les problèmes de l'A.P.M.E.P.

La rubrique comprend deux parties.

La première (Problèmes) se consacre à des énoncés inédits; la deuxième propose des exercices déjà posés (en particulier au CAPES et aux diverses olympiades) ou publiés qui, par leur caractère astucieux ou insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les propositions d'énoncés et de solutions doivent être adressées dactylographiées à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45
63170 AUBIERE

PROBLÈMES

ÉNONCÉS

Enoncé n° 92 (LEMAIRE, Lille)

Soit $E \subset \mathbb{N}^*$ l'ensemble des naturels dont l'écriture dans le système décimal utilise uniquement un chiffre, quelconque, une ou plusieurs fois.

Quels sont les éléments de E, carrés d'entiers ?

* Quels sont les éléments de E, cubes d'entiers ?

Enoncé n° 93 **(FULGENCE, Dijon)**

Soit S_n le sup des déterminants des matrices carrées d'ordre n dont tous les termes sont majorés par 1 en valeur absolue. S_n est un entier multiple de 2^{n-1}.

Donner une expression de S_n, ou à défaut, un encadrement.

SOLUTIONS

Enoncé n° 89 **(NICOLAS, Limoges)**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1} = u_0u_1\ldots u_n+1$.
Démontrer qu'il existe un réel c tel que $u_n = c^{2^n}+\frac{1}{2}-a_n$ avec $a_n \to 0$.

Solution : **(CUCULIÈRE, Paris)**

Pout tout $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = u_0u_1..u_{n-1}+1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_0u_1\ldots u_{n-1}u_n+1 = (u_n-1)u_n+1 .$$

La suite (u_n) peut donc se définir plus simplement par :

$$u_1=2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2-u_n+1 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 .$$

On voit alors d'où vient le 1/2 : de la bonne vieille forme canonique :

$$u_{n+1} = \left(u_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \text{, d'où } u_{n+1}-\frac{1}{2} = \left(u_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

On pose alors $v_n=u_n-\frac{1}{2}$ et il vient :

$$v_{n+1} = v_n^2+\frac{1}{4} = v_n^2\left(1+\frac{1}{4v_n^2}\right) .$$

D'où : $\ln v_{n+1} = 2\ln v_n+\epsilon_n$, avec $\epsilon_n = \ln\left(1+\frac{1}{4v_n^2}\right)$.

Il en résulte, pour $n \geqslant 1$: $\dfrac{\ln v_n}{2^n} = \dfrac{\ln v_1}{2} + \dfrac{\epsilon_1}{4}+\dfrac{\epsilon_2}{8}+\ldots+\dfrac{\epsilon_{n-1}}{2^n}$.

La suite (ϵ_n) est positive, décroissante et tend vers 0. C'est plus qu'il n'en faut pour que la série de terme général $\frac{\epsilon_n}{2^n}$ converge. Soit donc

$$K = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln v_n}{2^n} \text{, ou encore } K = \frac{\ln v_1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_m}{2^{n+1}} .$$

Il vient : $K-\dfrac{\ln v_n}{2^n} = \dfrac{\epsilon_n}{2^{n+1}}+\dfrac{\epsilon_{n+1}}{2^{n+2}}+\ldots$,

D'où : $2^nK - \ln v_n = \dfrac{\epsilon_n}{2} + \dfrac{\epsilon_{n+1}}{2^2}+\ldots = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\epsilon_{n+m}}{2^{m+1}} = T_n$.

Posons $e^K = c$, soit $K = \ln c$, et l'on a : $\ln \frac{c^{2^n}}{v_n} = T_n$, d'où : $\frac{c^{2^n}}{v_n} = e^{T_n}$, et enfin : $c^{2^n} - v_n = v_n(e^{T_n} - 1)$.

Mais on peut remarquer que l'on a :

$$0 \leqslant T_n \leqslant \epsilon_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = \epsilon_n = \ln\left(1 + \frac{1}{4v_n^2}\right) \leqslant \frac{1}{4v_n^2}$$

et que par conséquent $T_n \to 0$. Donc : $v_n(e^{T_n} - 1) \sim v_n T_n \leqslant \frac{1}{4v_n} \to 0$.

Si nous posons $v_n(e^{T_n} - 1) = a_n$, nous trouvons bien :

$$v_n = c^{2^n} - a_n \text{, soit } u_n = c^{2^n} + \frac{1}{2} - a_n \text{, avec } a_n \to 0.$$

Nous pouvons préciser que a_n tend vers 0 par valeurs positives, et plus vite que $\frac{1}{4u_n - 2}$, c'est-à-dire assez rapidement puisque $u_n \sim c^{2^n}$.

Calcul approché de c

Un petit programme sur HP29C permet d'obtenir une valeur approchée de $K = \lim \frac{v_n}{2^n}$ et donc de $c = e^K$:

```
g LBL 1      g LBL 2       v_n → R1
4            2             2^n → R2
g 1/x        STO × 2       1/4 → R3
STO 3        RCL 1
3            g x²
↑            RCL 3
2            +
STO 2        STO 1
÷            f ln
STO 1        RCL 2
             ÷
             g e^x
             f PAUSE
             GTO 2
```

On trouve $c \simeq 1,264\,083\,473\,5$.

Autres solutions, ANTETOMASO (Bourg-la-Reine) qui généralise aux suites $u_{n+1} = F(u_n)$ où F est une fraction rationnelle, BAYARRI : (Cernay), BECKER (Saint-Etienne), BOUTELOUP (Rouen), DUVERNEY (Lille), LECCIA (Aix-en-Provence) qui signale que PGCD $(u_n, u_m) = 1$ pour $m \neq n$, LEMAIRE (Lille), PERROT (Vincennes), PICHEREAU (Saint Yrieix), PETIT (Brest).

OLYMPIADES

ÉNONCÉS

Exercice 13

x et y sont deux entiers distincts appartenant à l'ensemble d'entiers naturels consécutifs E = {2, 3, 4,..., 78, 79, 80}.

On donne la valeur de la somme s ($s=x+y$) à un individu A.
On donne la valeur du produit p ($p=xy$) à un individu B.

S'engage alors le dialogue suivant :

A, ayant examiné s, déclare à B : "Vous ne pourrez pas trouver x et y".

B, ayant médité cette déclaration et la valeur de p, annonce : "J'ai trouvé x et y".

A, méditant sur tout cela annonce enfin : "J'ai aussi trouvé x et y".

Que vaut x ? Que vaut y ?

SOLUTIONS

Exercice 6 (CAPES)

Soient P(z) un polynome du troisième degré, de racines a, b, c et P'(z) son dérivé, de racines f et f'. Montrer qu'il existe une ellipse de foyers f et f' inscrite dans le triangle (a,b,c).

$P(z) = k(z-a)(z-b)(z-c)$
$P'(z) = k[(z-a)(z-b)+(z-a)(z-c)+(z-b)(z-c)] = 3k(z-f)(z-f')$

Solution

Le calcul de P'(a) donne la relation $\dfrac{a-b}{a-f} = 3\,\dfrac{a-f'}{a-c}$ qui implique géométriquement $(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF'}})$

Le deuxième théorème de Poncelet permet d'affirmer que la conique de foyers F et F', tangente à AB, est tangente à AC (et par permutation à BC).

Cette conique est une ellipse car F et F' sont dans la plaque triangulaire ABC. De façon plus générale, si $Q(z) = k\Pi(z-z_s)$,

$$\frac{Q'(z)}{Q(z)} = \Sigma\ \frac{1}{z-z_s} = \Sigma\ \frac{\overline{z}-\overline{z_s}}{|z-z_s|^2}$$

Pour une racine de $Q'(z)$ on a $\Sigma \dfrac{\overrightarrow{M_sM}}{M_sM^2} = \vec{0}$ et M est barycentre à coefficients positifs des M_s (théorème de Lucas).

Une réponse anonyme démontre géométriquement que l'ellipse qui a pour foyer F, tangente aux trois côtés, admet F′ comme second foyer ;DELPLA (Montpellier) donne deux solutions dont l'une, en utilisant les barycentres et les équations tangentielles démontre que les isotropes en F sont tangentes à l'ellipse; LEGRAND (Biarritz) et VIDIANI (Annecy) utilisent le deuxième théorème de Poncelet ; LEMAIRE (Lille) démontre analytiquement que les produits des distances de F et F′ aux trois côtés sont égaux ; ROUX (Le Puy) donne deux références pour ce problème (TAILLE *Problèmes de mathématiques* et JULIA *Exercices d'analyse*).

On peut ajouter que l'ellipse est tangente aux milieux des côtés et qu'elle est l'ellipse inscrite d'aire maximale.

Exercice 8

Démontrer qu'une droite divisant un triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre passe par le centre du cercle inscrit au triangle.

Démontrer une propriété analogue pour un polygone quelconque dans lequel on peut inscrire un cercle.

Solution

Dans le cas du triangle, on peut poser AM $= x$ et AN $= y$. Les conditions s'écrivent $2(x+y) = a+b+c$ et $2xy = bc$.

Un point P de la droite MN est donné par

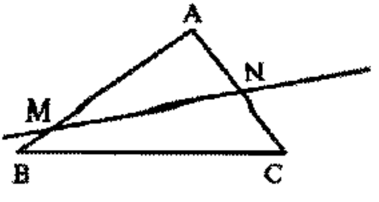
$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AM} + (1-k)\overrightarrow{AN} = \dfrac{kx}{c}\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{(1-k)y}{b}\,\overrightarrow{AC}$. Comme I a pour coefficients barycentriques a,b,c, il suffit de montrer l'existence de k tel que

$$\frac{kx}{c} = \frac{b}{a+b+c} \text{ et } \frac{(1-k)y}{b} = \frac{c}{a+b+c}$$

c'est-à-dire

$$\frac{bc}{x(a+b+c)} + \frac{bc}{y(a+b+c)} = 1$$

qui résulte immédiatement des conditions.

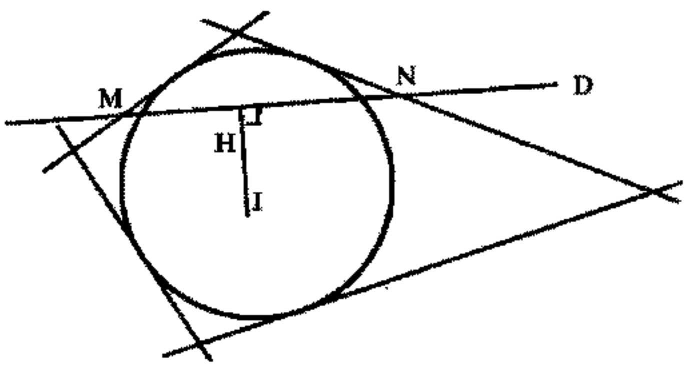


Dans le cas du polygone (convexe) désignons par M et N les points où la droite D coupe le polygone, par H la projection du centre I sur D, par r le rayon, par p_1 et p_2 les périmètres (sans compter MN) et S_1 et S_2 les aires délimités par la droite D.

On a $S_1 = \frac{1}{2}p_1 r + \frac{1}{2}$ IH.MN et $S_2 = \frac{1}{2}p_2 r - \frac{1}{2}$ IH.MN

$S_1 = S_2$ et $p_1 = p_2$ impliquent IH.MN = 0 donc IH = 0

Les solutions reçues, AYRAUD (Toulouse), LEMAIRE (Lille), NOTARI (Athis-Mons), VIDIANI (Dijon), sont très proches. Le premier nommé donne en plus une discussion complète du nombre de droites possibles par l'étude des racines de l'équation $2X^2 - (a+b+c)X + bc = 0$ qui donne x et y dans le cas du triangle.



Exercice 11

Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n, on peut trouver un nombre formé des chiffres 1 et 2 (dans le système décimal) et divisible par 2^n.

Solution (PONASSE, Lyon)

Pour $n = 0$, on a évidemment $2^0 = 1$.

Ensuite, on démontre par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété suivante : il existe un entier naturel k_n tel que $2^n.k_n$ s'écrive exactement avec n chiffres égaux à 1 ou à 2 :

$2^n.k_n = a_0 + 10.a_1 + \ldots + 10^{n-1}.a_{n-1}$.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ avec $k_1 = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour n, envisageons deux cas :

a) Si k_n est pair, posons $k_{n+1} = \dfrac{k_n + 2.5^n}{2}$

alors : $2^{n+1}.k_{n+1} = 2^n(k_n + 2.5^n) = 2^n.k_n + 2.10^n$, la propriété est vérifiée.

b) Si k_n est impair, posons $k_{n+1} = \dfrac{k_n + 5^n}{2}$

alors : $2^{n+1}.k_{n+1} = 2^n(k_n + 5^n) = 2^n.k_n + 1.10^n$, la propriété est vérifiée.

Remarques

Les premières valeurs de k_n sont : $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 14$, $k_4 = 132$, $k_5 = 691$,... Il faut remarquer que le procédé précédent ne donne pas, en général, la valeur minimum de k_n tel que $2^n.k_n$ ne s'écrive qu'avec les chiffres 1 ou 2 (en nombre quelconque). Par exemple, lorsque k_n est pair, il est évident que $\dfrac{1}{2}k_n$ convient pour 2^{n+1} (14.8 = 112, donc aussi 7.16 = 112). Lorsque k_n est impair, on peut également obtenir des valeurs plus petites pour k_{n+1} (66,32 = 2112). Malheureusement, il ne semble pas y avoir de procédé récurrent permettant de trouver la valeur minimum de k_n (du moins je n'en connais pas).

Autres solutions : BAYARRI (Cernay), CARREGA (Lyon), CUCULIERE (Paris), DESECOT (Cannes), DUVERNEY (Lille), FERREOL (Paris), LEMAIRE (Lille), MANACH (Lorient), ROUX (Le Puy) qui démontre que les nombres de n chiffres 1 ou 2 donnent toutes les classes modulo 2^n, VIDIANI (Dijon)