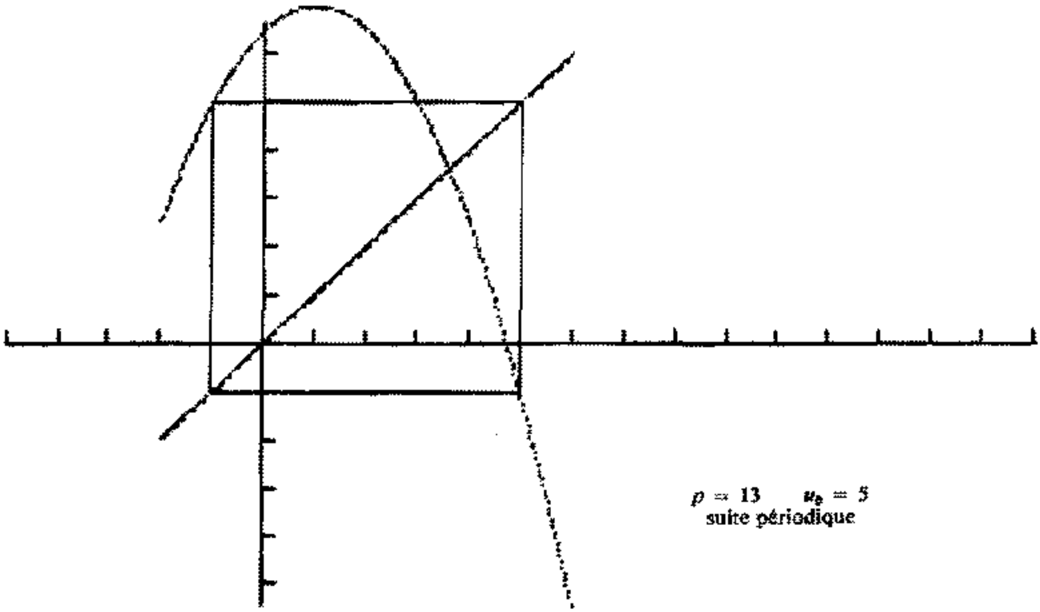
Sur l'écran la suite semble diverger alors qu'elle est en fait périodique...

$p=4$ $u_0=1.5$	$p=5$ $u_0=2$	$p=8$ $u_0=1$
Calcul de u_n	Calcul de u_n	Calcul de u_n
2.375	2.5	3.895
1.5546875	1.875	.309487498
2.34616089	2.6171875	4.26159624
1.59392543	1.69235229	−.819005038
2.32362629	2.76032415	2.84561034
1.62400672	1.45062944	2.79686124
2.30530781	2.89846655	2.88564484
1.64808577	1.19791237	2.72217176
2.28999242	2.98041535	3.01706221
1.66795978	1.03897753	2.46573003
	2.99924038	3.42581774
	1.00151896	1.55770415
	2.99999885	4.34448304
	1.00000231	−1.09278342
	3	2.31012877
	.999999998	3.6417813
	3	1.01049579
	.999999998	4.49994492
	3	−1.62480722
	.999999998	1.05519353
		5.49847684
		−1.61967009
		1.0686643
		4.49764261
		−1.61675191
		1.07630473
		4.4970888
		−1.61481502
		1.0813712
		4.49668937

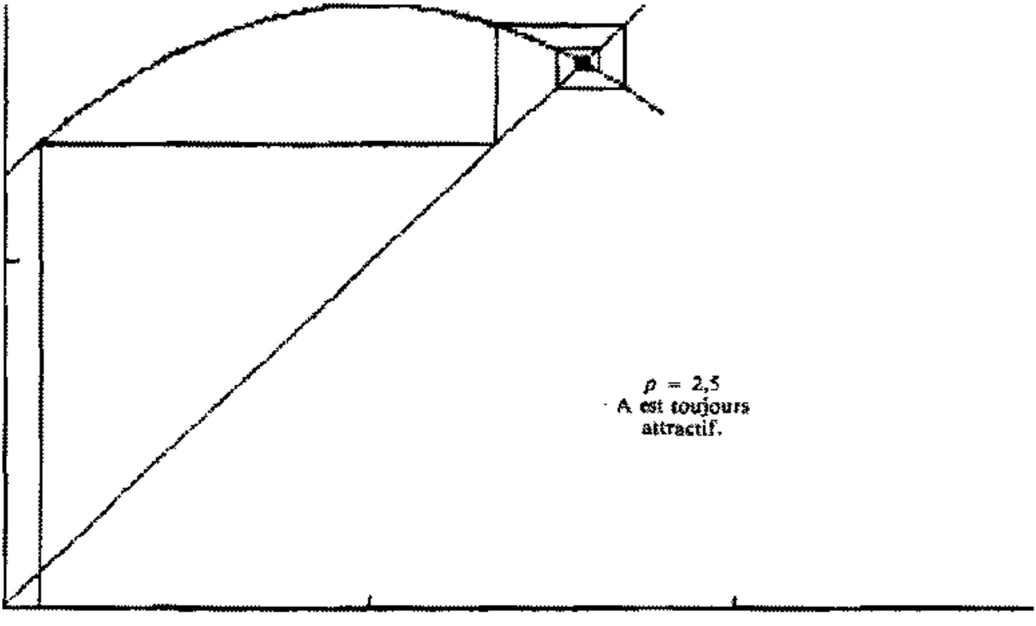
Annexe 3


$p = 0,6$
$u_0 = -0,1$
$A(\sqrt{p}, \sqrt{p})$

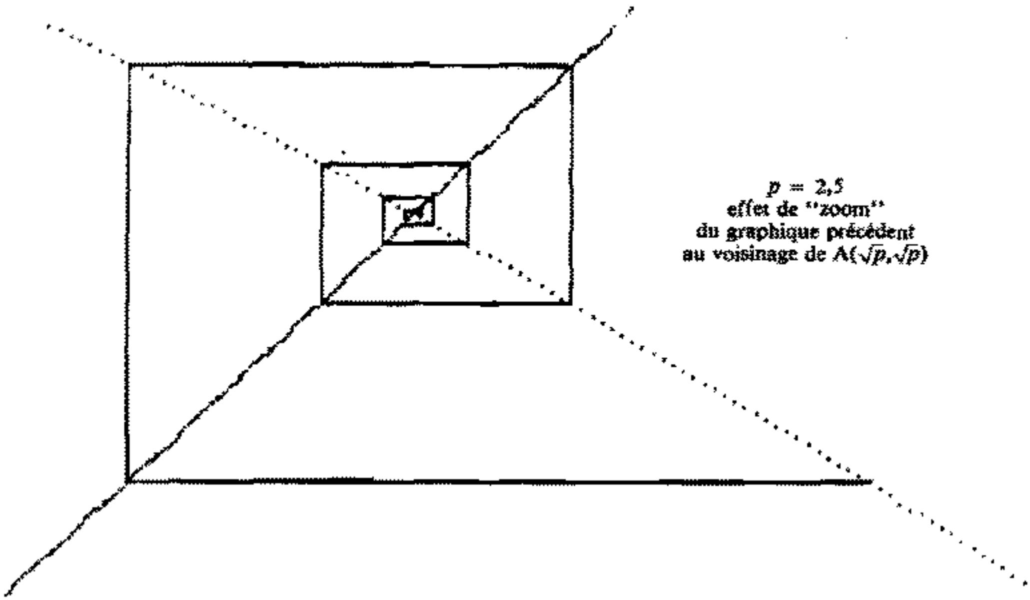

$p = 0,9$
convergence
plus rapide
que ci-dessus



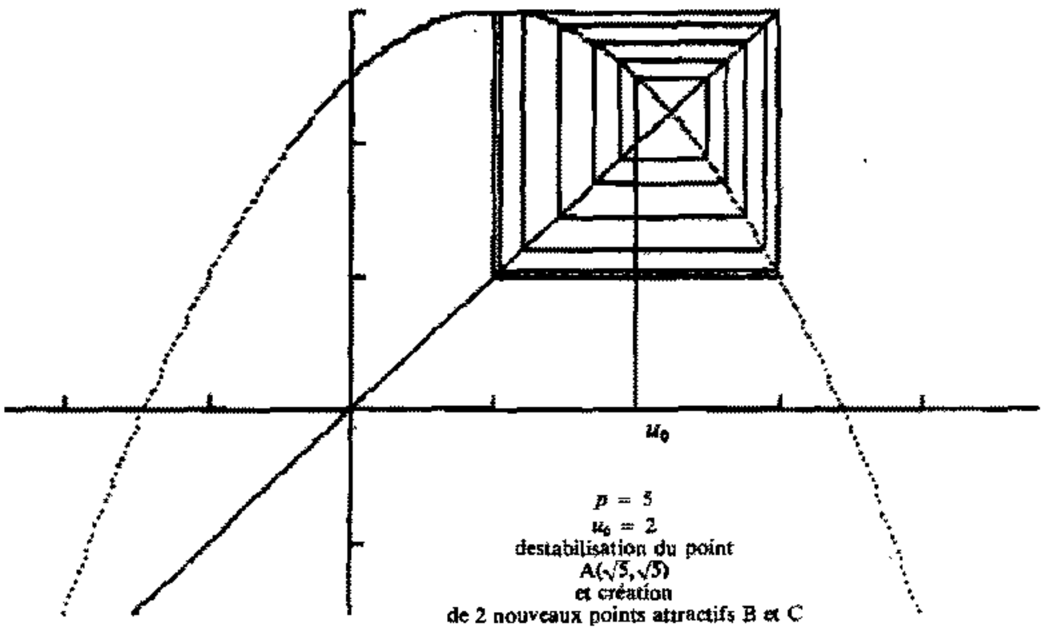
$p = 13 \qquad u_0 = 5$
suite périodique



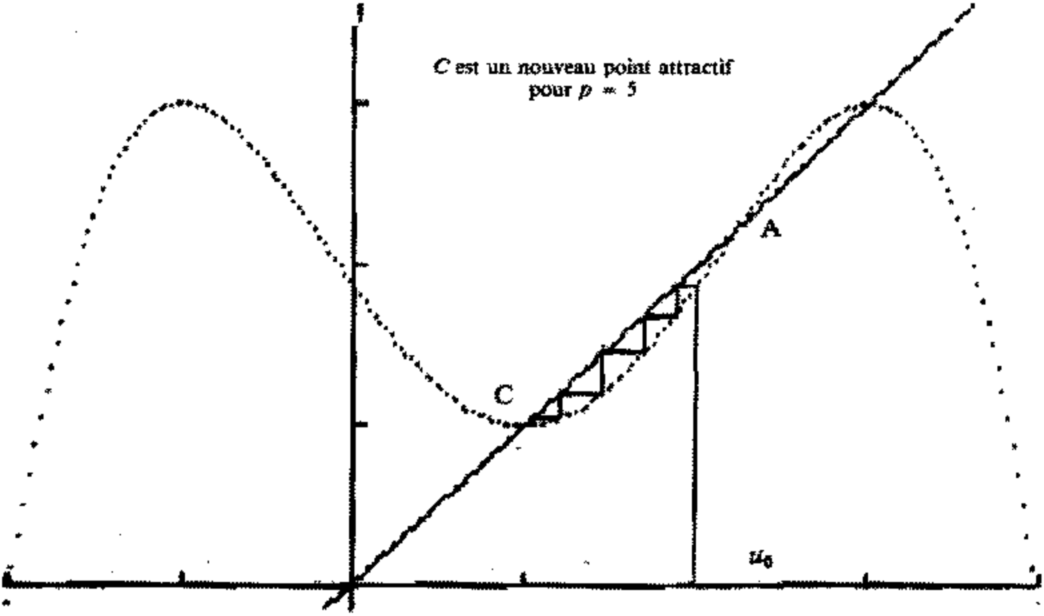
$p = 2{,}5$
A est toujours
attractif.



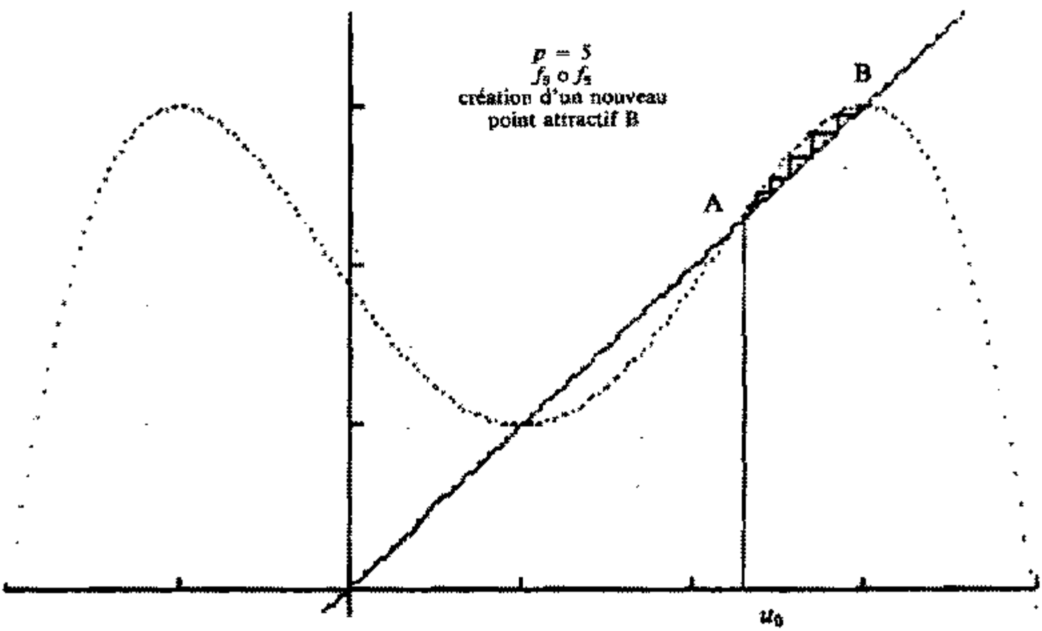
$p = 2{,}5$
effet de "zoom"
du graphique précédent
au voisinage de $A(\sqrt{p}, \sqrt{p})$



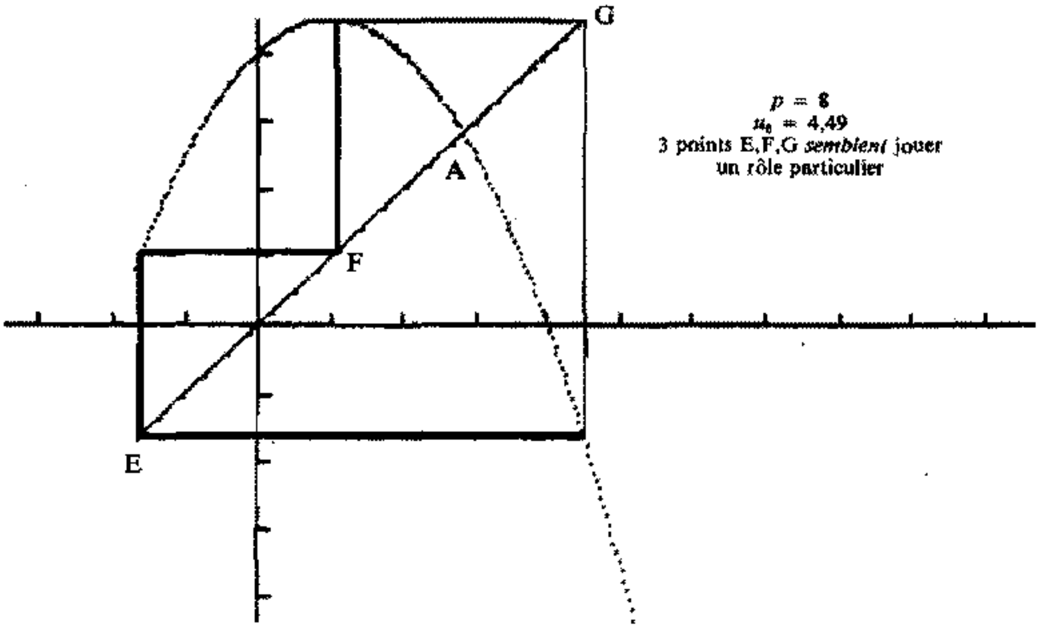
$p = 5$
$u_0 = 2$
destabilisation du point
$A(\sqrt{5}, \sqrt{5})$
et création
de 2 nouveaux points attractifs B et C



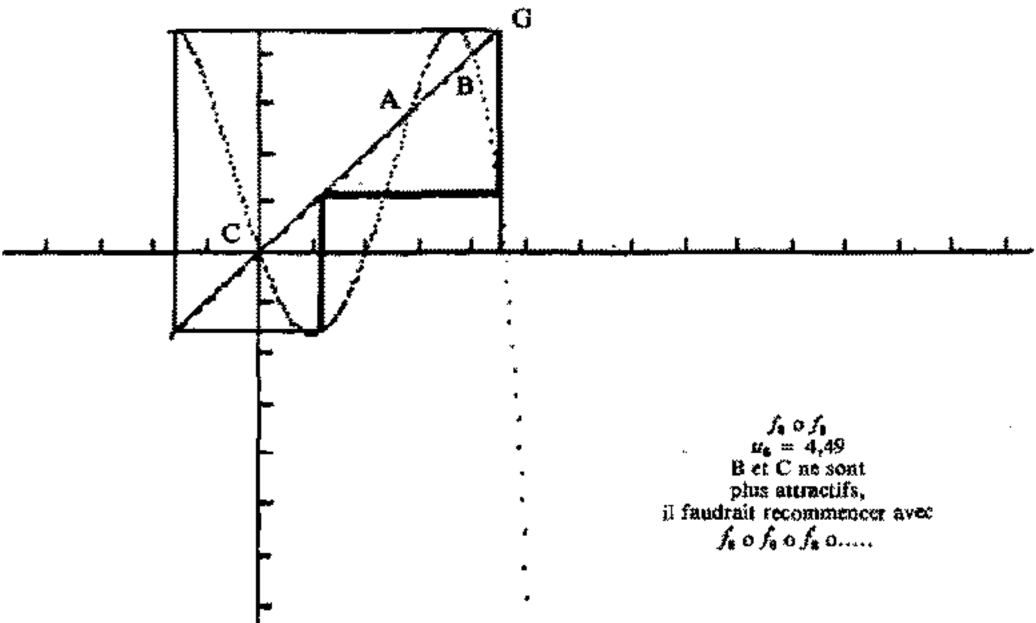
C est un nouveau point attractif
pour $p = 5$
C
A
u_0



$p = 5$
$f_5 \circ f_5$
création d'un nouveau
point attractif B
B
A
u_0



$p = 8$
$u_0 = 4{,}49$
3 points E,F,G *semblent* jouer
un rôle particulier



$f_8 \circ f_8$
$u_0 = 4{,}49$
B et C ne sont
plus attractifs,
il faudrait recommencer avec
$f_8 \circ f_8 \circ f_8 \circ \ldots\ldots$