échanges

surface d'un polygone aire définie par une courbe fermée paramétrique

par H. Le Helloco (*)
Lycée Rotrou, Dreux

Cet article donne des algorithmes simples pour le calcul de la surface d'un polygone, et en déduit une intégrale donnant la surface délimitée par une courbe fermée paramétrique. L'outil mathématique utilisé est le déterminant de deux vecteurs du plan.

On se place dans le plan euclidien orienté.

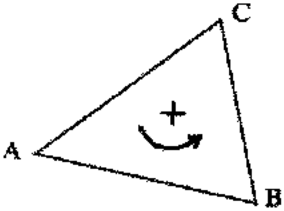
(*) Avec l'impulsion de M. ZARDOZ, programmeur, et de G. CHEVET, professeur.

A. Surface d'un polygone

1. Calcul de la surface en fonction des coordonnées des sommets

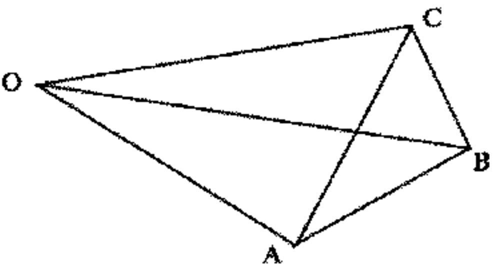
a) Cas du triangle

Notons $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ le déterminant du couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.



Définissons $S(A,B,C)$ la surface signée du triangle (A,B,C). Nous distinguons en effet le triangle (A,B,C) qui aura une surface positive, car pour aller de A à B puis à C on tourne dans le sens positif, du triangle (A,C,B) qui aura une aire négative car on tourne dans le sens négatif.

Ainsi $S(A,B,C) = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.



Soit O un point quelconque du plan.

On vérifiera aisément sur le dessin que :

$$S(A,B,C) = S(O,A,B) + S(O,B,C) + S(O,C,A)$$

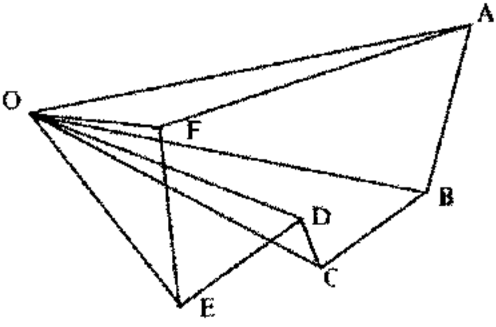
La démonstration est évidente par le déterminant.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &= \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) \\
&= \frac{1}{2}[\det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) - \det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) - \det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})] \\
&= \frac{1}{2}[\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) + \det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) + \det(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})] \\
&= S(O,A,B) + S(O,B,C) + S(O,C,A)
\end{aligned}$$

du fait que le déterminant est une forme multilinéaire alternée.

b) Cas du polygone non croisé

Evidemment, il est tentant d'utiliser cette méthode, employée pour le triangle, pour déterminer l'aire d'un polygone non croisé ; on se convaincra très vite que cela fonctionne très bien même dans des cas "torturés".



Définissons $S(A,B,C,D,E,F)$ l'aire signée du polygone ci-contre de façon analogue à celle employée pour le triangle.

On vérifie sur cet exemple que :

$$S(A,B,C,D,E,F) = S(O,A,B) + S(O,B,C) + S(O,C,D) + S(O,D,E) + S(O,E,F) + S(O,F,A)$$

où O est un point quelconque du plan.

Démontrons par récurrence la propriété :

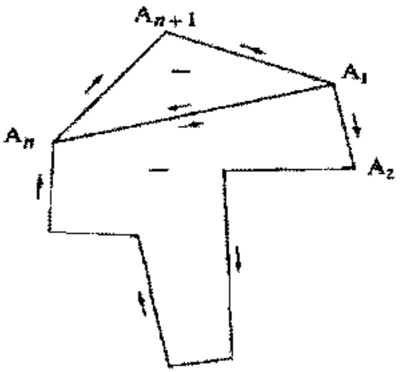
$$S(A_1,A_2,\ldots,A_n) = S(O,A_1,A_2) + S(O,A_2,A_3) + \ldots + S(O,A_{n-1},A_n) + S(O,A_n,A_1)$$

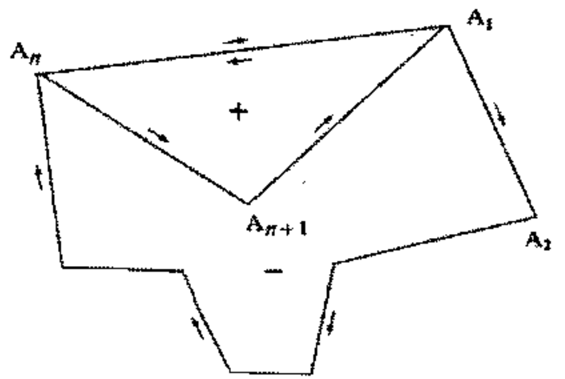
où $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ est un polygone non croisé.

La propriété a déjà été démontrée au rang 3, supposons-la vraie au rang n. Considérons un polygone non croisé $(A_1,A_2,\ldots,A_n,A_{n+1})$.

Avec une permutation circulaire sur les indices si nécessaire, on peut supposer que le polygone $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ est également non croisé (voir l'annexe en fin d'article).

Deux cas peuvent alors se présenter :





Soit A_{n+1} est à l'extérieur du polygone $(A_1,A_2,...,A_n)$ (1^er cas), soit il est à l'intérieur (2^e cas).

Dans le premier cas, pour avoir la surface géométrique du polygone $(A_1,...,A_{n+1})$, il faut rajouter la surface géométrique du triangle (A_1,A_n,A_{n+1}) à la surface géométrique du polygone $(A_1,...,A_n)$; dans le second cas, il faut la retrancher. Si dans le premier cas, le triangle et le polygone $(A_1,...,A_n)$ se décrivent dans le même sens, dans le second cas ils se décrivent en sens contraire. Ainsi dans tous les cas nous aurons :

$$S(A_1,...,A_{n+1}) = S(A_1,...,A_n)+S(A_1,A_n,A_{n+1})$$

donc on a :

$$\begin{aligned} S(A_1,...,A_{n+1}) = {} & S(O,A_1,A_2)+S(O,A_2,A_3)+\ldots+S(O,A_{n-1},A_n) \\ & + S(O,A_n,A_1)+S(O,A_1,A_n)+S(O,A_n,A_{n+1}) \\ & + S(O,A_{n+1},A_1) \end{aligned}$$

comme $S(O,A_n,A_1)+S(O,A_1,A_n)=0$, la propriété est démontrée au rang $n+1$.

Conclusion :

$$\begin{aligned} S(A_1,...,A_n) = \frac{1}{2} [& \det(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2})+\det(\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_3})+\ldots+\det(\overrightarrow{OA_{n-1}},\overrightarrow{OA_n}) \\ & +\det(\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OA_1})] \end{aligned}$$

Désormais, dans la suite de l'article, nous désignerons le deuxième membre de l'égalité par $S(A_1,...,A_n)$.

Désignons par (x_i,y_i) les coordonnées de A_i dans un repère cartésien.

$$\begin{aligned} S(A_1,...,A_n) = \frac{1}{2} (& x_1y_2 - {}_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \ldots + \\ & x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} + x_ny_1 - x_1y_n) \end{aligned}$$

Programme BASIC correspondant :

Supposons que l'on ait au préalable stocké les coordonnées des sommets $A_1,...,A_n$ dans des tableaux X et Y où X(I) et Y(I) sont les coordonnées du sommet A_{i+1}, 1 prendra les valeurs 0 à N. Il faut auparavant dimensionner ces tableaux au rang n (DIM X(N),Y(N)).

S désignant la surface signée du polygone non croisé $(A_1,...,A_n)$, on calcule S de la manière suivante :

```
1000   X(N)=X(0):Y(N)=Y(0)
1010   S=0
1020   FOR I=0 TO N-1
1030   S=S+X(I)*Y(I+1)-X(I+1)*Y(I)
1040   NEXT I
1050   S=S/2
```

à ce moment S contient la valeur de la surface signée du polygone non croisé $(A_1,\ldots,A_n)$.

c) Cas du polygone croisé

Nous allons en fait interpréter sur des exemples simples mais caractéristiques la valeur $S(A_1,\ldots,A_n)$ définie précédemment.

Remarque préliminaire :

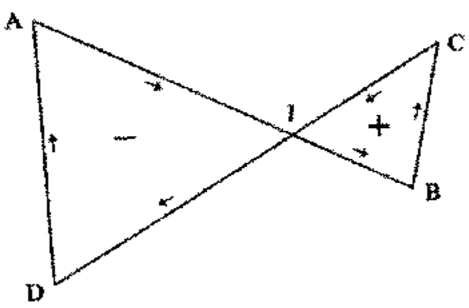
Si C est un point de la droie (AB) et O un point quelconque du plan, alors :

$$\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) + \det(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) .$$

En effet, si C appartient à la droite (AB) , il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{OC} = k.\overrightarrow{OA}+(1-k).\overrightarrow{OB}$, d'où :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})+\det(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) &= (1-k).\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+k.\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \\ &= \det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

Considérons, maintenant, à titre d'exemple le quadrilatère croisé (A,B,C,D).



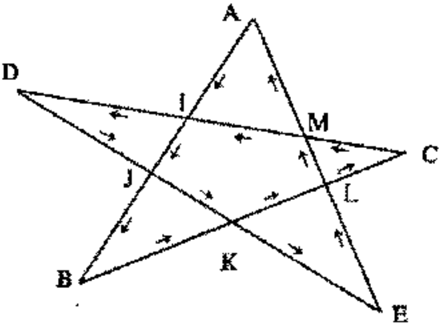
Du fait de la remarque précédente, nous avons :

$$\begin{aligned}S(A,B,C,D) = {}& \frac{1}{2}\,[\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})+\det(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD})+\det(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA})] \\ &+ \frac{1}{2}\,[\det(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})+\det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})+\det(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OI})]\end{aligned}$$

donc $S(A,B,C,D) = S(A,I,D)+S(I,B,C)$.

$S(A,B,C,D)$ est donc la somme des surfaces signées de deux polygones non croisés, le sens de parcours déterminant le signe de la surface.

L'interprétation ne colle pas toujours de manière aussi évidente avec l'intuition. Prenons un pentagone étoilé (A,B,C,D,E).



En utilisant la remarque préliminaire, nous trouvons :

$$S(A,B,C,D,E) = S(A,I,D,J,B,K,E,L,C,M) + S(I,J,K,L,M) .$$

C'est-à-dire la surface de l'étoile à laquelle on ajoute la surface du pentagone intérieur.

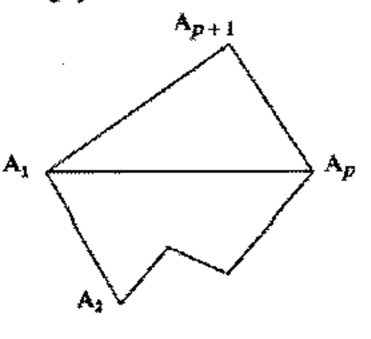
2) Calcul de la surface en fonction des déplacements en abscisse et en ordonnée

Cette méthode est amenée par des préoccupations informatiques (qui sont en fait à l'origine de cet article). En effet, si les coordonnées sont trop grandes, la précision peut en être perturbée, alors que cela ne se produirait pas en considérant uniquement les déplacements. D'autre part, ce traitement s'adapte bien à la recherche de la surface d'une forme définie sur un digitaliseur (**).

Pour définir un polygone à n sommets $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, il suffit de connaître $n-1$ déplacements en x et en y car si on se fixe comme origine A_1, le premier déplacement donne A_2, le deuxième A_3, etc..., le $(n-1)$-ième A_n et le dernier est implicite car on retourne en A_1.

Soit $S_p = S(A_1,A_2,\ldots,A_p)$.

Déterminons S_{p+1} en fonction de S_p, de D_{x_p} et D_{y_p}, les déplacements en x et y qui font passer du point A_p au point A_{p+1}, et de Sx_p et Sy_p, les sommes des déplacements en x et y effectuées jusqu'au rang p .



On a alors :

$A_1A_p\ (Sx_p, Sy_p)$

$A_pA_{p+1}\ (Dx_p, Dy_p)$

On a vu auparavant que :

$$S(A_1,\dots,A_{p+1}) = S(A_1,\dots,A_p) + S(A_1,A_p,A_{p+1})$$

$$S(A_1,A_p,A_{p+1}) = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{A_1A_p},\overrightarrow{A_1A_{p+1}})$$

$$= \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{A_1A_p},\overrightarrow{A_1A_p}+\overrightarrow{A_pA_{p+1}})$$

$$S(A_1,A_p,A_{p+1}) = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{A_1A_p},\overrightarrow{A_pA_{p+1}})$$

$$= \frac{1}{2}(Sx_pDy_p - Sy_pDx_p)$$

Donc

$$S_{p+1} = S_p + \frac{1}{2}(Sx_pDy_p - Sy_pDx_p)$$

On calcule ainsi de proche en proche la valeur S_n qui s'interprète comme la surface signée du polygone $(A_1,\dots,A_n)$ s'il est non croisé.

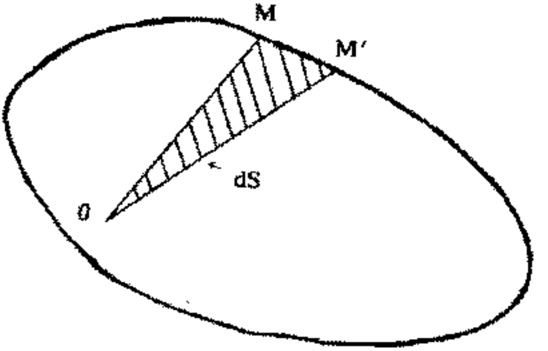
Programme BASIC correspondant :

DX, DY désignent les déplacements en x et en y.
SX, SY désignent les sommes de ces déplacements
S désigne les quantités S_p

```
100 S=0:SX=0:SY=0
110 INPUT DX,DY                 :REM RENTREE DU
                                 DEPLACEMENT
120 S=S+(SX*DY-SY*DX)/2 :REM CALCUL DE LA NOUVELLE
                                 QUANTITE S
130 SX=SX+DX:SY=SY+DY
140 GOTO 110
```

Avec un test d'arrêt intercalé entre les lignes 110 et 120, ce programme fournit la surface d'une forme, et ceci de façon immédiate !

B. Aire définie par une courbe fermée paramétrique



Soit (C) une courbe fermée paramétrique définie par les fonctions $\{x(t);y(t)\}$ $\quad t \in [a,b]$ donc $x(a)=x(b)$ et $y(a)=y(b)$.

On supposera que les fonctions coordonnées possèdent une dérivée continue sur l'intervalle $]a,b[$.

(C) peut être approchée par une suite de polygones.

Soit $M\{x(t),y(t)\}$ et $M'\{x(t+dt),y(t+dt)\}$ deux sommets consécutifs d'un tel polygone.

$dS = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}')$ et $A = \int_a^b dS$ sera la surface signée définie par la courbe (C) si elle ne se croise pas.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM}') &= \frac{1}{2}\left[x(t)y(t+dt)-y(t)x(t+dt)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right]dt\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_a^b\left[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right]dt} \qquad (1)$$

si on applique la formule d'intégration par parties, on obtient une expression plus simple :

$$\boxed{A = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt} \qquad (2)$$

Illustrations : surface d'une ellipse

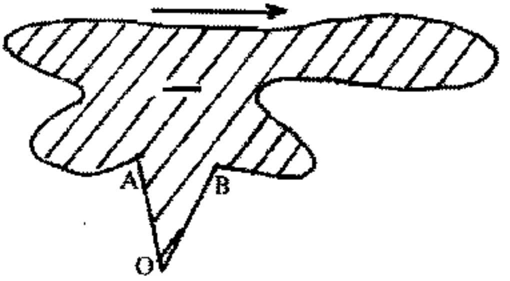
$$x(t)=a\cos t \qquad y(t)=b\sin t \qquad \text{où} \quad t\in[0,2\pi]$$

$$A = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt = \pi ab$$

ce qui est le résultat bien connu, c'est bien rassurant. D'autre part, ayant parcouru l'ellipse dans le sens positif, on trouve bien un résultat positif.

Bien entendu, si la courbe (C) se croise, on retrouve les mêmes phénomènes que pour le polygone croisé.

Remarques :



— Si sur l'intervalle $[a,b]$ la courbe (C) n'est pas fermée, alors dans l'exemple ci-dessous la formule (1) donne la surface signée de la partie hachurée.

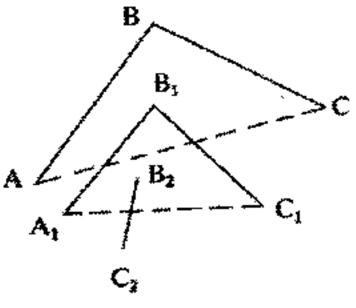
— On peut passer aux limites pour des branches infinies.

— La formule (2) peut être démontrée directement à partir du théorème de Stokes.

Annexe de la démonstration du A. 1. b)

Prenons un polygone non croisé P. Dire qu'il existe trois sommets consécutifs A,B,C tels que le polygone $P-\{B\}$ soit lui aussi non croisé équivaut à dire que le segment $]A,C[$ n'a pas d'intersection avec les autres côtés du polygone.

Supposons que $]A,C[$ ait une intersection avec un autre côté $[B_1,C_1]$.



Soit A_1 le sommet précédent B_1, B_1 est distinct de B. Si $]A_1,C_1[$ a une intersection avec un autre côté $[B_2,C_2]$, du fait que le polygone est non croisé les sommets B, B_1, B_2 sont distincts et ainsi de suite. Comme il y a un nombre fini de sommets, il arrive un moment où trois sommets consécutifs A_n, B_n, C_n sont tels que $]A_n,C_n[$ n'ait pas d'intersection avec les autres côtés du polygone, ce qui résoud notre problème.

Ceci ne donne en fait que l'idée d'une démonstration que les puristes et les esprits chagrins s'empresseront de faire dans les règles de l'art.

(**) *Digitaliseur* ou "*table à digitaliser*" : dispositif qui calcule automatiquement ("digitalise") les coordonnées d'un point indiqué par une pointe sur une planchette, et les rentre dans le calculateur.