mathématique et société

Weierstrass et I.B.M.

par Liviu Solomon
Université de Poitiers

Le développement des moyens de calcul modernes semble imposer un ré-examen de l'enseignement des mathématiques, ainsi que des mathématiques intervenant en mécanique, physique, sciences de l'ingénieur, et tous les domaines où la démarche quantitative devient importante.

Pendant les dernières décennies, les enseignements ont changé en fonction des acquis de la science mathématique, mais ont été assez peu modifiés par les progrès du calcul automatique. Les problèmes sont souvent formulés dans l'optique "pré-ordinateur", et les machines sont utilisées pour traiter "par la force brute" des questions qui ont été pensées comme s'il n'y avait pas de machines du tout. A une époque où la détermination de valeurs propres et de vecteurs propres de matrices de taille 6000, et même 12000, est *chose qui se fait*, l'enseignement de base est encore trop proche de celui qu'on faisait à l'époque où l'on construisait le polynome caractéristique en développant suivant les mineurs, on cherchait ses racines, etc.

Nous nous limitons ici à quelques remarques sur des aspects *numériques* liés à l'utilisation des machines. Leur importance comme *manipulateurs de symboles* se situe à un niveau de complexité encore plus élevé. Les allusions aux aspects techniques seront assez brèves.

*

* *

Les moyens de calcul actuels ont plusieurs caractéristiques, dont une seule semble avoir frappé les imaginations : la rapidité du traitement automatique. Voici cependant d'autres faits non négligeables.

a) En une semaine ou un mois, dans un seul ordinateur, "passe" une quantité de calculs supérieure au travail calculatoire effectué depuis l'origine de l'humanité jusqu'à une date récente. Un tel "effet de masse" est de nature à transformer le traitement de questions classiques, et l'appartenance même de tel ou tel sujet au champ des mathématiques peut en dépendre. Voici un exemple concernant le calcul matriciel, dont chaque matheux, ingénieur, statisticien, etc., connaît l'importance.

Le calcul classique du produit de deux matrices $n \times n$ exige n^3 multiplications scalaires. En 1968, STRASSEN a réduit de 8 à 7 le nombre de multiplications pour $n = 2$, grâce à un algorithme à première vue compliqué. Des travaux ultérieurs ont permis la généralisation à des matrices $n \times n$ (avec $n^{2.807}$ multiplications si $n = 2^k$, k entier positif, et $\mathcal{O}(n^{2.807})$ multiplications pour n quelconque). Peu à peu (WINOGRAD, SCHÖNHAGE, PAN, etc.) on est descendu à $\mathcal{O}(n^{2.795})$, puis à $\mathcal{O}(n^{2.5161})$, et même vers $\mathcal{O}(n^{2.49})$ multiplications scalaires, au prix d'une plus grande complexité des programmes et de précautions pour éviter les risques d'instabilité. On peut déjà estimer (RICE, 1983) que l'algorithme de STRASSEN devient rentable pour les matrices de taille supérieure à 250. (KNUTH, 1981, est plus réservé ; voir cependant p. 481 et pass., ainsi que son "exercice" 12, p. 497). Si les algorithmes découverts après celui de STRASSEN pouvaient être mis en œuvre, les temps de multiplication seraient réduits d'une manière encore plus considérable : pour $n = 1000$, $n^{2.5}$ vaut 3 % de n^3... Quel mathématicien "de type classique" aurait pensé analyser la multiplication de matrices 2×2 ?

b) Les "êtres numériques de base" ne sont plus les "réels" de WEIERSTRASS et DEDEKIND, mais les "nombres-machine", agrégats en nombre *fini* de nombres, connus avec un nombre *fini* de chiffres significatifs. Les propriétés des opérations fondamentales (sur lesquelles repose toute la mathématique "calculatoire") ne sont plus toutes respectées : l'associativité et la distributivité peuvent se trouver en défaut, le quotient a/b peut ne pas être égal à $(1/b) \times a$, etc.

Une des idées-clé des mathématiques, le concept d'ensemble muni d'une loi de composition et *stable* par rapport à cette loi, ne peut pas être "copiée" sur machine : l'ensemble des nombres-machine n'est stable ni par rapport à l'addition, ni par rapport à la multiplication. Comment utiliser, comment enseigner désormais les notions de *groupe*, de *corps*, d'*espace vectoriel*, etc., notions qui gardent une importance décisive ? La difficulté existe, il faut en tenir compte.

La "perte de précision par soustraction de nombres proches" n'a aucun sens en mathématiques classiques — elle devient une épée de Damoclès au-dessus de chaque calculateur. Le concept d'*égalité* change : il peut être associé à l'idée d'*affectation* (nom = expression, nouvelle opération fondamentale !), à l'idée de *test* (VRAI ou FAUX ?).

Le centre et le rayon d'une boule ne sont plus *numériquement* définis comme avant, la topologie sera probablement amenée à en tenir compte. Et peut-être l'Analyse non standard va se trouver propulsée vers le devant de la scène.

Le passage à la limite, la dérivation, l'intégration, ne peuvent pas être "copiés", ils doivent être "simulés" : il y a sûrement un grand effort à faire pour analyser ces réalités du calcul.

L'indépendance linéaire se présente sous un jour nouveau. Le théorème sur la dimension d'un espace vectoriel n'a plus de "substance" : un système d'éléments peut être linéairement dépendant sur une machine, indépendant sur une autre (ou sur la même machine, en fonction de la précision choisie...). La dépendance continue des résultats par rapport aux données et leur "sensitivité" apparaissent sous un nouvel éclairage : c'est le problème du *mauvais conditionnement*, absent de presque tout ouvrage antérieur à 1970.

Parmi les racines d'un polynôme, quand doit-on en regarder certaines comme distinctes, ou multiples, ou "proches" ? La même question se pose pour les valeurs propres d'une application linéaire, se répercute sur la détermination des vecteurs propres, sur la présence de termes séculaires dans la solution d'un système différentiel, etc.

c) Le traitement rapide de grandes masses de données (arrondies ou tronquées), suivant des règles non identiques aux règles "idéales", entraîne la formation, la propagation, souvent l'*amplification* des *erreurs* dans des proportions jamais connues. (Il s'agit parfois de l'accumulation de déviations infimes, parfois d'un seul "accident" qui se propage avec les effets dévastateurs d'une onde de choc...). Des machines et des programmes indiscutables peuvent conduire à des aberrations. Il n'y a plus de "contrôle continu" de la part de l'être humain — mais seulement celui interne au programme et à la machine. Est-il inutilement restrictif ? Est-il "laxiste" ? On ne le sait pas d'avance... D'où des questions de fiabilité des résultats, d'optimisation des prix des calculs (un programme "prudent" peut être cher...), de création, de maintenance et de développement du logiciel — et des moyens liés à ce développement. Là encore, *ce qui appartient aux mathématiques* change avec les moyens de calcul. (On peut penser à l'analyse des erreurs à la von NEUMANN, et à la *backward analysis* de WILKINSON).

d) Nous voulons poser à l'ordinateur des *problèmes*, nous recevons en fait des *nombres*... Si l'on examine la *signification* de ces nombres, on voit que nous avons peu d'indications sur la précision à imposer dans les calculs (donc sur leur prix), sur la précision du résultat par rapport aux données. En paraphrasant PARLETT : une très bonne solution ne vaut rien — si nous ne savons pas qu'elle est très bonne !

Et devant les kilomètres de papier éjectés par les imprimantes, comment ne pas se souvenir du mot de HAMMING :

"The purpose of computing is *insight*, not numbers".

*

* *

Quels qu'aient été les progrès des mathématiques, leur cadre est encore délimité (sommairement) par les axiomes de la théorie des ensembles et par la structure du corps des nombres réels (FORSYTHE : *The badly named real numbers*). CAUCHY, RIEMANN, LEBESGUE, HILBERT pourraient se mettre au courant sans trop de peine... Ce qui est *essentiellement nouveau*, c'est l'outil de calcul, et cet outil va *imposer* des changements dans les structures des mathématiques.

Tout est question de proportions, de rythmes, de moyens (donc de budget et de personnel !). Les mathématiques sont aujourd'hui enseignées comme elles se sont formées dans des esprits critiques, analytiques, déductifs, abstraits ; l'influence du monde récent du calcul — avec ses errements, ses conjectures, ses paris parfois risqués — a été marginale. (Hasards de l'histoire ? NEWTON, EULER, LAPLACE, GAUSS, HILBERT, HADAMARD ont vécu très vieux. Les génies des mathématiques calculatoires et des nouvelles structures des mathématiques, comme TURING, von NEUMANN, RUTISHAUSER, n'ont pas atteint 55 ans... On ne voit pas souvent ces noms dans les Encyclopédies, l'étudiant ne les entend pas souvent. Tout le monde connaît les nombres binaires, les sigles IBM ou FORTRAN — mais qui peut nous dire qui étaient STIBITZ, BACKUS, ZUSE, Grace HOPPER ? La méthode de CHOLESKY figure dans toutes les bibliothèques de programmes — qui sait que c'était un officier français, du service de Géodésie de l'Artillerie, tombé au front en 1918 ?).

On pose à l'ordinateur des problèmes formulés comme il y a 30 ans : simplement, on prend beaucoup de termes, de points de discrétisation... Les étudiants sont insuffisamment préparés à la mutation en cours. On leur apprend à "faire tourner" des programmes acceptés comme des "boîtes noires", presque comme une succession de recettes, sans avoir délimité ce qui vient du *problème*, de ses *aspects calculatoires*, des *mécanismes numériques* de la machine, ou du *langage de programmation*. Il serait impossible de "démonter" toutes ces boîtes pour en comprendre le détail. Mais il faudrait au moins les comprendre comme des "boîtes grises" (FORSYTHE), intégrées à un enseignement qui tienne compte du monde *réel* des mathématiques calculatoires, *qui vivent et qui sont au travail*, là, dans les salles à côté...

Plus de la moitié des appels de programmes dans les centres de calcul concernent l'algèbre linéaire, avant tout : la résolution de systèmes d'équations, et la détermination de valeurs propres et de vecteurs propres. Cela s'explique par l'importance intrinsèque des applications linéaires ; par leur rôle dans l'approximation d'applications non linéaires ; par les schémas de discrétisation qui ramènent des problèmes d'équations aux dérivées partielles, et autres, à des systèmes d'équations linéaires (de *très* grande taille). La conception et les qualités (rapidité, précision, etc...) des algorithmes dans ce domaine est donc d'importance majeure, et il devrait en résulter un renouvellement de l'*enseignement* de l'algèbre linéaire, *au tout début* des enseignements.

En algèbre, en analyse, en équations différentielles, etc., on peut trouver des exemples d'établissements où le déséquilibre entre le niveau élevé et abstrait des cours et la faiblesse de l'apprentissage des questions numériques, est *la règle*. Ceci devrait inquiéter, car il pousse à une consommation excessive et médiocre des moyens de calcul. Et, comme le dit STRANG (du M.I.T.) : *Even our most successful students tend to become adept at abstractions, but inept at any calculation.*

L'effort du calculateur humain a été imité *en aval* de la pensée mathématique — comme si chacun avait à sa disposition un million d'esclaves pour faire des multiplications en chaîne... Il me semble que c'est *en amont* que les choses doivent changer, à partir du DEUG, du DUT, des classes préparatoires — du lycée, et même de l'école primaire.

*

* *

L'histoire de la science a connu, me semble-t-il, un seul phénomène "technique" comparable à l'apparition de l'ordinateur : c'est la formation et la généralisation de l'écriture positionnelle (indo-arabe) des nombres. Ceci a permis une extraordinaire accélération du processus calculatoire, a rendu possibles des calculs qu'on ne pouvait ni aborder, ni *concevoir* avant ; et a ouvert la voie à des concepts nouveaux, à un *contenu nouveau* des mathématiques. La multiplication, la division, l'extraction de racines ont conduit à un développement sans précédent du "calcul" ; l'étude des "équations", puis des fonctions numériques, a fait son apparition ; celles de la dérivée et de l'intégrale en ont découlé ; les équations différentielles, puis les équations aux dérivées partielles ont occupé le devant de la scène — ce dont on n'aurait même pas rêvé si le système de numération romain (MCMLXXXIV au lieu de 1984 pour nous, 11111000000 pour une machine en base 2) avait été maintenu. La nouvelle écriture a été une véritable "machine à calculer", et cette machine (en conjonction avec *les notations littérales*) a imposé une révolution *en amont*, l'apparition de VIETE, de DESCARTES et de PASCAL, la naissance de la Mécanique de GALILÉE et de NEWTON : les mathématiques d'aujourd'hui sont issues en droite ligne de concepts forgés en cette époque-là, moins de 10 générations avant nous.

Il y a eu des universités où cette "révolution numérique" n'a pas été acceptée. Elles en sont mortes... Se sont développées les universités qui ont su maîtriser ces "nouveaux moyens de calcul", concevoir et enseigner les notions nouvelles que l'accélération des calculs déversait sur le monde de la science. Le "folklore mathématique" dit que l'une des raisons du succès de l'Université de Göttigen, vers la fin du Moyen-Age, aurait été le fait qu'on y a enseigné très vite, et de façon très poussée... la multiplication.

Il y a eu, comme toujours et partout, résistance et freinage. Où en serions-nous si les nouvelles méthodes avaient été reléguées dans un "ghetto calculatoire", à l'écart des "grandes mathématiques" ? Quelle projection en déduire pour notre propre avenir ? Pour ceux qui, dans un an, dans dix ans, auront à prendre la relève ?

Avec le "nouveau calcul", avec le développement de la technologie (technologie de guerre comprise, hélas !... GALILÉE étudiait déjà le comportement des galères vénitiennes sur mer agitée), on avait vu naître une science courageuse, un effort d'invention, d'expérimentation mentale. Les périodes de révision critique *(indispensable !)* et de construction "du général au particulier", sur des bases que l'on imagine comme étant "rigoureuses", paraissent alterner dans l'histoire avec les périodes où des horizons nouveaux s'éclairent. Et il se peut que cette fin du XX[e] siècle soit justement une nouvelle époque de l'*intuition*, de la *construction*, de l'*heuristique mathématique* — que mettront en ordre les critiques et les analystes du XXI[e] siècle.

Car ces moyens de calcul qui existent, *qui pourraient nous appartenir*, ouvrent eux aussi les portes vers l'expérimentation, la simulation numérique, vers la construction et la fantaisie dans ce siècle glacé ! Ils peuvent rendre attractive, passionnante, l'étude de disciplines qu'une grande partie des jeunes se représentent comme une suite de formulations austères, sans rapport avec la vie — donc sans intérêt. Si les jeux électroniques ont le succès qu'on sait (limité à la petite partie de la planète ne vivant pas sous l'emprise de la famine et de la terreur), on peut le voir comme un signe de futilité, ou de déclin. Mais c'est la manifestation de *tendances réelles* de jeunes que l'école "classique", *plaquée sur une vie et un environnement qui ont changé*, attire de moins en moins ! Et il serait cependant facile de montrer, *à l'école*, que la simulation sur ordinateur d'un voyage au travers du système solaire est au moins aussi intéressante que les jeux, genre "Space invaders".

*
* *

On voit bien où nous en sommes, si l'on regarde les recueils de sujets de baccalauréat : souvent instructifs, ils sont le reflet des années d'apprentissage de leurs auteurs. Ajoutons qu'ils sont *difficiles* ; qu'ils témoignent d'une conception *élitiste* de l'enseignement ; qu'ils auraient pu avoir été *conçus* il y a des dizaines d'années. Mais est-ce que (*) la "décomposition directe d'une isométrie rétrograde" peut faire frémir de joie un adolescent de 1983 ? Va-t-il reconnaître l'importance des "endomorphismes unipotents", juste après avoir regardé à la télévision le lancement de la fusée Ariane ? L'étude d'une "sous-algèbre unifère engendrée par une matrice trigonale" est-elle la meilleure voie pour conduire ces jeunes vers la compréhension de la *beauté* et de la *puissance* de la pensée scientifique ?

On pourrait discuter du bien-fondé de telles orientations s'il s'agissait de programmes de lycées réservés à de futurs matheux... Mais nous voyons là ce qu'on demande *à des centaines de milliers de jeunes*, année après année — et ils seront ingénieurs, médecins, employés de banque, cadres moyens dans l'industrie... Les sous-algèbres unifères sont-elles vraiment obligatoires pour tous, de 7 à 70 ans ?

Je n'exprime ici qu'un sentiment personnel : à la lecture des recueils de sujets de baccalauréat (ceux *qui existent* ; des changements sont attendus dans un proche avenir) ; à la lecture de certains manuels pour l'enseignement secondaire — je trouve *un tiers de choses importantes, un tiers de subtilités de spécialiste*, et *un bon tiers de terminologie...*

Les orientations du baccalauréat sont significatives, car c'est *là* le passage de l'enseignement *pour tous*, vers la vie active ou vers l'enseignement spécialisé. Or, c'est dans l'enseignement supérieur spécialisé qu'ont pris naissance les priorités, je dirai : l'*idéologie* mathématique qui se reflète dans ces recueils de problèmes destinés *au pays tout entier* — avec tout ce qu'elle implique comme dogmatisme, excès et pédanterie.

Il y a *un abîme* entre ces recueils et le projet "cent mille micro-ordinateurs dans les écoles". Et sans des dizaines de milliers d'*enseignants* bien formés, convaincus, enthousiastes — on n'aurait là que 100 000 assemblages de métal et de plastique...

(*) Les *titres* entre guillemets ont été choisis (avec un zeste de mauvaise foi...) dans le recueil des sujets du Bac 1982, séries C et E, coll. Point Vert, Hachette, 1983. L'*énoncé* de chacun des problèmes couvre, comme il se doit, une ou deux pages...

Dix mille, cent mille micro-ordinateurs dans les écoles, seraient utilisés d'une manière inepte si l'on se résumait à "laisser les jeunes pianoter sur les consoles" (entendu à la radio...). Le savoir et le pouvoir seront là où "l'outil informatique" sera fortement couplé avec les connaissances mathématiques adéquates. "L'informatique" dont on parle tant *n'est pas un jeu, n'est pas une chose facile*, on ne peut pas s'en servir comme on le fait quand on appuie sur les touches d'un poste de télévision !

Les mathématiques enseignées aujourd'hui sont par trop une science de la "vérité révélée", une science du résultat dans sa perfection et non celle du cheminement pénible. Mais l'esprit humain est un esprit indocile, curieux, inventif, que toute vérité révélée ne peut qu'ennuyer et rebuter. C'est ce qui se passe avec des centaines de milliers de jeunes qui digèrent mal les mathématiques dites "abstraites", et qui se précipitent, *avant* leurs enseignants, vers les machines miraculeuses...

Le moment me semble venu de reprendre (forts d'une expérience que personne ne veut sous-estimer !) les débats sur les programmes, voir ce qu'il faut faire, et le faire *raisonnablement vite*. Ce sont les *structures fondamentales* qui sont touchées, c'est depuis l'enseignement primaire et secondaire qu'il faut en tenir compte. L'expérience accumulée par les collègues *du primaire et du secondaire* doit être mise à profit.

Il y a, au tout début de l'apprentissage des modes de pensée et des concepts mathématiques, beaucoup de choses qui peuvent changer. Ainsi, en géométrie élémentaire, le théorème de Pythagore a survécu... L'idée de *programme* = "recette" qui ne change pas lorsque les données numériques changent, peut aisément être présentée à propos de ce théorème — comme à propos de tout résultat obtenu sous forme littérale, à "traduire" sur de petites machines. L'équation algébrique du second degré est une question importante. On doit aujourd'hui aller au-delà des exercices avec des coefficients "faciles", présenter peut-être ici la notion de *test* (le discriminant est-il négatif ?), de branchement, les dépassements, la perte de précision. Les *systèmes* d'équations linéaires ne devraient plus être enseignés "à la CRAMER", c'est la méthode de GAUSS qu'on pourrait expliquer, "montrer à l'œuvre". On pourrait *distribuer* aux écoliers des calculatrices (pourquoi pas des machines en BASIC vers les classes de seconde ?), leur faire "sentir du doigt" les difficultés, les *possibilités* nouvelles. Ce ne serait pas une "dépense", ce serait un *investissement* !

*

* *

Essayons de regarder sans idées préconçues l'échiquier international des maths. Avec la première guerre mondiale, a pris fin la domination de la France, de l'Allemagne, de l'Angleterre en mathématiques pures et appliquées. Les grandes puissances en mathématiques sont, que cela plaise ou non, les USA et — en moindre mesure — l'URSS. C'est là que se trouvent la plupart des mathématiciens, les revues de circulation mondiale, les étudiants, les universités et les écoles d'ingénieurs en plus grand nombre. Il faut donc regarder avec attention à ce qui se fait à Stanford (par exemple : FORSYTHE (1917-1972...), KNUTH (né en 1938 !), qui sont déjà des classiques), ou à Novosibirsk (par exemple, MARCHUK). A propos du chapitre vital de l'algèbre (celle où il n'y a plus de formules de CRAMER, et assez peu de déterminants...), on peut penser aux enseignements (élémentaires, mais *nouveaux*) de STRANG (du M.I.T.) ou de VOEVODINE (Moscou), ou à celui (non élémentaire) de PARLETT (Berkeley). Et ceci — sans rapport avec toute idiosyncrasie politique ou nationale ! Car toute école de pensée se juge d'après les résultats et, en l'occurrence, d'après son *pouvoir* d'influencer l'enseignement et la recherche dans le monde — avant tout, chez les super-puissances mathématiques.

Tout "protectionnisme mathématique" serait une aberration. Le contexte international, on le voit dans l'orientation des enseignements, et dans les bibliographies. Cela peut sembler parfois altéré par des facteurs non intrinsèques, comme la domination de la langue anglaise dans le champ de la science. Mais la connaissance de ce qui est *réel* ne peut pas nuire. Et la domination de la langue anglaise n'est pas sans rapports avec la qualité souvent remarquable de ce qui se fait aux USA.

Il est instructif de *comprendre*, au moins de *savoir* que les grandes bibliothèques de programmes à vocation d'enseignement et de recherche sont la N.A.G. (Oxford) et I.M.S.L. (Houston, Texas). Savoir que la N.A.G. dessert 400 centres de calcul dans 30 pays, jusqu'en Australie et en Tchécoslovaquie. Savoir que la I.M.S.L. est en train de rendre opérationnel le "super-langage" PROTRAN. Se poser peut-être à soi-même la question : "ai-je analysé ne serait-ce que *la liste* des programmes NAG ou IMSL ?". Il me semble que c'est *là* qu'on trouve les faits essentiels de la vie mathématique — donc d'une grande part de la puissance intellectuelle, donc de l'*efficacité* et de la *puissance*. Les faits sont têtus, ils ne s'évanouissent pas à force de commentaires condescendants sur la série télévisée "Dallas". *C'est Houston qui est important pour nous,* non Dallas !

Et au-delà des super-puissances, doit-on attendre que le Japon devienne la troisième puissance en mathématiques ? Le pays qui met en service le plus grand nombre de robots industriels, et qui dépose le plus grand nombre de brevets d'invention par an, c'est ce pays-là qui fera non seulement les ordinateurs dits "de la cinquième génération", mais aussi les meilleures mathématiques. (Signalons la parution prochaine chez Springer d'une revue *japonaise* en langue *anglaise*, consacrée aux ordinateurs de la cinquième génération.) Il ne s'agit pas d'*exagérer* l'importance de ce qui se passe ailleurs, mais des exemples comme celui du Taïwan (cf. M. NIVAT dans le "Nouvel Observateur") *méritent réflexion* (*).

Il est clair et indiscutable que toute entrave au développement des branches *les plus abstraites* des mathématiques serait une absurdité. Mais il serait tout aussi absurde de sous-estimer l'importance *décisive* que prend la création, le développement, l'utilisation d'un *logiciel mathématique-informatique* de haute qualité. Ceci ne pourra pas se réaliser si l'enseignement des mathématiques comme enseignement *de masse* ne fait pas très attention à ce qui se passe dans la Vallée des Silicones, au Japon, à Taïwan, ailleurs. Observer, écouter, actualiser en prenant le meilleur — les Japonais nous ont bien montré ce que cela donne...

Vers la fin du siècle, il ne sera plus *tenable* d'enseigner la continuité et la dérivation comme à la fin du 19e (seule la terminologie a fortement changé...) ; on ne pourra plus enseigner la Mécanique élémentaire comme en 1900 ; on ne pourra plus faire la Résistance des Matériaux d'après le cours que TIMOSHENKO professait à Kiev vers 1910, et qui est encore la source d'inspiration de pas mal d'enseignants... On n'aurait pas créé la mécanique de NEWTON avec la numération romaine — on ne pourra pas créer la mécanique, la physique, *donc* les mathématiques du 21e siècle en faisant semblant d'ignorer "les machines". En attendant, il est frappant de voir le rôle de véritables O.S. que jouent les techniciens des centres de calcul — loin des cathédrales de la pensée abstraite.

*

* *

Une politique mathématique ne peut pas se faire sur le "principe" : "achetez des machines plus chères, nous vous ferons des calculs plus compliqués". Le logiciel représente aujourd'hui 90 % des coûts, le matériel n'y est plus que pour 10 %, les rapports se sont inversés en comparaison avec les années 50-60 : c'est que le logiciel avance plus lentement, et l'enseignement des mathématiques, plus lentement encore...

Il semble impossible que les chercheurs et les enseignants puissent maîtriser "chacun pour soi" le nouvel outil de calcul. On ne peut plus dire : "on va bricoler", "les gens vont se débrouiller", "il n'y a qu'à pas-

---

(*) Quelques mots sur certaines expériences en matière d'*édition*.
En URSS on traduit systématiquement la littérature scientifique occidentale et on en assure la diffusion à grand tirage. Ainsi, les livres de KNUTH ont été traduits en russe, dans un tirage sûrement très grand. (Je connais le tirage de la traduction russe du livre de GOODMAN et HEDETNIEMI : 37500 exemplaires, à faire pâlir McGraw-Hill...)
Parmi d'autres, il y a aussi une traduction de KNUTH en langue roumaine : tirage 6500 exemplaires. Il y a aussi une traduction en espagnol.
Voici aussi un exemple "grand public". L'excellente "Petite Encyclopédie des mathématiques", sous la rédaction de H. REICHHARDT, publiée en 1965 en R.D. Allemande, et traduite depuis en français, en anglais, etc., a eu à Leipzig, entre 1965 et 1967, un tirage de 265000 exemplaires !

ser sur ordinateur", etc., locutions que chacun a entendu. Depuis le scanner et jusqu'aux vols dans l'espace, depuis l'enregistrement des symphonies de Beethoven et jusqu'aux machines à commande numérique, *l'interprétation numérique et le traitement automatique de l'information sont juste au centre de l'attention et du travail*, et cette réalité essentielle ne doit plus être traitée comme *un détail.*

Je ne suis en aucun cas en mesure de commenter l'*utilisation des moyens de calcul par les grands organismes de recherche.* Ce qui me préoccupe, c'est l'enseignement — un problème majeur de société. Car *il n'y a pas "d'industrie" plus importante pour un pays que son enseignement* ! Ce qui est enseigné aujourd'hui détermine à bien des égards la technologie de demain, et le profil du baccalauréat de 1984 entre pour beaucoup dans le profil de l'industrie (et de la culture) de 2014.

On ne peut pas attendre que le passage du temps et la montée de générations nouvelles assurent, par osmose, le changement de mentalités et la vraie maîtrise des moyens de calcul. Ces moyens, couplés aux moyens mathématiques adéquats, auront peut-être, pour la société de demain, une importance comparable à l'importance qu'a eue il y a un siècle l'école obligatoire et gratuite, l'école qui a changé le visage des nations.

*

* *

Le problème des rapports entre les mathématiques, les moyens de calcul, les utilisateurs, ce problème *existe.* Il est impossible de s'en "débarrasser", en le "repoussant vers les utilisateurs", ou en laissant dire : "ce n'est pas mon problème, je ne suis pas matheux", ou "ce n'est pas mon problème, je ne suis pas informaticien". On ne peut pas "deviner" à quoi vont ressembler les enseignements de mathématiques dans 30 ans. Tôt ou tard, il y aura au moins des "glissements" dans les cursus, la répartition des moyens, des emplois, du budget. Il ne s'agit pas de réduire la science (et son enseignement) à ne faire que de l'utilitarisme — mais de montrer dans les faits que le rôle de l'école dans l'état et l'avenir de la société nous préoccupe vraiment. Il me semble que cette preuve passe par l'adaptation sans hésitations *au nouveau matériel, au nouveau logiciel.*

La présence des terminaux sur les campus est importante et stimulante, mais elle ne transforme pas les gens en spécialistes. A ce jour, ils font leur "adaptation" souvent seuls — et c'est un hommage à l'esprit de l'initiative individuelle et au sens des responsabilités individuel. L'Université suit lentement, comme tout organisme complexe, avec son effarante inertie. Peut-être que les départs à la retraite devraient permettre d'attribuer une tranche importante de postes à de jeunes numériciens et de jeunes informaticiens (ce n'est pas le même métier !) pour qu'ils aillent *là où se font les mathématiques calculatoires* — et réfléchir aux mathématiques, aux langages, aux machines à venir. Au lieu de laisser les gens "se débrouiller", on devrait peut-être réunir (sans précipitation, mais sans retard) des spécialistes de formations différentes, dans des structures *de plus en plus pluridisciplinaires*. Envoyer plus souvent les jeunes à l'étranger. *Fermer*, et non pas laisser se creuser le fossé absurde entre les mathématiques "pures", et les mathématiques *telles qu'elles sont utilisées par la société*.

De nouveaux équilibres sont en train de s'établir : il faut plus de place dans l'enseignement pour le *calcul numérique*, l'*algorithmique*, la *programmation*. Une sensibilité accrue pour les besoins de l'industrie. Car toute hésitation devant les mutations des *techniques* liées aux mathématiques "appliquées" (à la physique "appliquée", etc.) ne peut que maintenir, *créer* des marchés pour I.B.M. et Matsushita...

*

* *

Il serait téméraire, déplacé, d'essayer de dresser un catalogue de problèmes ; on peut tout au plus en énumérer quelques-uns qui ont des chances d'engendrer des développements *mathématiques*. Ainsi : ce qui est lié à la formation, la propagation, l'amplification du "bruit numérique" qui vient détériorer le "signal" (avec, peut-être, une forte participation du calcul des probabilités) ; des estimations "nécessaires et suffisantes" du nombre de chiffres significatifs à utiliser, et son "adaptation" suivant l'avancement du calcul (peut-être avec des "retours en arrière" et une "précision variable" — que les méthodes d'intégration dites "adaptatives" utilisent, mais que les machines actuelles, avec des "mots" de longueur fixe, ignorent) ; la focalisation sur des algorithmes optimaux par rapport à des paramètres prescrits ou souhaités (vitesse, précision ; comme exemple on peut penser à l'intervention surprenante de la transformée de Fourier rapide (FFT) dans la multiplication des nombres avec un *très grand* nombre de chiffres significatifs) ; la géométrie des situations critiques (par exemple, la position spéciale des problèmes "stiff" dans le cadre des équations différentielles, avec, peut-être, des développements du côté de la topologie) ; les profils de programmes, l'optimisation des transferts (de valeurs numériques, ou de "pages" de programmes) ou des tests ; les possibilités des machines vectorielles et des machines parallèles par rapport aux machines séquentielles (celles pour lesquelles ont été conçus le FORTRAN, l'ALGOL, le BASIC) ; les nouveaux langages (ADA ? PROLOG ?) ; etc. *Si tout cela existe déjà — eh bien, tant mieux* : il ne resterait qu'à le savoir, à le diffuser efficacement...

Sinon, il y a le risque que ceci nous arrive en Europe "en kit" par l'intermédiaire de livrets de machines venant des USA ou du Japon...

*

* *

Les mathématiciens se comptent déjà par centaines de milliers, demain, par millions. Les difficultés du métier sont immenses, et une vie de mathématicien anonyme comporte au moins deux ou trois "reconversions", au cours desquelles on s'éloigne de ce qu'on *croyait important*, et on pense entrevoir des reflets du futur : *ce qui devient important*. Il n'est pas indispensable d'être au tout premier rang pour réfléchir. Les dons, la curiosité, les responsabilités administratives sont répartis de manière inégale ; la responsabilité pour l'avenir de ce métier passionnant et aux multiples facettes est la même pour nous tous.

Bibliographie

A la suggestion de la Rédaction, j'ai essayé d'établir une *bibliographie*. C'est plutôt une micro-liste de choix, de préférences, une mesure de la disproportion entre ce qui est sorti des presses et ce qu'on peut espérer lire, comprendre, utiliser...

Je me suis limité à des *ouvrages étrangers*. D'une part, parce que les livres publiés en France sont disponibles dans les bibliothèques. D'autre part, parce que le fait d'établir une telle liste pose des problèmes de choix, de hiérarchie des valeurs — et j'estime qu'il y a des collègues qui sont mieux placés que moi pour le faire.

En ce qui concerne les livres étrangers, l'enseignant d'une université de province doit d'abord *les repérer, se les procurer* ensuite. J'ai le sentiment que les bibliothèques ne sont pas à jour. Sur les 22 livres de cette micro-liste étrangère, je n'en ai trouvé sur place que 5, et il y a des textes qui existent quelque part, mais que je n'arrive pas à obtenir. (Le prêt inter-bibliothécaire fonctionne d'autant moins bien que l'ouvrage que l'on cherche est récent et intéressant...) Il me semble ainsi avoir un retard de 5 ans (10 ans ?) par rapport à ce que l'enseignant moyen d'une université américaine moyenne peut trouver dans les bibliothèques de son campus.

1. ACTON, F., Numerical methods that (usually) work. Harper & Row, New York, 1970.
2. CARNAHAN, B., LUTHER, H., WILKES, J., Applied numerical methods. J. Wiley, New York, 1969.
3. DAHLQUIST, G., BJÖRK, A., Numerical methods. Prentice Hall, New Jersey, 1974.
4. FORSYTHE, G.E., Pitfalls in computation, or Why a math book isn't enough. Amer. Math. Monthly, 77, 1970, pp. 931-956.
5. FORSYTHE, G.E., MALCOLM, M., MOLER, C., Computer methods for mathematical computations. Prentice Hall, New Jersey, 1977.

6. GOLDSTINE, H., History of numerical analysis from the 16th through the 19th century. Springer, New York, Berlin, 1977.

7. GOODMAN, H., HEDETNIEMI, S., Introduction to the design and analysis of algorithms. McGraw-Hill, New York, 1977.

8. HENRICI, P., Essentials of numerical analysis. J. Wiley, New York, 1982.

9. KNUTH, D.E., The Art of computer programming. (Vol. 1.) Fundamental algorithms. (2e édition, 7e tirage.) Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.

10. KNUTH. D.E., The Art of computer programming. (Vol. 2.) Seminumerical algorithms. (2e édition.) Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

11. MARCHUK, G.I., Méthodes de calcul numérique. Ed. Mir, Moscou, 1980. (Ed. russe : 1977).

12. MAURER, H.A., WILLIAMS, M.R., A collection of programming problems and techniques. Prentice Hall, New Jersey, 1972.

13. METROPOLIS, N., et al. ("editor"), A history of computing in the 20th century. Academic Press, New York, London, 1980.

14. N.A.G., Mini-Manual, Mark 9. Numerical Algorithms Group, Oxford, 1981.

15. von NEUMANN, J., Collected works, vol. 5. Pergamon Press, Oxford, 1963.

16. PARLETT, B., The symmetric eigenvalue problem. Prentice Hall, New Jersey, 1980.

17. RICE, J.R., ("editor"), Mathematical software. Academic Press, New York, London, 1971.

18. RICE, J.R., Numerical methods, software, and analysis. McGraw-Hill, New York, 1983.

19. STERBENZ, P.H., Floating point computation. Prentice Hall, New Jersey, 1974.

20. STOER, J., BULIRSCH, R., Introduction to numerical analysis. Springer, New York, Berlin, 1980.

21. STRANG, G., Linear algebra and its applications. (2e édition.) Academic Press, New York, London, 1980.

22. VOEVODINE, V., Principes numériques d'algèbre linéaire. Ed. Mir, Moscou, 1980. (Ed. russe : 1977.)

23. WILKINSON, J.H., Rounding errors in algebraic processes. H.M.'s Stationery's Office, no. 32, London, 1963.

Le livre de KULISCH et MIRANKER (Computer Arithmetics, Academic Press, New York, 1980) semble intéressant.

Il est parmi mes "introuvables"...

Commentaires sur la micro-liste.

Au no. 4 : un article "de combat" de l'ancien chef du Centre de calcul de Stanford. Le titre parle de lui-même.

Au no. 5 : un petit nombre de questions, étudiées avec tous les détails, et le souci de mettre en évidence ce qui est essentiel.

Aux no. 9 et 10 : deux des volumes de l'un des plus importants matheux-numéricien-informaticien contemporains. Erudition étonnante, richesse des idées et du matériel, beauté de l'exposé. Bibliographie depuis les premières lueurs, et jusqu'à la dernière minute. Suspense...

Au no. 15 : le spectacle du génie aux prises avec les difficultés de problèmes qu'il *fallait* résoudre.

Aux no. 14 et 18 : une idée sur les grandes bibliothèques de programmes.

Aux no. 6 et 13 : l'histoire. Sans elle, il n'y a pas de science, il n'en reste qu'un amoncellement de méthodes et de techniques.

Pour finir, un "minimum minimorum" : *1, 3, 5, 9, 10, 18, 20.* Avec ces livres, on devrait pouvoir vivre heureux sur une île déserte...